

データ分布と予測

仮説検定

堀田 敬介  
2008/7/4, Fri.

Contents

- 仮説検定とは？
  - 有意水準
  - 帰無仮説と対立仮説
  - 仮説検定における誤り
  - 片側検定と両側検定
- 母集団の母数に対する仮説検定
  - 母平均の検定 (母分散が既知の場合)
  - 母平均の検定 (母分散が未知の場合)
  - 母分散の検定
  - 母比率の検定
- 2つの母集団に対する仮説検定
  - 平均値の差の検定 (母分散が既知の場合)
  - 平均値の差の検定 (母分散が未知だが等しい場合)
  - 平均値の差の検定 (母分散が未知で等しくない場合)
  - 分散の比の検定
- 適合度検定と独立性の検定

仮説検定とは？

推測統計  
statistical inference

仮説検定  
hypothesis testing

標本データの平均値と分散 (標準偏差) から、母集団の平均値と分散 (標準偏差)、母比率などの母数 (パラメータ) を推定する

標本データの平均値と分散 (標準偏差) などをもとに、母集団に対する「ある仮説」が間違いかどうか判定する

母数  $\mu, \sigma^2$

母集団

母集団に対する仮説  $H_0$

標本から母集団を推定

無作為抽出

標本

標本から仮説を検定

仮説検定とは？

- 例: 日本人成人女性の平均身長

仮説「日本人成人女性の平均身長は160cmである」

母集団  
日本人 成人女性

ランダムサンプリング  
(無作為抽出)

標本身長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	150	165	155	170	150	145	175	160	165	140

標本平均の値: 157.5cm

仮説は間違っていた (正しかった) と言えるのか？

仮説検定とは？

- 例: 日本人成人女性の平均身長

仮説「日本人成人女性の平均身長は160cmである」

標本身長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	150	165	155	170	150	145	175	160	165	140

標本平均の値: 157.5cm  
標本標準偏差の値: 10.78cm

標本平均  $\bar{X}$ , 標本分散  $S^2$  とすると、以下の確率変数  $T$  が自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従う

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n-1}}$$

仮説検定とは？

- 例: 日本人女性の平均身長

仮説「日本人女性の平均身長は160cmである」

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n-1}} = \frac{\bar{X} - 160}{10.78 / \sqrt{10-1}} = \frac{\bar{X} - 160}{3.594}$$

自由度9の  $t$  分布に従う

標本平均  $\bar{X}$  がこの分布の中心から大きく外れた位置にあるならば、仮説は間違っていると判定できるのではないかな？

注意: 仮説が間違っている確率は0にはならない！

仮説が間違っている範囲を決める！

### 仮説検定とは？

- 採択域と棄却域
- 例：自由度9のt分布における下側5%棄却域

The graph shows a t-distribution curve for 9 degrees of freedom. The x-axis ranges from -3 to 3. A vertical line at  $T = -1.833$  divides the area into a rejection region (left, shaded red) and an acceptance region (right, shaded blue). The rejection region is labeled '5%' and the acceptance region is labeled '95%'. The rejection region is also labeled '棄却域 rejection region (臨界域 critical region)' and the acceptance region is labeled '採択域 region of acceptance'.

### 仮説検定とは？

- 採択域と棄却域
- 例：自由度9のt分布における下側5%棄却域

$$T = \frac{\bar{X} - 160}{3.594} \leq -1.833$$
$$\Leftrightarrow \bar{X} \leq 160 - 1.833 \times 3.594 = 153.4$$

つまり、  
棄却域：  $\bar{X} \leq 153.4$   
採択域：  $\bar{X} > 153.4$

となり、  
標本平均値が153.4cm以下であれば、  
仮説「日本人成人女性の平均身長は160cmである」  
が棄却 (rejection of hypothesis) される

The graph shows a t-distribution curve with a mean of 160. A vertical line at 153.4 divides the area into a rejection region (left, shaded red) and an acceptance region (right, shaded green). The rejection region is labeled '棄却域' and the acceptance region is labeled '採択域'. A point at 157.5 is marked in the acceptance region. A text box notes: '例題の場合は、標本平均値が157.5cmで棄却域にないため、棄却されない'.

### 有意水準

- 仮説検定の手順
- 1. 母集団に対する「仮説」を立てる
- 2. 「仮説」の棄却域を設定する

棄却域が5%とすれば95%信頼区間から外れていれば「仮説」を「棄却」することになる

The diagram shows a horizontal line with a double-headed arrow. On the left, it says '棄却域：小 信頼区間：広' (small rejection region, wide confidence interval). On the right, it says '棄却域：大 信頼区間：狭' (large rejection region, narrow confidence interval).

