意思決定科学

線形計画法概観（復習）

情報学部
堀田敬介

2009/10/20,Tue.

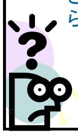
目次

- 線形計画法
  - 数理モデル
  - 図的解法，単体法による解法
  - 双対問題，双対定理

数理モデル

- 例題：効率的なアルバイト
  - 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェイター2つ．
  - 各仕事を行うとストレスがたまるが，各々5，3である．

  - 週末に5時間，アルバイトをする時間を取ることができる．
  - 健康のため，ストレス許容量は21である．
  - さて，この条件のもとで，最大のアルバイト料を得るにはどちらのアルバイトをどれだけすればいいか？



時給1200円 ≧ 時給900円 だから，5時間全てを清掃作業で！	でも…， ストレス：5×5＝25 ＞ 21（許容量）

数理モデル

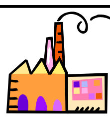
- 解説：効率的なアルバイト
  - 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェイター2つ．
  - 各仕事を行うとストレスがたまるが，各々5，3である．
  - 週末に5時間，アルバイトをする時間を取ることができる．
  - 健康のため，ストレス許容量は21である．

定式化

$$\begin{aligned} \text{max.}\ & 1200x_1 + 900x_2 & \leftarrow \text{アルバイト代最大化} \\ \text{s. t.}\ & x_1 + x_2 \leqq 5 & \leftarrow \text{アルバイト時間制約} \\ & 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 & \leftarrow \text{許容ストレス制約} \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 & \leftarrow \text{アルバイト時間は非負} \end{aligned}$$

数理モデル
線形計画法，LP; Linear Program

演習1：数理モデルによる定式化



- 最適生産量問題
  - ある工場では3つの製品A, B, Cを作っている．
    - A，B，Cを1単位作るのに，材料Pが其々*6kg*，*2kg*，*3kg*，材料Qが*3kg*，*2kg*，*5kg*，材料Rが*4l, 3l, 2l*，材料Sが*5g*，*1g*，*9g*必要．
    - この工場で使用できる材料P，Q，R，Sの量は，其々*2500kg*，*3000kg*，*1800l*，*5000g*である．
    - A，B，Cを1単位売って得られる利益が各々7万円，4万円，5万円．
  - 利益最大となる，A，B，Cの生産単位はいくらか？
（ただし，小数以下の生産単位も許す）

数理モデルで定式化せよ．

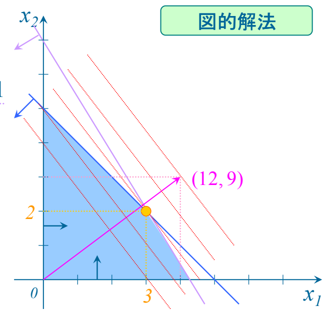
数理モデル

- 解説：どう解くか？ ーその1ー

図的解法が使えるのは2次元（頑張って3次元）まで．それ以上の高次元ではどうするの？

図的解法

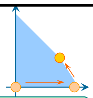
$$\begin{aligned} \text{max.}\ & 12x_1 + 9x_2 \\ \text{s. t.}\ & x_1 + x_2 \leqq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$



最適解：$(x_1, x_2) = (3, 2)$
{ウェイターを3時間
清掃作業を2時間

最適値：*¥5,400*

数理モデル



- 解説：どう解くか？ －その２－

$$\begin{aligned} \max.\ & 4x_1 + 3x_2 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 \leqq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

⇩

$$\begin{aligned} \max.\ & z \\ s.t.\ & z - 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ & x_1 + x_2 + s_1 = 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 + s_2 = 21 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max.\ & z \\ s.t.\ & z + 3/2 s_1 + 10/7 s_2 = 18 \\ & x_2 + 5/2 s_1 - 1/2 s_2 = 2 \\ & x_1 - 3/2 s_1 + 1/2 s_2 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

単体法 (*simplex method*)

reduced cost　nonbasic variable　ratio test　basic variable　pivot　simplex tableau

	z	x1	x2	s1	s2	rhs	x1
Obj	1	−4	−3	0	0	0	
s1	0	1	1	1	0	5	5/1
s2	0	5	3	0	1	21	21/5

⇩

	z	x1	x2	s1	s2	rhs	x2
Obj	1	0	− 3/5	0	1	84/5	
s1	0	0	2/5	1	− 1/5	4/5	2/1
x1	0	1	3/5	0	1/5	21/5	7/1

