意思決定科学：ゲーム理論１

情報学部　堀田敬介

2009/11/14,Sat.～

Contents

ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ（丸々1個！）を買ってきた．2人に均等に与えたいのだが，2人は自分の分が相手より小さいと不満を言い，けんかになる．

どうしたらいいだろう?

仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

ケーキを仲良く

One divides, the other chooses.

- You Cut, I Choose！
  - Bobにケーキを切らせ，Carolにケーキを選ばせる

ただし，これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」！

- 解は…
  - Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

ケーキを仲良く

- 解の持つ2つの性質
  - proportionality (An allocation is proportional.)
    - Each thinks he or she received a portion that has size or value of at least 1/n.
  - envy-freeness (An allocation is envy-free.)
    - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, does not envy any other player.

プレイヤーが二人の場合は等価

ケーキを仲良く

2人 非協力 零和ゲーム

- 2人の戦略
  - Bob:「均等に切る」「不均等に切る」
  - Carol:「大きいほうを選ぶ」「小さいほうを選ぶ」
- 2人の利得表
  - Bobの利得表

プレイヤーは2人

自分の利得が相手の損失(零和)

協力はせずに，自分の利得最大（非協力的）

Bob＼Carol	大cakeとる	小cakeとる
均等に切る	½ cake	½ cake
不均等に切る	smaller cake	larger cake

- Carolの利得表

Bob＼Carol	大cakeとる	小cakeとる
均等に切る	½ cake	½ cake
不均等に切る	larger cake	smaller cake

ケーキを仲良く

- ミニマックス原理
  - Bobの利得表(=Carolの損失表)

Bob＼Carol	1/2以上	1/2以下	Min	Max
不均等	小	大	小	1/2
均等	1/2	1/2	1/2	
Max	1/2	大		
Min	1/2			

Bob ：マキシミン戦略： 最大(**Max**) 最小保証利得(**Min**)
Carol:ミニマックス戦略:最小(**Min**) 最大保証損失(**Max**)

ケーキを仲良く（3人いたら？）

H. Steinhaus, 1948

- The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)
  1. Bob がケーキを1/3(とBobが思う通り)に切る
  2. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘
     (少なくとも1つは acceptable cake があるという条件で)
  3. Ted も Carol と同様のことを行う.
  4. Case1: Carol(or Ted)が2個以上acceptable cake がある
     Ted → Carol → Bob の順にケーキを取る
  5. Case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個
     Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて，残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う.

call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least 1/3 of the cake.

ケーキを仲良く（3人いたら？）

- The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes)
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - Bobはちょうど1/3（とBobが思う）piece に切る
    - Carol, Ted は acceptable cake を取る
  - envy-free ではない
    - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが，Carol は Ted を妬む可能性がある．（Tedが，彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので）
    - case2：Carol, Ted は誰も妬まないが，Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある．（Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合，2人のいずれかが1/3以上（とBobが思う）cake を得るので）

ケーキを仲良く（n人いたら？）

H.W. Kuhn, 1967

- Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes) を n人版に拡張

  （Frobenius & König の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム）

  （4人版は Steinhaus も気づいていたらしい）

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- The Banach-Knaster last-diminisher procedure

  （Steinhaus が 1948年に2人（彼の学生，ポーランド人）のアイデアを論文の形で発表）

- ……

ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- The Banach-Knaster last-diminisher procedure (n players)
  - The partners being ranged A,B,C,…,N. A cuts from the cake an arbitrary part. B has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off. Whatever he does, C has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice, and so on up to N. The rule obliges the ``last-diminisher" to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of , the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake. After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder. (from ``Fair Division", p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

- The last-dimisher procedure
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - 切るプレイヤーがちょうど1/nと考えるpiece に切ること
  - envy-freeではない
    - 理由：例えば，ゲームを先に抜けたプレイヤーAが，ある段階で切られたケーキが1/nより大きい（とAが思う）ときでもそれを阻止できない．結果として1/nより大きいケーキが誰か（B）に行く（とAが思う）ので，AはBを妬む．

ゲーム理論とは何か？

- ゲーム的状況　game situations
  - 複数の意思決定主体（プレイヤー）が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ゲーム理論　game theory
  - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

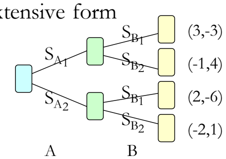
John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日（火）取得の情報

ゲーム理論とは何か？

- プレイヤー　player
  - 意思決定し，行動する主体．（2人，3人，…，n人，…，∞）
    - 例：個人，複数の個人から成る組織，政党，国家，…
- 戦略　strategy
  - プレイヤーが取りうる行動．（有限，無限）
- 利得と利得関数　payoff
  - 各プレイヤーの戦略決定後，ゲームは終了し，結果が出る．結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値．利得 payoff，効用 utility．
- 協力の可能性
  - 各プレイヤーは自由に自己の判断で行動．
    - 協力ゲーム：十分にコミュニケーション可能で，合意の上で戦略を決定．
    - 非協力ゲーム：各自の独立な判断により，戦略を決定．