★ 棄却域が5%で「仮説」が「棄却」されるとき、5%はその「仮説」が正しい可能性が残る！

5%の間違いの危険性がある      5%: **有意水準** (significance level) 【危険率 (risk)】

### 帰無仮説と対立仮説

- 検定における仮説は**対立する**2つ

【仮説1】日本人成人男性の平均体重は60kgである  
【仮説2】日本人成人男性の平均体重は60kgではない

↓

- ★ 仮説1を統計的に検定したとき、その起こる確率が棄却域にあれば、この仮説が棄却される。
- ★ 仮説1が棄却されない場合、「**仮説1が正しいという結論は出せない**」！
- ★ 仮説1は「**棄却されてはじめて意味を持つ**」
- ★ 仮説2は仮説1が棄却された場合に採択される

**帰無仮説** (null hypothesis)      **対立仮説** (alternative hypothesis)

棄却されてはじめて意味を持つ      本当に示したいこと

**統計的検定の目的は「対立仮説の正しさを示す」こと！**

### 仮説検定における誤りと検出力

- 仮説検定における誤り
- 第1種の誤り error of the first kind
- 第2種の誤り error of the second kind

		本当に成り立っているのは	
		帰無仮説 $H_0$	対立仮説 $H_1$
検定結果	$H_0$	正しい (その確率: $1 - \alpha$ )	第2種の誤り (その確率: $\beta$ )
	$H_1$	第1種の誤り (その確率: $\alpha$ )	正しい (確率: $1 - \beta$ = <b>検出力</b> )

• 帰無仮説が限定的なので  $\alpha$  (有意水準) は1つに定まる。  
• サンプル数が大きければ  $\beta$  は小さくなる。

$\alpha$ : 大  $\Leftrightarrow$   $\beta$ : 小  
 $\alpha$ : 小  $\Leftrightarrow$   $\beta$ : 大  
となので、共に小さくはできない

### 仮説検定における誤りと検出力

- 例：『男にセクハラが多いのは何故か？』  
(出典：『週刊東洋経済 2007/12/15号』— 経済学ってこんなにおもしろい！— p.66『男はなぜセクハラするのか』)
- 帰無仮説  $H_0$ : 目の前の異性は自分に気がある (→ 手を出す)
- 対立仮説  $H_1$ : 目の前の異性は自分に気がない (→ スルー)

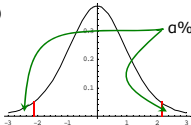
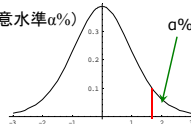
		本当に成り立っているのは	
		帰無仮説 $H_0$	対立仮説 $H_1$
異性が自分に気があるかどうか	検定結果 $H_0$	カップル (セクハラ不成立) (その確率: $1 - \alpha$ )	第2種の誤り (セクハラ) (その確率: $\beta$ )
	検定結果 $H_1$	第1種の誤り (その確率: $\alpha$ )	カップル不成立 (確率: $1 - \beta$ = <b>検出力</b> )

男：子孫を多く残したい  
→ 数多くの相手を見つけた  
→ 女が自分の相手になっても良いと思っている  
→ 会を逃すのは損失  
→ 気の無い相手に手を出して断られても恥をかく  
→ 済む

女：妊娠・子育ては大きな負担  
→ ける男が必要  
→ 分と子供を養育する意思のある男を選びたい  
→ 気の男を見逃したとしても、気の無い相手にだより良い

男：第1種の誤り <<< 第2種の誤り  
女：第1種の誤り >>> 第2種の誤り

### 両側検定と片側検定

- 両側検定 two tailed test (有意水準 $\alpha\%$ )  
[帰無仮説]  
日本人男性の平均体重は60kgである ( $\mu=60$ )  
[対立仮説]  
日本人男性の平均体重は60kgではない ( $\mu\neq60$ )  

- 片側(右側)検定 one tailed test (有意水準 $\alpha\%$ )  
[帰無仮説]  
日本人男性の平均身長は160cmである ( $\mu=160$ )  
[対立仮説]  
日本人男性の平均身長は160cmより大きい ( $\mu>160$ )  


### 母数に関する仮説検定

- 母平均に関する仮説検定 (母分散 $\sigma^2$  既知) Z検定  
統計量  $\bar{X} \rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  が標準正規分布  $N(0,1)$  に従うことを利用
- 母平均に関する仮説検定 (母分散 $\sigma^2$  未知) t検定  
統計量  $\bar{X} \rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}}$  が自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従うことを利用
- 母分散に関する仮説検定  $\chi^2$ 検定  
統計量  $S^2 \rightarrow \chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$  が自由度  $n-1$  の  $\chi^2$  分布に従うことを利用

