# 意思決定科学：ゲーム理論1

情報学部　堀田敬介

2007/11/9,Fri.～

## Contents



## ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ（丸々1個！）を買ってきた．
2人に均等に与えたいのだが，2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い，けんかになる．

どうしたら
いいだろう?

仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

## ケーキを仲良く

One divides,
the other chooses.

- You Cut, I Choose !
  - Bobにケーキを切らせ，Carolにケーキを選ばせる

ただし，これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」！

- 解は…
  - Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

## ケーキを仲良く

- 解の持つ2つの性質
  - proportionality (An allocation is proportional.)
    - Each thinks he or she received a portion that has size or value of at least 1/n.
  - envy-freeness (An allocation is envy-free.)
    - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, does not envy any other player.

プレイヤーが二人の場合は等価

## ケーキを仲良く

2人 非協力 零和ゲーム

- 2人の戦略
  - Bob：「均等に切る」「不均等に切る」
  - Carol：「大きいほうを選ぶ」「小さいほうを選ぶ」
- 2人の利得表
  - Bobの利得表

プレイヤーは2人

自分の利得が相手の損失（零和）

協力はせずに，自分の利得最大（非協力的）

| Bob＼Carol | 大cakeとる | 小cakeとる |
|---|---|---|
| 均等に切る | ½ cake | ½ cake |
| 不均等に切る | smaller cake | larger cake |

- Carolの利得表

| Bob＼Carol | 大cakeとる | 小cakeとる |
|---|---|---|
| 均等に切る | ½ cake | ½ cake |
| 不均等に切る | larger cake | smaller cake |

## ケーキを仲良く

◆ ミニマックス原理

- Bobの利得表(=Carolの損失表)

| Bob＼Carol | 1/2以上 | 1/2以下 | Min | Max |
|---|---|---|---|---|
| 不均等 | 小 | 大 | 小 | 1/2 |
| 均等 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | |
| Max | 1/2 | 大 | | |
| Min | 1/2 | | | |

Bob ：マキシミン戦略： 最大(**Max**) 最小保証利得(**Min**)
Carol：ミニマックス戦略：最小(**Min**) 最大保証損失(**Max**)

## ケーキを仲良く（3人いたら？）

H. Steinhaus, 1948

◆ The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)

1. Bob がケーキを1/3(とBobが思う通り)に切る
2. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘
   (少なくとも1つは acceptable cake があるという条件で)
3. Ted も Carol と同様のことを行う.
4. Case1: Carol(or Ted)が2個以上acceptable cake がある
   Ted → Carol → Bob の順にケーキを取る
5. Case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個
   Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて，残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う.

call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least 1/3 of the cake.

## ケーキを仲良く（3人いたら？）

◆ The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes)

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
  - Bobはちょうど1/3(とBobが思う) piece に切る
  - Carol, Ted は acceptable cake を取る
- envy-free ではない
  - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが，Carol は Ted を妬む可能性がある.（Tedが，彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので）
  - case2：Carol, Ted は誰も妬まないが，Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある.（Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合，2人のいずれかが1/3以上(とBobが思う)cake を得るので）

## ケーキを仲良く（n人いたら？）

H.W. Kuhn, 1967

◆ Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes) を n人版に拡張

(Frobenius & König の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム)
(4人版は Steinhaus も気づいていたらしい)

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure

(Steinhaus が 1948年に2人(彼の学生，ポーランド人)のアイデアを論文の形で発表)

◆ ……

## ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure (n players)

- The partners being ranged A,B,C,…,N. A cuts from the cake an arbitrary part. B has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off. Whatever he does, C has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice, and so on up to N. The rule obliges the ``last-diminisher" to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of , the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake. After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder. (from ``Fair Division", p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

## ケーキを仲良く

◆ The last-dimisher procedure

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
  - 切るプレイヤーがちょうど1/nと考えるpiece に切ること
- envy-freeではない
  - 理由：例えば，ゲームを先に抜けたプレイヤーAが，ある段階で切られたケーキが1/nより大きい(とAが思う)ときでもそれを阻止できない．結果として1/nより大きいケーキが誰か(B)に行く(とAが思う)ので，AはBを妬む.