⇩

	z	x1	x2	s1	s2	rhs
Obj	1	0	0	3/2	10/7	18
x2	0	0	1	5/2	− 1/2	2
x1	0	1	0	−3/2	1/2	3

数理モデル

- 単体法の考え方

最適解（an optimal solution）
$x^*=(6,0,0,0)$
最適値（the optimal value）
12

$$\begin{aligned} \max.\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ s.t.\ & 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4$$

⇩

被約費用（reduced cost）

$$\begin{aligned} \max.\ & z = 12 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 \\ s.t.\ & x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0 \end{aligned}$$

辞書（dictionary）

最適辞書
（an optimal dictionary）

基底変数（basic variable）　非基底変数（non-basic variable）

基底解（an basic solution）
$x=(6,0,0,0)$

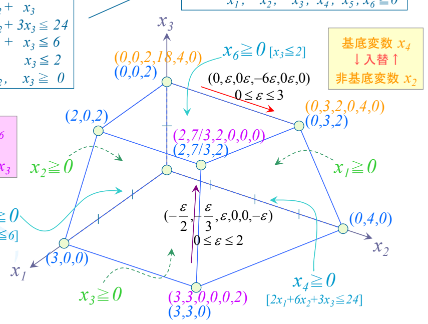
実行可能基底解（an feasible basic solution）
$x \geqq 0$ を満たす基底解

数理モデル

- 単体法の幾何学的意味

$$\begin{aligned} \max.\ & x_1 + x_2 + x_3 \\ s.t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqq 24 \\ & 2x_1 + x_3 \leqq 6 \\ & x_3 \leqq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max.\ & x_1 + x_2 + x_3 \\ s.t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\ & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\ & x_3 + x_6 = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqq 0 \end{aligned}$$



※この例題では
全端点で非退化

演習２：単体法と幾何学的意味

- 以下の問題を単体法で解いてみよう

$$\begin{aligned} \max.\ & x_1 + x_2 + x_3 \\ s.t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqq 24 \\ & 2x_1 + x_3 \leqq 6 \\ & x_3 \leqq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max.\ & z = x_1 + x_2 + x_3 \\ s.t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\ & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\ & x_3 + x_6 = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqq 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs	ratio test
Obj	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	
x_4	0	2	6	3	1	0	0	24	24/2
x_5	0	2	0	1	0	1	0	6	6/2
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2	2/0

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs	ratio test
Obj	1	0	-1	-1/2	0	1/2	0	3	
x_4	0	0	6	2	1	-1	0	18	18/6
x_1	0	1	0	1/2	0	1/2	0	3	3/0
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2	2/0

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6;\ z)$

$(0,\ 0,\ 0,\ 24,\ 6,\ 2;\ 0)$

非基底変数　基底変数

$(3,\ 0,\ 0,\ 18,\ 0,\ 2;\ 3)$

非基底変数　基底変数

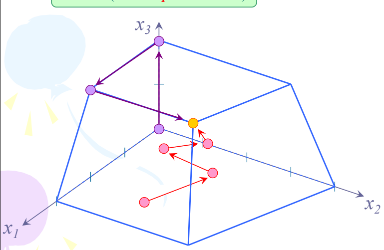
$(3,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2;\ 6)$

参考：数理モデル

- 線形計画問題を解く2つの解法

単体法 (*simplex method*)

内点法 (*interior point method*)



参考：主双対内点法

主・双対問題（行列表記）

$$\begin{aligned} \max.\ & \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min.\ & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^t\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A & O & O \\ O & A^t & I \\ S & O & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

Jacobi行列

Newton方向ベクトル

$$d_j = \mu - x_j s_j \quad (j=1,\cdots,n)$$

双対問題

- 主問題（P） *Primal*
- 双対問題（D） *Dual*

$$\begin{aligned} \max.\ & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \leqq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min.\ & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 + 5y_2 \geqq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geqq 3 \\ & y_1,\ y_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

対称型の主・双対問題

$$\begin{aligned} \max.\ & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 = 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 = 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min.\ & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 + 5y_2 \geqq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geqq 3 \end{aligned}$$