### 母数に関する仮説検定

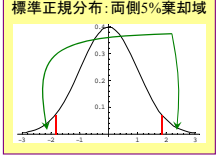
- 母平均の検定 [Z検定] (母分散が既知の場合)  
- 例: BMIによる肥満検査  
 $BMI = (\text{体重})\text{kg} \div (\text{身長})\text{m}^2$   
ある会社の無作為抽出100人の社員のBMIが平均値=22.35だった。  
肥満の程度に問題があるといえるか? 有意水準5%で検定  
[出展:『図解雑学 統計解析』p.192]

BMI値	判定
~20	やせ
~24	普通
~26.5	太気味
~30	太過

  
[帰無仮説] 母平均 $\mu=22$   
[対立仮説] 母平均 $\mu\neq22$   
で両側検定。ただし、母標準偏差は過去の経験から2.5とする。  
$$\bar{X} \rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

確率変数Zは標準正規分布  $N(0,1)$  に従う

### 母数に関する仮説検定

- 母平均の検定 [Z検定] (母分散が既知の場合)  
- 例: BMIによる肥満検査  
有意水準5%の棄却域を表す不等式  $|Z| > 1.96$   
$$\Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > 1.96$$
  
$$\Leftrightarrow |\bar{X} - \mu| > 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
  
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X} < \mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22 - 1.96 \times \frac{2.5}{\sqrt{100}} = 21.51 \\ \bar{X} > \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 22 + 1.96 \times \frac{2.5}{\sqrt{100}} = 22.49 \end{cases}$$
  
結論: 肥満の程度に問題があるとはいえない  
ただし、「問題がない」とまではいえない  


標準正規分布: 両側5%棄却域

帰無仮説は棄却されない

### 母数に関する仮説検定

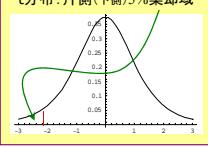
- 母平均の検定 [t検定] (母分散が未知の場合)  
- 例: 酒屋の不正疑惑  
ある酒屋では酒の量をごまかして売っているという噂があったので実際に1合(=180cc)のお酒を5本買って調べてみた。  

酒量(cc)	175	180	165	170	170
標本平均値	172.0cc				

  
標本平均値は172.0ccであり、180ccより8ccも少ないが、果たしてこの店は不当表示で訴えられるか? [出展:『なるほど統計学』p.125]
  
[帰無仮説] 母平均 $\mu=180$   
[対立仮説] 母平均 $\mu<180$   
とし、有意水準5%で左片側検定。  
$$\bar{X} \rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}}$$

確率変数Tは自由度  $n-1$  の  $t$  分布  $t_{\alpha}(n-1)$  に従う

### 母数に関する仮説検定

- 母平均の検定 [t検定] (母分散が未知の場合)  
- 例: 酒屋の不正疑惑  
有意水準5%の棄却域を表す不等式  $T < -2.132$   
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} < -2.132$$
  
$$\Leftrightarrow \bar{X} < \mu - 2.132 \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$
  
$$\Leftrightarrow \bar{X} < 180.0 - 2.132 \frac{5.099}{\sqrt{5-1}} = 174.6$$
  
よって、  
 $172.0 < 174.6$   
より、帰無仮説  $H_0$  は棄却される。  


t分布: 片側(下側)5%棄却域

この酒屋は酒量をごまかしているらしい...

## 母数に関する仮説検定

● 母平均の検定〔 $t$ 検定〕(母分散が未知の場合)

演習1: 空調システムの作動状況検査

設定温度を25℃とし、7日間室内温度測定し、このシステムが正しく動いているかどうか5%有意水準で両側検定

24.2	25.3	26.2	25.7	24.4	25.1	25.6
------	------	------	------	------	------	------

〔帰無仮説〕 $\mu = 25.0$

〔出展:『統計学入門』p.241〕

〔対立仮説〕 $\mu \neq 25.0$

$$|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \right| > t_{0.025}(6)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{25.21 - 25.0}{0.662/\sqrt{7-1}} \right| > 2.447$$

$$\Leftrightarrow |0.793| < 2.447$$

有意水準5%で  
帰無仮説は棄却  
できない

この空調システムは  
正常に動いているら  
しい。

## 母数に関する仮説検定

● 母平均の検定〔 $t$ 検定〕(母分散が未知の場合)

演習2: 補習授業の効果測定

英語の補習を行った後の試験成績は上がったか？  
5%有意水準で効果を検定せよ。10名の対象学生に対する補習前後の得点差は下表

-1	3	4	5	3	0	7	4	2	-2
----	---	---	---	---	---	---	---	---	----

〔帰無仮説〕 $\mu = 0$

〔出展:『統計学入門』p.241〕

〔対立仮説〕 $\mu > 0$

$$T > t_{\alpha}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} > t_{0.05}(9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2.5 - 0}{2.65/\sqrt{10-1}} = 2.825 > 1.833 = t_{0.05}(9)$$