## ゲーム理論とは何か？

- ゲーム的状況　game situations
  - 複数の意思決定主体(プレイヤー)が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ゲーム理論　game theory
  - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

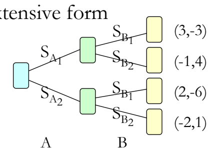
John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日（火）取得の情報

## ゲーム理論とは何か？

- プレイヤー　player
  - 意思決定し，行動する主体．(2人，3人，…，n人，…，∞)
    - 例：個人，複数の個人から成る組織，政党，国家，…
- 戦略　strategy
  - プレイヤーが取りうる行動．(有限，無限)
- 利得と利得関数　payoff
  - 各プレイヤーの戦略決定後，ゲームは終了し，結果が出る．結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値．利得 payoff，効用 utility.
- 協力の可能性
  - 各プレイヤーは自由に自己の判断で行動．
    - 協力ゲーム：十分にコミュニケーション可能で，合意の上で戦略を決定．
    - 非協力ゲーム：各自の独立な判断により，戦略を決定．

## ゲーム理論とは何か？

- ゲームの表現形式
  - 展開形　extensive form




  - 戦略形　strategic form，標準形　normal form

| A＼B | $S_{B_1}$ | $S_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $S_{A_1}$ | 3 | 1 |
| $S_{A_2}$ | -4 | 6 |

## ゲーム理論とは何か？

- ゲームの定義(戦略形n人ゲーム)

$$G=(N,\{S_i\}_{i\in N},\{f_i\}_{i\in N})$$

$$\begin{cases} N=\{1,2,\cdots,n\} & \text{:プレイヤーの集合} \\ S_i=\{s_{i1},s_{i2},\cdots,s_{im}\} & \text{:プレイヤー}i\text{の戦略集合} \\ f_i:S_1\times\cdots\times S_n\to R & \text{:プレイヤー}i\text{の利得関数} \end{cases}$$

各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し，
Gは全てのプレイヤーの共有知識とする．

## ゲーム理論とは何か？

- 非協力ゲームと協力ゲーム
  - 各プレイヤーの戦略決定における前提

$$S_i=\{s_{i1},s_{i2},\cdots,s_{im}\}\ (i\in N)$$

1. プレイヤー間には，各プレイヤーがとるべき戦略について，強制力のある取り決めは存在しない．

   拘束的合意が成立しない → 非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に，とるべき戦略についての合意が成り立ち，それに基づいて戦略決定する．

   拘束的合意が成立 → 協力ゲーム

## 2人非協力零和ゲーム

- ゲームのルール
  - プレイヤーの数は2人　$N=\{1,2\}$
  - 各プレイヤーは，独立に戦略を決定(非協力)
  - プレイヤーの利得の和は，常に零(零和)　$\forall(s_1,s_2)\in S_1\times S_2,\ f_1(s_1,s_2)+f_2(s_1,s_2)=0$
  - ゲームは1回限り
  - 各プレイヤーは戦略決定時に，他のプレイヤーがどの戦略をとるかは知らない
  - 各プレイヤーの取りうる戦略は有限

$$\begin{cases} S_1=\{s_{11},s_{12},\cdots,s_{1m}\} \\ S_2=\{s_{21},s_{22},\cdots,s_{2n}\} \end{cases}$$

## 2人非協力零和ゲーム

◆ 利得行列　payoff matrix

- 零和ゲーム，即ち，　$\forall(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2,\ f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$
  なので，　$a_{ij} = f_1(s_i, s_j) = -f_2(s_i, s_j)$
  とおくと，取りうる戦略と利得の関係を行列Aで表せる