標準型の主・双対問題

一般的には…

双対問題

- 双対問題の考え方

$$\text{(P)}\ \left|\begin{array}{lrl} \max. & 15x_1+13x_2 & \\ \text{s. t.} & x_1+3x_2 \leqq 5 & \dots ① \\ & 3x_1+x_2 \leqq 7 & \dots ② \\ & 11x_1+x_2 \leqq 17 & \dots ③ \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 & \end{array}\right. \qquad \text{(D)}\ \left|\begin{array}{ll} \min. & 5y_1+7y_2+17y_3 \\ \text{s. t.} & y_1+3y_2+11y_3 \geqq 15 \\ & 3y_1+y_2+y_3 \geqq 13 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \geqq 0 \end{array}\right.$$

①×3 +②×4 +③×0

$15x_1+13x_2 \leqq 43$ ⇨ 目的関数値は43以下！

①×4 +②×0 +③×1

$15x_1+13x_2 \leqq 37$ ⇨ 目的関数値は37以下！

①× y_1 +②× y_2 +③× y_3　※) $y_1,y_2,y_3 \geqq 0$

$$(x_1+3x_2)y_1+(3x_1+x_2)y_2+(11x_1+x_2)y_3 \leqq 5y_1+7y_2+17y_3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(y_1+3y_2+11y_3)}_{\geqq\ 15}x_1+\underbrace{(3y_1+y_2+y_3)}_{\geqq\ 13}x_2 \leqq 5y_1+7y_2+17y_3$$

※) $x_1,x_2 \geqq 0$　$15x_1 + 13x_2$　↓ minimize

演習3：主問題と双対問題

- 以下の線形計画問題に対する双対問題を示せ

$$\text{(P)}\ \left|\begin{array}{ll} \max. & 5x_1+2x_2+4x_3 \\ \text{s. t.} & 2x_1+x_2-3x_3 \leqq 5 \\ & -4x_1+3x_2-2x_3 \geqq -2 \\ & 3x_1-2x_2+x_3 \leqq 4 \\ & x_1+4x_2+5x_3 \leqq 7 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0 \end{array}\right.$$

双対定理

- **弱双対定理**

任意の実行可能解 (x_1,x_2), (y_1,y_2) について,

$$4x_1+3x_2 \leqq 5y_1+21y_2$$

が成り立つ

$$\text{(P)}\ \left|\begin{array}{ll} \max. & 4x_1+3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1+x_2 \leqq 5 \\ & 5x_1+3x_2 \leqq 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(D)}\ \left|\begin{array}{ll} \min. & 5y_1+21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1+5y_2 \geqq 4 \\ & y_1+3y_2 \geqq 3 \\ & y_1,\ y_2 \geqq 0 \end{array}\right.$$

- 証明

$$4x_1+3x_2 \le (y_1+5y_2)x_1+(y_1+3y_2)x_2$$
$$=(x_1+x_2)y_1+(5x_1+3x_2)y_2 \le 5y_1+21y_2$$

一般的には…

双対定理

- **双対定理**

主問題(P)に最適解 (x_1^*, x_2^*) が存在するならば，双対問題(D)にも最適解 (y_1^*, y_2^*) が存在し，最適値は等しい，即ち，

$$4x_1^*+3x_2^* = 5y_1^*+21y_2^*$$

が成り立つ

$$\text{(P)}\ \left|\begin{array}{ll} \max. & 4x_1+3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1+x_2 \leqq 5 \\ & 5x_1+3x_2 \leqq 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(D)}\ \left|\begin{array}{ll} \min. & 5y_1+21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1+5y_2 \geqq 4 \\ & y_1+3y_2 \geqq 3 \\ & y_1,\ y_2 \geqq 0 \end{array}\right.$$

- 証明略

一般的には…

双対定理

- **相補性定理**

主問題(P)と双対問題(D)の実行可能解 (x_1,x_2), (y_1,y_2) が (P), (D)の最適解であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} x_1(y_1+5y_2-4)=0 \\ x_2(y_1+3y_2-3)=0 \end{cases}, \begin{cases} y_1(5-x_1+x_2)=0 \\ y_2(21-5x_1+3x_2)=0 \end{cases}$$

が成立することである.

$$\text{(P)}\ \left|\begin{array}{ll} \max. & 4x_1+3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1+x_2 \leqq 5 \\ & 5x_1+3x_2 \leqq 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(D)}\ \left|\begin{array}{ll} \min. & 5y_1+21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1+5y_2 \geqq 4 \\ & y_1+3y_2 \geqq 3 \\ & y_1,\ y_2 \geqq 0 \end{array}\right.$$