有意水準5%で  
帰無仮説は棄却  
される

試験成績は上昇した  
らしい(補習の効果  
はあったらしい)

## 母数に関する仮説検定

● 母平均の検定〔 $t$ 検定〕(母分散が未知の場合)

演習3: 今年の生徒は出来がよいか？

数学の定期試験で10人の採点を終えた所、平均が71点で昨年度(65.7点)より5.3点も良い！今年の生徒は出来がよいのだろうか？5%有意水準で検定せよ。

70	62	82	73	67	75	85	71	60	65
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

〔出展:『図解雑学 統計解析』p.202〕

〔帰無仮説〕 $\mu = 65.7$

〔対立仮説〕 $\mu > 65.7$

$$T > t_{\alpha}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} > t_{0.05}(9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{71.0 - 65.7}{7.694/\sqrt{10-1}} = 2.067 > 1.833 = t_{0.05}(9)$$

有意水準5%で  
帰無仮説は棄却  
される

今年の生徒は昨年  
度よりも出来が良い  
らしい。

## 母数に関する仮説検定

● 母分散の検定〔 $\chi^2$ 検定〕

例: 製品のばらつき検査

目標重量25kgの製品の重量のばらつきが大きいことがわかり修理した。修理後の製品を無作為抽出した結果が以下。修理前の分散が9kg<sup>2</sup>のとき、この製品は性能が向上したといえるか？

24	26	27	22	26
----	----	----	----	----

〔出展:『なるほど統計学』p.132〕

修理後は性能が向上したと考えられる

⇒ 分散は小さくなったはず

⇒ 片側(下側)検定

$$S^2 \rightarrow \chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$$

〔帰無仮説〕 $\sigma^2 = 9$

〔対立仮説〕 $\sigma^2 < 9$

確率変数 $\chi^2$ は  
自由度 $n-1$ の  
 $\chi^2$ 分布に従う

## 母数に関する仮説検定

● 母分散の検定〔 $\chi^2$ 検定〕

例: 製品のばらつき検査

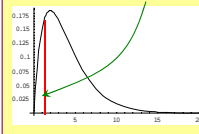
有意水準5%の棄却域を表す不等式

$$\chi^2 < 1.064$$

$$\Leftrightarrow \frac{nS^2}{\sigma^2} < 1.064$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \times 3.2}{9} = 1.78 < 1.064$$

$\chi^2$ 分布: 片側(下側)5%棄却域



有意水準5%で  
帰無仮説は棄却  
できない

この製造機械が修理  
後によくなったと結論  
できない。

## 母数に関する仮説検定

● 母分散の検定〔 $\chi^2$ 検定〕

演習: 小学校の知能テスト

ある小学校の入学時知能テストの結果は平均50、分散36だった。本年度入学児25名を無作為抽出したところ平均53、分散48だった。本年度入学児の揃いは例年と違うか？

〔出展:『統計学入門』p.242〕

〔帰無仮説〕 $\sigma^2 = 36$

〔対立仮説〕 $\sigma^2 \neq 36$

有意水準10%棄却域

$$\begin{cases} \chi^2 \leq \chi^2_{0.95}(24) = 13.848, \\ \chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(24) = 36.415 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{25 \times 48}{36} = 33.33 \dots$$

有意水準10%で  
帰無仮説は棄却  
できない

今年度入学児童が  
例年と違うとはいえ  
ない。

### Coffee Break!

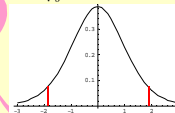
#### 両側検定と片側検定の使い分け

例: 母平均の両側検定

〔帰無仮説〕 $\mu = \mu_0$

〔対立仮説〕 $\mu \neq \mu_0$

《 $\mu_0$ は既知の値》



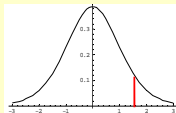
＜両側検定を実施する理由＞  
母数の値がある目標値と等しいかどうかを調べたい

例: 生産ラインの機械が正しく動いているか?