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

利得行列

## 2人非協力零和ゲーム

◆ Example1：

- A君とBさんがトランプで簡単なゲームをしている．双方とも予め2枚のカードを持っており，1回だけ1枚のカードを出し，カードの目の差を利得としてもらえるというゲームである．さて，A君は「スペード の4」「ハートの7」の2枚，Bさん「クラブの2」「ダイヤの10」の2枚のカードを持っていることが互いに分かっている時，2人はどのようなカードを出すべきか？

A君の利得表

| A＼B | クラブの2 | ダイヤの10 |
|---|---|---|
| スペードの4 | 2 | -6 |
| ハートの7 | 5 | -3 |

Bさんの利得表

| A＼B | クラブの2 | ダイヤの10 |
|---|---|---|
| スペードの4 | -2 | 6 |
| ハートの7 | -5 | 3 |

ゲームの解：（ハートの7，ダイヤの10）

ゲームの値

## 2人非協力零和ゲーム

◆ Example2：

- A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

## 2人非協力零和ゲーム

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

◆ ミニマックス原理　minimax principle

- Example2でプレイヤーAの思考　　最大化プレイヤー
  - 戦略$s_{A_1}$を取ったときの最悪の事態は
    min(-2, 4, -1) = -2（プレイヤーBが戦略$s_{B_1}$を取る）
  - 戦略$s_{A_2}$を取ったときの最悪の事態は
    min(2, 2, 1) = 1　（プレイヤーBが戦略$s_{B_3}$を取る）
  - 戦略$s_{A_3}$を取ったときの最悪の事態は
    min(4, -3, 0) = -3（プレイヤーBが戦略$s_{B_2}$を取る）

⇨ 戦略$s_{A_2}$を取る（最悪でも利得1が保証される）

もっと良い利得を得ることができるのか？

## 2人非協力零和ゲーム

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

◆ ミニマックス原理　minimax principle

- Example2でプレイヤーAがBの立場で思考
  - Bが戦略$s_{B_1}$を取ったとき，Aである自分は戦略$s_{A_3}$を取る
    max(-2, 2, 4) = 4
  - Bが戦略$s_{B_2}$を取ったとき，Aである自分は戦略$s_{A_1}$を取る
    max(4, 2, -3) = 4
  - Bが戦略$s_{B_3}$を取ったとき，Aである自分は戦略$s_{A_2}$を取る
    max(-1, 1, 0) = 1

⇨ 戦略$s_{B_3}$を取る（最悪でも損失1で済む）

Aは戦略$s_{A_2}$を取るとき，利得1を得られ，
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる．

## 2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理

- Example2：

保証水準 security level

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | min | max |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 | -2 | |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 | -3 | |
| max | 4 | 4 | 1 | | |
| min | 1 | | | | |

マキシミン値 maximin value
$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

保証水準 security level

マキシミン原理
maximin principle
〔最大化プレイヤーの行動原理〕

ミニマックス値
minimax value
$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス原理
minimax principle
〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$v_1 = v_2$

## 2人非協力零和ゲーム

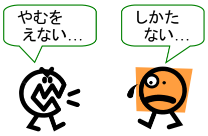
| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

- 均衡点とゲームの値
  - 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると，どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！

何らかの意味での均衡に到達

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$$




2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

$(s_{A_2}{}^*, s_{B_3}{}^*)$：ゲームの均衡点 equilibrium point

## 演習1：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？ （1），（2）それぞれのゲームについて考えよ

（1）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 | -1 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 0 | 2 |
| $s_{A_3}$ | 5 | 2 | 3 |

（2）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 5 | 6 | 4 |
| $s_{A_2}$ | 1 | 8 | 2 |
| $s_{A_3}$ | 7 | 2 | 3 |

## 2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：
    - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

## 2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | min | max |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 | -4 | 1 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 | 1 | |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 | -3 | |
| max | 4 | 3 | 2 | | |
| min | 2 | | | | |