- 証明略

一般的には…

双対理論からの解法の考察

(i)～(iii)全てを満たす (x_1^*,x_2^*), (y_1^*,y_2^*) が(主・双対)**最適解**

- (対称型の)主・双対線形計画問題を解くことは

(i) $\begin{cases} x_1+x_2 \leqq 5 \\ 5x_1+3x_2 \leqq 21 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geqq 0$　主実行可能条件

(ii) $\begin{cases} y_1+5y_2 \geqq 4 \\ y_1+3y_2 \geqq 3 \end{cases}$ $y_1, y_2 \geqq 0$　双対実行可能条件

(iii) $\begin{cases} x_1(y_1+5y_2-4)=0 \\ x_2(y_1+3y_2-3)=0 \end{cases}, \begin{cases} y_1(5-x_1+x_2)=0 \\ y_2(21-5x_1+3x_2)=0 \end{cases}$　相補性条件

を満たす解 (x_1,x_2), (y_1,y_2) を見つけること.

(主)単体法 (*simplex method*)	(i), (iii)を満たしつつ, (ii)の成立で終了
双対単体法 (*dual simplex method*)	(ii), (iii)を満たしつつ, (i)の成立で終了
(主双対)内点法 (*primal-dual IPM*)	(i), (ii)を満たしつつ, (iii)の成立で終了

注：反復中(i), (ii)を満たさないなどバリエーションがある

一般的には…

演習4：

- 双対定理
  - 以下のLPについて，双対問題を作成し，弱双対定理が成り立っていることを確認せよ
  - また，単体法により最適解を求め，双対定理，相補性定理が成り立っていることを確認せよ

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{array}{ll}
\text{max.} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
\text{s. t.} & 4x_1 + 2x_2 - x_3 \leqq 8 \\
 & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leqq 10 \\
 & x_1,\quad x_2,\quad x_3 \geqq 0
\end{array}
$$

参考文献

- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 反町洋一「線形計画法の実際」産業図書(1992)
- H.P.Williams「数理計画モデルの作成法」産業図書(1995)
- 大山達雄「最適化モデル分析」日科技連(1993)
- 福島雅夫「数理計画入門」朝倉書店(1996)
- 田村明久・村松正和「最適化法」共立出版(2002)
- 藤田宏・今野浩・田邉國士「最適化法」岩波書店(1994)
- 小島正和・土谷隆・水野眞治・矢部博「内点法」朝倉書店(2001)
- 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- 猿渡康文「マネジメント・エンジニアリングのための数学」数理工学社(2006)

演習1解答：最適生産量問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & 7x_1+4x_2+5x_3 \\
\text{s. t.} & 6x_1+2x_2+3x_3 \leqq 2500 \\
 & 3x_1+2x_2+5x_3 \leqq 3000 \\
 & 4x_1+3x_2+2x_3 \leqq 1800 \\
 & 5x_1+\ x_2+9x_3 \leqq 5000 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{array}
$$

	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	rhs	
Obj	1	−7	−4	−5	0	0	0	0	0	ratio test
s1	0	6	2	3	1	0	0	0	2500	416.6667
s2	0	3	2	5	0	1	0	0	3000	1000
s3	0	4	3	2	0	0	1	0	1800	450
s4	0	5	1	9	0	0	0	1	5000	1000

⇩

	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	rhs	
Obj	1	0	−2	−2	1.2	0	0	0	2917	ratio test
x1	0	1	0.3	0.5	0.2	0	0	0	416.7	1250
s2	0	0	1	3.5	−1	1	0	0	1750	1750
s3	0	0	1.7	0	−1	0	1	0	133.3	80
s4	0	0	−1	6.5	−1	0	0	1	2917	−4375

⇩

	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	rhs	
Obj	1	0	0	−2	0.5	0	1	0	3050	ratio test
x1	0	1	0	0.5	0.3	0	−0	0	390	780
s2	0	0	0	3.5	−0	1	−1	0	1670	477.1429
x2	0	0	1	0	−0	0	0.6	0	80	#DIV/0!
s4	0	0	0	6.5	−1	0	0.4	1	2970	456.9231

⇩

	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	rhs	
Obj	1	0	0	0	0.2	0	1.1	0.2	3735	ratio test
x1	0	1	0	0	0.4	0	−0	−0	161.5	
s2	0	0	0	0	0.5	1	−1	−1	70.77	
x2	0	0	1	0	−0	0	0.6	0	80	
x3	0	0	0	1	−0	0	0.1	0.2	456.9	