例: 母平均の(右)片側検定

〔帰無仮説〕 $\mu = \mu_0$

〔対立仮説〕 $\mu > \mu_0$



＜片側検定を実施する理由＞  
1.  $\mu < \mu_0$  が起こり得ない  
2.  $\mu > \mu_0$  を積極的に見いだせればそれでよい  
3. 母数の大きさが理論的・経験的に予測される

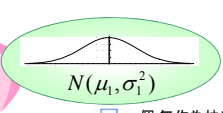
例: 補習後の成績は上がった? (上がったと積極的に知りたい)  
例: 今年の夏は寒い気がする。本当か?  
(寒いという経験から平均気温が低い傾向をみる)

### 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定
  - 2つの正規母集団について母平均の差の検定
    - 母分散が既知の場合 → Z検定
    - 母分散が未知だが等しい場合 → t検定
    - 母分散が未知で等しくない場合  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  → ウェルチの検定
- 母分散の比の検定
  - 2つの正規母集団について母分散の比の検定 → F検定

### 2標本検定 two-sample test

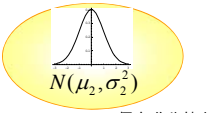
- 母平均の差の検定
  - 2つの正規母集団について母平均の差の検定



$N(\mu_1, \sigma_1^2)$

↓ m個 無作為抽出  $X_1, X_2, \dots, X_m$

標本平均:  $\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/m)$



$N(\mu_2, \sigma_2^2)$

↓ n個 無作為抽出  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

標本平均:  $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n)$

両側検定の場合

〔帰無仮説〕 $\mu_1 = \mu_2$  ← 2つの正規母集団の母平均に差がない

〔対立仮説〕 $\mu_1 \neq \mu_2$  ← 2つの正規母集団の母平均に差がある

片側検定の場合

〔帰無仮説〕 $\mu_1 = \mu_2$  ← 2つの正規母集団の母平均に差がない

〔対立仮説〕 $\mu_1 > \mu_2$  ← 2つの正規母集団の母平均に差がある (or  $\mu_1 < \mu_2$ )

### 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定
  - 2標本の標本平均の差の標本分布
    - $\begin{cases} \bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/m) \\ \bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 \\ V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{X}) + (-1)^2 V(\bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n} \end{cases}$
    - $\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
- この検定の例: 医薬の効果の検証
  - 患者を新薬を使った治療を行うグループ(処理群)とそれ以外(対照群)に分け、グループで結果に差があるかどうか(新薬の効果があるかどうか)を検定する。

### 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定 (母分散が既知のとき)
  - 標本平均の差の標本分布

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0,1)$$

Z検定

### 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定 (母分散が未知だが等しい  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ )
  - 標本平均の差の標本分布
    - $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\sigma^2)$
  - 合併分散 pooled variance
    - $s^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$
    - ただし、 $s_1^2, s_2^2$  は不偏推定量
      - $s_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$
      - $s_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2$
- 補足: 『合併分散は不偏推定量である』
  - $$\begin{aligned} \because E(s^2) &= E\left(\frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}\right) = \frac{(m-1)E(s_1^2) + (n-1)E(s_2^2)}{m+n-2} \\ &= \frac{(m-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2}{m+n-2} = \sigma^2 \end{aligned}$$



## 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定 (母分散が未知だが等しい  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ )

$$\begin{cases} Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{1/m + 1/n}} \sim N(0,1), \\ \chi^2 = \frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2) \end{cases} \quad (\text{ただし, } Z \text{ と } \chi^2 \text{ は独立})$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{Z}{\sqrt{\chi^2 / (m+n-2)}} \\ &= \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{1/m + 1/n}} \bigg/ \sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s \sqrt{1/m + 1/n}} \sim t_{\alpha}(m+n-2) \end{aligned}$$

t検定

## 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定 (母分散が未知だが等しい  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ )

例: 苗木の生長における2社の肥料の違い

ある苗木の生長について2社の肥料に違いがあるか?

A社の肥料	24.3	25.2	20.4	26.1	22.1	23.4	24.2	20.9	24.7	23.7	21.6	23.4	20.2
B社の肥料	21.3	19.4	22.3	17.2	18.3	20.3	21.4	23.6	21.1	21.3	20.3	19.5	

標本平均値 = A社の肥料 23.092    不偏分散値 = A社の肥料 3.579  
B社の肥料 20.500    B社の肥料 3.029

5%有意水準で両側検定

([帰無仮説]  $\mu_1 = \mu_2$  [対立仮説]  $\mu_1 \neq \mu_2$ )

$$s^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2} = \frac{12 \times 3.579 + 11 \times 3.029}{13+12-2} = 3.316$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s \sqrt{1/m + 1/n}} = \frac{4.500 - 5.389}{1.821 \sqrt{1/13 + 1/12}} = 3.556$$

t検定

$T = 3.556 > 2.069 = t_{0.025}(23)$  より, 仮説を棄却

## 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定 (母分散が未知で等しくない  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ )

標本平均の差の標本分布

- どのように工夫しても, 2つの母分散に拠らない統計量を作れない

- 標本平均の差の正確な分布を求められない

- 近似的に分布を求める[ウェルチの近似法]

$$\hat{T} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}} \sim t_{\alpha}(v^*)$$

$$\text{ただし, } v^* \text{ は } v = \frac{(s_1^2/m + s_2^2/n)^2}{\frac{(s_1^2/m)^2}{m-1} + \frac{(s_2^2/n)^2}{n-1}} \text{ に最も近い整数}$$

ウェルチの検定

## 2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定 (母分散が未知で等しくない  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ )

例: 2つの鉱山から採れる鉱石に含まれる物質の含有量

各鉱山から採れる鉱石の物質含有量に差があるか?