マキシミン戦略

$$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

## 2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Proposition1：利得行列A=$[a_{ij}]$が与えられた時，

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

いかなる場合に均衡点が存在し，
ゲームが厳密に確定的であるか？

## 2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - 鞍点 saddle point
    - 行列A=$[a_{ij}]$において，任意の $i$，$j$ に対し，

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$$

が成り立つとき，$(i_0, j_0)$をこの行列の鞍点といい，$a_{i_0 j_0}$を鞍点値という．

$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0}$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1} & \cdots & a_{i_0 j_0} & \cdots & a_{i_0 n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- Theorem1：
  - （行列）ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は，その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること．またこのとき，鞍点が均衡点．
- 最適戦略　optimal strategy
  - 均衡点 $(i^*, j^*)$ は鞍点なので，プレイヤーAが戦略 $i^*$ を用いると，プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ，また，Bが戦略 $j^*$ を取る限り，Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない．

⇨ 戦略 $i^*$ がAの最適戦略

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- Theorem2：
  - 厳密に確定的な零和ゲームにおいて，均衡点が複数ある場合，各均衡点の値は等しい．また，$(i^*, j^*)$, $(i_0, j_0)$ が均衡点ならば，$(i^*, j_0)$, $(i_0, j^*)$も均衡点である．

均衡戦略は交換可能

$$
\begin{array}{c|cc}
 & j_0 & j^* \\
\hline
i_0 & a_{i_0 j_0} & a_{i_0 j^*} \\
i^* & a_{i^* j_0} & a_{i^* j^*}
\end{array}
$$

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

完全予見は不可能！
決断は下さねばならない！
⇨ 主体的な賭，最適な賭の確率
⇨ 期待効用原理

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

| | A＼B | $s_{B_1}$ ($q_1$) | $s_{B_2}$ ($q_2$) | $s_{B_3}$ ($q_3$) |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

$p_i \geq 0, (i=1,2,3)$
$p_1 + p_2 + p_3 = 1$
$q_j \geq 0, (j=1,2,3)$
$q_1 + q_2 + q_3 = 1$

プレイヤーBが各戦略をとったときの，プレイヤーAの期待効用

$$
\begin{cases}
E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 \\
E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = \ \ 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 \\
E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = \qquad\quad\ p_2 + 2p_3
\end{cases}
$$

よって，Bが各戦略を$(q_1,q_2,q_3)$の確率でとったときの，Aの期待効用

$$E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3$$

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

| | A＼B | $s_{B_1}$ ($q_1$) | $s_{B_2}$ ($q_2$) | $s_{B_3}$ ($q_3$) |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

純粋戦略 pure strategy
混合戦略 mixed strategy

プレイヤーAが各戦略をとったときの，プレイヤーBの期待効用

$$
\begin{cases}
E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = -4q_1 + 2q_2 \\
E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = \ \ 4q_1 + 3q_2 + q_3 \\
E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q}) = \ \ \ \ q_1 - 3q_2 + 2q_3
\end{cases}
$$

Aが各戦略を$(p_1,p_2,p_3)$の確率でとったときの，Bの期待効用

$$E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3$$

まとめると，プレイヤーA, Bがそれぞれ確率$(p_1,p_2,p_3)$, $(q_1,q_2,q_3)$で各戦略をとったとき，各プレイヤーの期待効用は以下のようになる．

$$
\begin{cases}
E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\
E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3
\end{cases}
$$

また，このとき明らかに，以下が成り立つ．

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

プレイヤーAは期待効用最大化！
プレイヤーBは期待損失最小化！

## 2人非協力零和ゲーム

### 支配戦略

- Example3：

**戦略の支配 domination of strategies**
プレイヤー i の戦略 h, k について，
戦略 h が戦略 k を支配するとは，
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して，
$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$
が成立すること．

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

被支配戦略 → $s_{A_1}$
支配戦略 → $s_{A_2}$

支配する dominate

•＝だと「同等」
•≧かつ≠だと「弱支配」
補足）通常は，被弱支配戦略は除去しない→ 共有地の悲劇

**被支配戦略除去の原理**
「支配される戦略は用いない」

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

⇨

| A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

補足：被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ **ゲームは支配可解** dominance solvable