双対問題：一般的な書式

- 主問題(P) Primal

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & c_1x_1+\ldots+c_nx_n \\
\text{s. t.} & a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \leqq b_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n \leqq b_m \\
 & \underbrace{x_1,\ \ldots,\ x_n}_{n} \geqq 0
\end{array}
\Bigg\}\, m
$$

目的関数：最大化
制約式 ： m 本
変　数 ： n 個

- 双対問題(D) Dual

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & b_1y_1+\ldots+b_my_m \\
\text{s. t.} & a_{11}y_1+\ldots+a_{m1}y_m \geqq c_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{1n}y_1+\ldots+a_{mn}y_m \geqq c_n \\
 & \underbrace{y_1,\ \ldots,\ y_m}_{m} \geqq 0
\end{array}
\Bigg\}\, n
$$

目的関数：最小化
制約式 ： n 本
変　数 ： m 個

対称型の主・双対問題

双対問題：行列表記

- 主問題(P) Primal

$$
\begin{array}{ll}
\max. & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,\cdots,m) \\
 & x_j \ge 0 \quad (j=1,\cdots,n)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

- 双対問題(D) Dual

$$
\begin{array}{ll}
\min. & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
s.t. & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j=1,\cdots,n) \\
 & y_i \ge 0 \quad (i=1,\cdots,m)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\
\text{s.t.} & A^t\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

対称型の主・双対問題

双対定理

- 弱双対定理

任意の実行可能解 $x_{i\,(i=1,\ldots,n)}$, $y_{j\,(j=1,\ldots,m)}$ について，

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max. & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (\mathrm{P}) \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,\cdots,m) \\
 & x_j \ge 0 \quad (j=1,\cdots,n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\min. & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (\mathrm{D}) \\
s.t. & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j=1,\cdots,n) \\
 & y_i \ge 0 \quad (i=1,\cdots,m)
\end{array}
$$

- 証明

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j \qquad (\because x_j \ge 0,\ \forall j) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i
\end{aligned}
$$

双対定理

- <u>双対定理</u>

  主問題(P)に最適解 x_i^* $(i=1,\ldots,n)$，が存在するならば，双対問題(D)にも最適解 y_j^* $(j=1,\ldots,m)$ が存在し，最適値は等しい，即ち，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

  が成り立つ．

$$\begin{aligned} \max.\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{(P)} \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i=1,\cdots,m) \\ & x_j \ge 0 \ (j=1,\cdots,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min.\ & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad \text{(D)} \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \ (j=1,\cdots,n) \\ & y_i \ge 0 \ (i=1,\cdots,m) \end{aligned}$$

- 証明略

双対定理

- <u>相補性定理</u>

  主問題(P)と双対問題(D)の実行可能解 x_i $(i=1,\ldots,n)$，y_j $(j=1,\ldots,m)$ が，(P)(D)の最適解であるための必要十分条件は，

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right) = 0 \quad (i=1,\cdots,m)$$

$$y_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = 0 \quad (j=1,\cdots,n)$$

  が成立することである．

$$\begin{aligned} \max.\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{(P)} \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i=1,\cdots,m) \\ & x_j \ge 0 \ (j=1,\cdots,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min.\ & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad \text{(D)} \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \ (j=1,\cdots,n) \\ & y_i \ge 0 \ (i=1,\cdots,m) \end{aligned}$$

- 証明略

双対理論からの解法の考察

(i)〜(iii)全てを満たす x_i $(i=1,\ldots,n)$，y_j $(j=1,\ldots,m)$ が(主・双対)最適解

- (対称型の)主・双対線形計画問題を解くことは

  (i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i=1,\cdots,m),\ \ x_j \ge 0 \ (j=1,\cdots,n)$ 主実行可能条件

  (ii) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \ (j=1,\cdots,n),\ \ y_i \ge 0 \ (i=1,\cdots,m)$ 双対実行可能条件

  (iii) $\begin{cases} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right) = 0 & (i=1,\cdots,m) \\ y_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = 0 & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$ 相補性条件

  を満たす x_i $(i=1,\ldots,n)$，y_j $(j=1,\ldots,m)$ を見つけること．

(主)単体法 *(simplex method)*	(i)，(iii)を満たしつつ，(ii)の成立で終了
双対単体法 *(dual simplex method)*	(ii)，(iii)を満たしつつ，(i)の成立で終了
(主双対)内点法 *(primal-dual IPM)*	(i)，(ii)を満たしつつ，(iii)の成立で終了

注：反復中(i)，(ii)を満たさないなどバリエーションがある