[出展: 『パソコンによるデータマイニング』 p.132]

第1鉱区	4.9	3.9	4.7	4.3	5.8	4.2	4.4	3.3	5.5	4.0
第2鉱区	5.2	5.0	5.3	6.9	5.0	4.9	4.4	6.5	5.3	

標本平均値 = 第1鉱区 4.500    不偏分散値 = 第1鉱区 0.564  
第2鉱区 5.389    第2鉱区 0.636

5%有意水準で両側検定

([帰無仮説]  $\mu_1 = \mu_2$  [対立仮説]  $\mu_1 \neq \mu_2$ )

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}} = \frac{4.500 - 5.389}{\sqrt{0.564/10 + 0.636/9}} = -2.493$$

ウェルチの検定

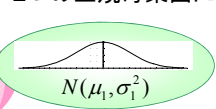
$$v = \frac{(s_1^2/m + s_2^2/n)^2}{\frac{(s_1^2/m)^2}{m-1} + \frac{(s_2^2/n)^2}{n-1}} = 16.517 \text{ より, 自由度17の } t \text{ 分布を考える}$$

$T = -2.493 < -2.110 = -t_{0.025}(17)$  より, 仮説を棄却

## 2標本検定 two-sample test

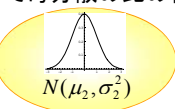
- 母分散の比の検定[F検定]

2つの正規母集団について母分散の比の検定



$m$ 個 無作為抽出  
 $X_1, X_2, \dots, X_m$

$$\chi_1^2 = \frac{mS_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1)$$



$n$ 個 無作為抽出  
 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

$$\chi_2^2 = \frac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

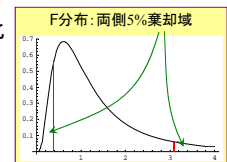
- 両側検定の場合
- [帰無仮説]  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ← 2つの正規母集団の母分散に差がない
  - [対立仮説]  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  ← 2つの正規母集団の母分散に差がある
- 片側検定の場合
- [帰無仮説]  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ← 2つの正規母集団の母分散に差がない
  - [対立仮説]  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  ← 2つの正規母集団の母分散に差がある (or  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ )

## 2標本検定 two-sample test

- 母分散の比の検定[F検定]

F分布とフィッシャーの分散比

$$\begin{cases} \chi_1^2 = \frac{mS_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1), \\ \chi_2^2 = \frac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1) \end{cases} \quad (\text{ただし } \chi_1^2 \text{ と } \chi_2^2 \text{ は独立})$$



$$\begin{aligned} F &= \frac{\chi_1^2/m-1}{\chi_2^2/n-1} = \frac{mS_1^2/(m-1)\sigma_1^2}{nS_2^2/(n-1)\sigma_2^2} \\ &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(m-1, n-1) \end{aligned}$$

フィッシャーの分散比

自由度(m-1, n-1)のF分布に従う

2標本検定 two-sample test

母分散の比の検定[F検定]

例題: 2つの工作機械の製品バラツキ検査

機械 I	100.46	100.35	100.36	100.48	100.39	100.72	100.42	100.68	100.86
機械 II	100.57	100.59	100.46	100.32	100.46	100.72	100.62		
	100.33	100.12	100.35	100.89	100.90	100.31	100.46	100.12	100.43
	100.88	100.28	100.08	100.42	100.11	100.16	100.71	100.26	100.18

不偏分散値 =  
機械 I 0.02475  
機械 II 0.07752

5%有意水準で両側検定

帰無仮説  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , 対立仮説  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1 \cdot \frac{0.02475}{0.07752} = 0.319$$
$$F_{0.975}(15,17) = \frac{1}{F_{0.025}(17,15)} = \frac{1}{2.723} = 0.367$$

より、仮説は棄却される

2標本検定 two-sample test

母分散の比の検定[F検定]

F分布表からのF値の求め方

F分布表は $\alpha$ が通常「0.1, 0.05, 0.25, 0.01, 0.005」のときの表のみ表示されていて、下側(左側)パーセント点は表示されていない。そこで...

$$F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_{\alpha}(n,m)}$$

であることを利用して求める。

例: 自由度(10,13)のF分布の下側(左側)5%点

$$F_{0.95}(10,13) = \frac{1}{F_{0.05}(13,10)} = \frac{1}{2.671} = 0.374$$

適合度検定 goodness-of-fit test

適合度の $\chi^2$ 検定 [Chi-square goodness-of-fit test]

仮定された理論上の確率分布に対し、標本から求められた度数が適合するかどうかを検証する。

例: さいころ投げ

さいころを300回投げると理論上は1~6の目が50回ずつ出る(さいころの目は一様分布となる)。実際に300回投げると...