## 2人非協力零和ゲーム

| | | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

- 最適混合戦略
  - Example3：

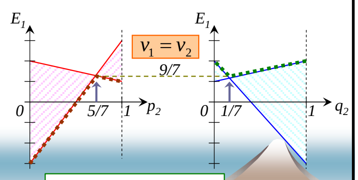
$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= E(\boldsymbol{p},s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p},s_{B_3})q_3 \\
&= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\
&= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2) \\
&\left[ = \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} E(\boldsymbol{p},(1,0)) = 6p_2 - 3 \\ E(\boldsymbol{p},(0,1)) = -p_2 + 2 \end{cases}
$$

Aの最適戦略 $\boldsymbol{p}^*=(0, 5/7, 2/7)$

$$
\begin{cases} E((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_2 + 1 \\ E((0,1),\boldsymbol{q}) = -5q_2 + 2 \end{cases}
$$

Bの最適戦略 $\boldsymbol{q}^*=(0, 1/7, 6/7)$

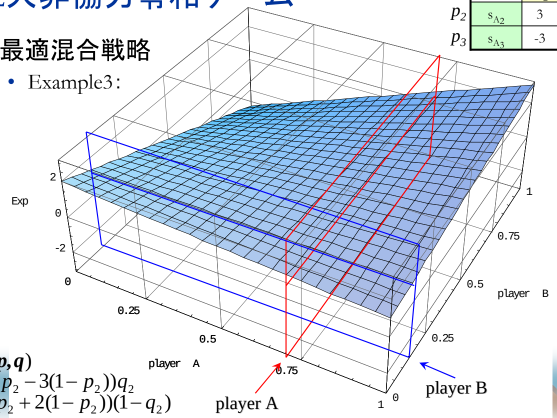



$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$：均衡解

## 2人非協力零和ゲーム

| | | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

- 最適混合戦略
  - Example3：




$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$
$= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2$
$+ (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2)$

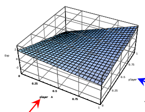
player A

player B

## 2人非協力零和ゲーム

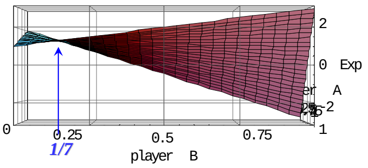
| | | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

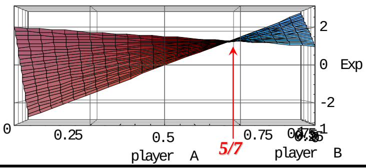
- 最適混合戦略
  - Example3：



player B

player A




## 2人非協力零和ゲーム

| | | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

- 混合戦略の意味
  - $\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*$ の確率のくじをつくって，引いていずれかに決する方法が，なぜ合理的な決定方法なのか？

    Aの最適戦略 $\boldsymbol{p}^*=(0, 5/7, 2/7)$　Bの最適戦略 $\boldsymbol{q}^*=(0, 1/7, 6/7)$
  - player A は $S_{A_2}$ なら 3，$S_{A_3}$ なら 2 が望ましいが，$p_2^* q_3^* + p_3^* q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる．

    しかし，これは事後的

しまった！

  - このような状況も全て考慮に入れた上で，最適戦略が決定された！

## 演習2：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 4 | -2 |
| $s_{A_2}$ | -3 | 3 |

（2）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 5 |

（3）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | $s_{B_4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 | 3 | 4 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 4 | 2 | 3 |
| $s_{A_3}$ | 2 | 3 | 1 | 2 |

（4）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 2 | 4 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 3 | 0 |
| $s_{A_3}$ | 2 | 1 | -2 |