賽の目	1	2	3	4	5	6	合計
観測度数	47	52	46	53	47	55	300

帰無仮説

さいころの目の出方に偏りがない(一様分布に従う)

対立仮説

さいころの目の出方に偏りがある(一様分布に従わない)

適合度検定:

母集団分布の従う確率分布について立てた帰無仮説を検証する

適合度検定 goodness-of-fit test

適合度の測定

例: さいころ投げ

帰無仮説

さいころの目の出方に偏りがない(一様分布に従う)

対立仮説

さいころの目の出方に偏りがある(一様分布に従わない)

賽の目	1	2	3	4	5	6	合計
$f_i$ 観測度数	47	52	46	53	47	55	300
$p_i$ 理論確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
$np_i$ 理論度数	50	50	50	50	50	50	300

K. Pearsonの適合度基準

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$$

(nが十分大きければ)自由度k-1の $\chi^2$ 分布に従う

$f_1, f_2, \dots, f_k$  はk個の確率変数だが、 $f_1 + f_2 + \dots + f_k \equiv n$ より、自由度は1つ減る

適合度検定 goodness-of-fit test

適合度の測定

例: さいころ投げ

有意水準5%棄却域を表す不等式

$$\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(k-1) = \chi_{0.05}^2(5)$$
$$\chi^2 = \frac{(47-50)^2}{50} + \frac{(52-50)^2}{50} + \dots + \frac{(55-50)^2}{50}$$
$$= 1.44 \times 11.070 = \chi_{0.05}^2(5)$$

p値: 0.92 > 0.05: 有意水準

より、棄却域にないので、帰無仮説は棄却できない

このさいころは、目の出方に偏りがない(一様分布に従う)といえるようだ

適合度検定 goodness-of-fit test

適合度の $\chi^2$ 検定 [Chi-square goodness-of-fit test]

例: さいころ投げ その2

帰無仮説は棄却されたけど、ほんとにこのさいころはいかさまじゃない? 奇数の目が出にくく、偶数の目が多く出ている気がするけど...

賽の目	1	2	3	4	5	6	合計
観測度数	47	52	46	53	47	55	300
奇数目	140	160					300
偶数目			150	150			300
観測度数	140	160	150	150			
理論確率	1/2	1/2					1
理論度数	150	150					300
差	-10	10					
自乗	100	100					200

$\chi^2$ 値

0.667 0.667 1.333

p値= 0.248213 < 0.05

### 適合度検定 goodness-of-fit test

● 適合度の $\chi^2$ 検定

例: メンデルの法則[えんどう豆の形質遺伝]

表現型	黄色・丸い	黄色・しわ	緑色・丸い	緑色・しわ	計
観測度数	315	101	108	32	556
理論確率	9/16	3/16	3/16	1/16	1
理論度数	312.75	104.25	104.25	34.75	556
度数差	2.25	-3.25	3.75	-2.75	

【出展:『統計学入門』p.245】

【帰無仮説】 えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合している  
【対立仮説】 えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合していない

$\chi^2 = 0.470 \times 7.815 = \chi^2_{0.05}(3)$  [p値: 0.93 > 0.05: 有意水準]

より, 5%有意水準の棄却域にないので, 帰無仮説は棄却できない

えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合しているようだ

### 独立性の検定 test of independence

● 独立性の $\chi^2$ 検定 [Chi-square test of independence]

2つの属性の間に関係があるかどうかを検証する

例: 支持政党に男女差があるか?

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	96	74	46	216
女性	54	46	44	144
合計	150	120	90	360

【出展:『図解雑学 統計解析』p.224】

支持政党に男女差があるか?

### 独立性の検定 test of independence

● 独立性の測定

例: 支持政党に男女差があるか?

【帰無仮説】 支持政党に男女差がない ⇒ ともに全体比率に等しい  
【対立仮説】 支持政党に男女差がある

観測度数	支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	96	74	46	216	
女性	54	46	44	144	
合計	150	120	90	360	

理論度数

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	90	72	54	216
女性	60	48	36	144
合計	150	120	90	360

この差を適合度検定

独立性の基準

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(f_{ij} - f_{i.}f_{.j}/n)^2}{f_{i.}f_{.j}/n}$$

(nが十分大きければ) 自由度(r-1)(c-1)の $\chi^2$ 分布に従う

### 独立性の検定 test of independence

● 独立性の測定

例: 支持政党に男女差があるか?

有意水準5%棄却域を表す不等式

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha}((r-1)(c-1))$$

$\chi^2 = \frac{(96-90)^2}{90} + \frac{(74-72)^2}{72} + \dots + \frac{(44-36)^2}{36}$   
 $= 4.102 \times 5.991 = \chi^2_{0.05}(2)$  [p値: 0.13 > 0.05: 有意水準]

より, 棄却域にないので, 帰無仮説は棄却できない

支持政党に男女間で差があるとはいえない

### 独立性の検定 test of independence

● 独立性の $\chi^2$ 検定

演習: 某工學部の期末試験成績: 代数と解析の成績に関係があるか? [出展:『統計学入門』p.248]

観測度数	代数\解析	A	B	C	合計
A	4	2	3	9	
B	8	4	6	18	
C	6	3	6	15	
合計	18	9	15	42	

理論度数

代数\解析	A	B	C	合計
A	3.86	1.93	3.21	9
B	7.71	3.86	6.43	18
C	6.43	3.21	5.38	15
合計	18	9	15	42

【帰無仮説】 代数と解析の成績に関係がない  
【対立仮説】 代数と解析の成績に関係がある

$\chi^2 = 0.19 \times 9.488 = \chi^2_{0.05}(4)$  [p値: 0.996 > 0.05: 有意水準]

より, 5%有意水準の棄却域にないので, 帰無仮説は棄却できない

代数と解析の成績には関係があるとはいえない

### 独立性の検定 test of independence

● 独立性の $\chi^2$ 検定

例題: 男性・女性各看護師に対する恋愛についてのアンケート (結果に男女差があるか?) [出展:『マンガでわかるナースの統計学』p.111]

観測度数	好きな異性を前にすると緊張する?	否定	肯定	計
男性看護師	20	34	54	
女性看護師	35	121	156	
計	55	155	210	

理論度数

好きな異性を前にすると緊張する?	否定	肯定	計
男性看護師	14.14	39.86	54
女性看護師	40.86	115.14	156
計	55	155	210

$\chi^2 = 4.42 \times 3.84 = \chi^2_{0.05}(1)$

$\chi^2$ 乗値が棄却域にあるので, 帰無仮説は棄却される (男女間に差がある→女性の方がより緊張する)

観測度数	異性にに対しては自分から話しかける?	否定	肯定	計
男性看護師	25	29	54	
女性看護師	109	47	156	
計	134	76	210	

理論度数

異性にに対しては自分から話しかける?	否定	肯定	計
男性看護師	34.46	19.54	54
女性看護師	99.54	56.46	156
計	134	76	210







$\chi^2 = 9.65 \times 3.84 = \chi^2_{0.05}(1)$

$\chi^2$ 乗値が棄却域にあるので, 帰無仮説は棄却される (男女間に差がある→女性の方が異性に話しかけない)



適合度検定・独立性の検定

演習1:サイコロの目の出方に偏りがあるか？ 有意水準5%で検定せよ.

賽の目						
観測度数	40	65	45			

演習2:コーヒーの嗜好に違いがあるか？ 有意水準5%で検定せよ.

モカ\キリマンジャロ	大好き	好き	嫌い	大嫌い	計
大好き	8	5	6	9	28
好き	8	5	9	5	27
嫌い	2	8	1	2	13
大嫌い	2	7	3	0	12
計	20	25	19	16	80

参考文献

- 東大教養学部統計学教室編 「統計学入門」 東大出版会 (1991)
- 東大教養学部統計学教室編 「自然科学の統計学」 東大出版会 (1992)
- 鈴木達三・高橋宏一 「標本抽出の計画と方法」 放送大学 (1991)
- 永田靖 「統計的方法のしくみ」 日科技連 (1996)
- 永田靖 「サンプルサイズの決め方」 朝倉書店 (2003)
- 村上雅人 「なるほど統計学」 海鳴社 (2002)
- 丹慶勝市 「図解雑学 統計解析」 ナツメ社 (2003)
- 高橋信<sup>[著]</sup>・トレンドプロ<sup>[マンガ]</sup> 「マンガでわかる統計学」 オーム社 (2004)
- 田久浩志<sup>[著]</sup>・高橋信<sup>[マンガ]</sup> 「マンガでわかるナースの統計学」 オーム社 (2006)