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーA, Bの純粋戦略

    $S_A = \{s_{A_i} \mid i = 1,\cdots,m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j = 1,\cdots,n\}$
  - プレイヤーAの利得行列

$$
\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

**利得関数**

$$
E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j
$$

  - プレイヤーA, Bの混合戦略

$$
\boldsymbol{p} = (p_1,\cdots,p_m) \longrightarrow s_{A_i} = (0,\cdots,1,\cdots,0)
$$

$$
\begin{cases} p_i \geq 0, (i = 1,\cdots,m) \\ p_1 + \cdots + p_m = 1 \end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{q} = (q_1,\cdots,q_n) \longrightarrow s_{B_j} = (0,\cdots,1,\cdots,0)
$$

$$
\begin{cases} q_j \geq 0, (j = 1,\cdots,n) \\ q_1 + \cdots + q_n = 1 \end{cases}
$$

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーAの保証水準

    $\min_{q} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_1 = \max_{p} \min_{q} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$

    $\boldsymbol{p}$ を操作して期待利得最大

  - プレイヤーBの保証水準

    $\max_{p} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_2 = \min_{q} \max_{p} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$

    $\boldsymbol{q}$ を操作して期待損失最小

  - Proposition2

$$\max_{p} \min_{q} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \le \min_{q} \max_{p} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Theorem3

    J. von Neumann, 1928

$$\max_{p} \min_{q} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \min_{q} \max_{p} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

また，これを成立させる戦略の組 ($\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$) を**均衡点**といい，均衡点における利得 $v(\boldsymbol{A})$ をゲームの値という.

$$v(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{p}^{*T} \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

  - Theorem4

    戦略の組 ($\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$) が均衡点であるための必要十分条件は，($\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$) が関数 $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の**鞍点**であること．即ち，

$$\forall \boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\quad E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q})$$

が成立すること.

Bが $\boldsymbol{q}^*$ の時，Aは $\boldsymbol{p}^*$ にするのが利得最大

Aが $\boldsymbol{p}^*$ の時，Bは $\boldsymbol{q}^*$ にするのが損失最小

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Theorem5

    $v(\boldsymbol{A})$ がゲームの値，($\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$) が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j,\quad E(s_{A_i},\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,s_{B_j})$$

が成立すること.

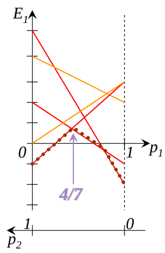
$$\forall i = 1,\cdots,m,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$$

$$\forall j = 1,\cdots,n,\quad E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$$

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example4

| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | $s_{B_4}$ | $s_{B_5}$ |
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | -2 | -1 | 2 | 3 | 3 |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 5 | 2 | 4 | -1 | 0 |
| | $s_{A_3}$ | 4 | 1 | 3 | -2 | -1 |




$$E(\boldsymbol{p},s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$$

$$\cancel{E(\boldsymbol{p},s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2}$$

$$E(\boldsymbol{p},s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$$

$$E(\boldsymbol{p},s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$$

$$\cancel{E(\boldsymbol{p},s_{B_5}) = 3p_1}$$

$$\boldsymbol{p}^* = (\frac{4}{7},\frac{3}{7},0)$$

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example5：一般の2×2ゲーム

| | | $q_1$ | $q_2$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

$\Rightarrow$ 鞍点が存在すればそれが**均衡点**.
なければ，混合戦略を考えるが，
このとき，必ず $E(\boldsymbol{p},s_{B_1})$ と $E(\boldsymbol{p},s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1},\boldsymbol{q})$ と $E(s_{A_2},\boldsymbol{q})$ は交点を持つ.

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p},s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(\boldsymbol{p},s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}\boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}\boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

**均衡点**

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}, \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}\right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}+a_{22}-a_{21}}, \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}+a_{22}-a_{21}}\right)$$

## 演習3：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 4 | -2 |
| $s_{A_2}$ | -3 | 3 |

（2）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 5 |

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーAの利得行列と混合戦略 $\boldsymbol{p}$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i \ge u \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} p_i \ge u \\ \vdots \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) = \sum_{i=1}^{m} a_{in} p_i \ge u \end{cases}$$

⇒ max. $u$

まとめると…

$$\begin{array}{l} \max. u \\ s.t. \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge u \quad (j = 1, \cdots, n) \\ \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ \quad p_i \ge 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \end{array}$$

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーBの利得行列と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} q_1 & q_m & \cdots & q_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} q_j \le w \\ E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} q_j \le w \\ \vdots \\ E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{m} a_{mj} q_j \le w \end{cases}$$

⇒ min. $w$

まとめると…

$$\begin{array}{l} \min. w \\ s.t. \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le w \quad (i = 1, \cdots, m) \\ \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ \quad q_j \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \end{array}$$

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの問題（P） ⇔主・双対 プレイヤーBの問題（D）

$$\begin{array}{l} \max. u \\ s.t. \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge u \quad (j = 1, \cdots, n) \\ \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ \quad p_i \ge 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \min. w \\ s.t. \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le w \quad (i = 1, \cdots, m) \\ \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ \quad q_j \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \end{array}$$

- Theorem6
  （P），（D）の最適解が（$\boldsymbol{p}$*, $u$*），（$\boldsymbol{q}$*, $w$*）のとき，（$\boldsymbol{p}$*, $\boldsymbol{q}$*）がゲームの均衡点であり，$v$:= $u$*= $w$*がゲームの値である

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

| A＼B | グー | パー | チョキ | min | max |
|---|---|---|---|---|---|
| グー | 0 | 2 | -7 | -7 | |
| パー | -2 | 0 | 4 | -2 | -2 |
| チョキ | 7 | -4 | 0 | -4 | |
| max | 7 | 2 | 4 | | |
| min | | 2 | | | |

マキシミン戦略

$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

$\neq$

$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

| | A＼B | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | グー | 0 | 2 | -7 |
| $p_2$ | パー | -2 | 0 | 4 |
| $p_3$ | チョキ | 7 | -4 | 0 |

$$\begin{array}{l} \max. u \\ s.t. \quad -2p_2 + 7p_3 \ge u \\ \quad 2p_1 \quad -4p_3 \ge u \\ \quad -7p_1 + 4p_2 \quad \ge u \\ \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ \quad p_1, \ p_2, \ p_3 \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \min. w \\ s.t. \quad 2q_2 - 7q_3 \le w \\ \quad -2q_1 \quad + 4q_3 \le w \\ \quad 7q_1 - 4q_2 \quad \le w \\ \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ \quad q_1, \ q_2, \ q_3 \ge 0 \end{array}$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

($p_1$*, $p_2$*, $p_3$*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)，$u$*=0
($q_1$*, $q_2$*, $q_3$*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)，$w$*=0

## 演習4：

- 硬貨合せゲーム
  プレイヤーA, Bが各々100円硬貨を投げて表・裏の出た組合せによって勝ち負けを決めるゲームを考える．両方とも表，あるいは両方とも裏がでたらAの勝ちとし，BはAに100円を支払う．逆に2枚の硬貨の出た面が違う場合はBの勝ちとし，AはBに100円を支払う．このゲームの値はどうなるか？　期待効用原理の観点で考察せよ．

- 市場シェアゲーム
  2大自動車メーカーA社とB社は，各々RV車を販売している．市場でシェア争いにしのぎを削っていた．現状では，いずれも200万で販売しているが，今後の戦略として，それぞれ価格を「据え置く」か「10%引き」とするかがある．
  - 両社とも「据え置く」場合の純利益が，Aが600億円で，Bが400億円，
  - Aが据え置き，Bが10%引きだと，Aが300億円で，Bが700億円，
  - Aが10%引き，Bが据え置くだと，Aが450億円で，Bが550億円，
  - 両社とも10%引きで販売すると，Aが700億円で，Bが300億円

  が見込まれる．それぞれの最適戦略はどうなるか？

## 参考文献


- S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division”, Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣(2000)
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2001)
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版(2003)
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房(2005)
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)