ゲーム理論とは何か？

- ゲームの表現形式
  - 展開形　extensive form



  - 戦略形　strategic form，標準形　normal form

A＼B	S_{B_1}	S_{B_2}
S_{A_1}	3	1
S_{A_2}	-4	6

ゲーム理論とは何か？

- ゲームの定義（戦略形n人ゲーム）

$$G=(N,\{S_i\}_{i\in N},\{f_i\}_{i\in N})$$

$$\begin{cases} N=\{1,2,\cdots,n\} & \text{:プレイヤーの集合} \\ S_i=\{s_{i1},s_{i2},\cdots,s_{im}\} & \text{:プレイヤー}i\text{の戦略集合} \\ f_i : S_1\times\cdots\times S_n \to R & \text{:プレイヤー}i\text{の利得関数} \end{cases}$$

各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し，
Gは全てのプレイヤーの共有知識とする．

ゲーム理論とは何か？

- 非協力ゲームと協力ゲーム
  - 各プレイヤーの戦略決定における前提

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{im}\} \ (i \in N)$$

1. プレイヤー間には，各プレイヤーがとるべき戦略について，強制力のある取り決めは存在しない．

拘束的合意が成立しない → 非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に，とるべき戦略についての合意が成り立ち，それに基づいて戦略決定する．

拘束的合意が成立 → 協力ゲーム

2人非協力零和ゲーム

- ゲームのルール
  - プレイヤーの数は2人 → $N = \{1,2\}$
  - 各プレイヤーは，独立に戦略を決定（非協力）
  - プレイヤーの利得の和は，常に零（零和）

$$\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, \ f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$$

  - ゲームは1回限り
  - 各プレイヤーは戦略決定時に，他のプレイヤーがどの戦略をとるかは知らない
  - 各プレイヤーの取りうる戦略は有限

$$\begin{cases} S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \cdots, s_{1m}\} \\ S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \cdots, s_{2n}\} \end{cases}$$

2人非協力零和ゲーム

- <u>利得行列　payoff matrix</u>
  - 零和ゲーム，即ち，　$\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2, f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$

    なので，　$a_{ij} = f_1(s_i, s_j) = -f_2(s_i, s_j)$

    とおくと，取りうる戦略と利得の関係を行列Aで表せる

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

利得行列

2人非協力零和ゲーム

- Example1：
  - A君とBさんがトランプで簡単なゲームをしている．双方とも予め2枚のカードを持っており，1回だけ1枚のカードを出し，カードの目の差を利得としてもらえるというゲームである．さて，A君は「スペード の4」「ハートの7」の2枚，Bさん「クラブの2」「ダイヤの10」の2枚のカードを持っていることが互いに分かっている時，2人はどのようにカードを出すべきか？

A君の利得表

A＼B	クラブの2	ダイヤの10
スペードの4	2	-6
ハートの7	5	-3

Bさんの利得表

A＼B	クラブの2	ダイヤの10
スペードの4	-2	6
ハートの7	-5	3

ゲームの解：（ハートの7，ダイヤの10）

ゲームの値

2人非協力零和ゲーム

- Example2：
  - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理　minimax principle
  - Example2でプレイヤーAの思考　　最大化プレイヤー
    - 戦略s_{A_1}を取ったときの最悪の事態は
      min(-2, 4, -1) = -2（プレイヤーBが戦略s_{B_1}を取る）
    - 戦略s_{A_2}を取ったときの最悪の事態は
      min(2, 2, 1) = 1　（プレイヤーBが戦略s_{B_3}を取る）
    - 戦略s_{A_3}を取ったときの最悪の事態は
      min(4, -3, 0) = -3（プレイヤーBが戦略s_{B_2}を取る）

⇒ 戦略s_{A_2}を取る（最悪でも利得1が保証される）

もっと良い利得を得ることができるのか？

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理　minimax principle
  - Example2でプレイヤーAがBの立場で思考
    - Bが戦略s_{B_1}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_3}を取る
      max(-2, 2, 4) = 4
    - Bが戦略s_{B_2}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_1}を取る
      max(4, 2, -3) = 4
    - Bが戦略s_{B_3}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_2}を取る
      max(-1, 1, 0) = 1

⇒ 戦略s_{B_3}を取る（最悪でも損失1で済む）

Aは戦略s_{A_2}を取るとき，利得1を得られ，
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる．

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス原理
  - Example2：

保証水準 security level

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-2	4	-1	-2	
s_{A_2}	2	2	1	1	1
s_{A_3}	4	-3	0	-3	
max	4	4	1		
min	1				

マキシミン値
maximin value
$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

保証水準
security level

マキシミン原理
maximin principle
〔最大化プレイヤーの行動原理〕

ミニマックス値
minimax value
$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス原理
minimax principle
〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$$v_1 = v_2$$

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- 均衡点とゲームの値
  - 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると，どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！

何らかの意味での**均衡**に到達

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$$

2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

(s_{A_2} *, s_{B_3} *)：ゲームの均衡点 equilibrium point

演習1：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？ (1)，(2)それぞれのゲームについて考えよ

(1)

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	1	-1
s_{A_2}	-1	0	2
s_{A_3}	5	2	3

(2)

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	5	6	4
s_{A_2}	1	8	2
s_{A_3}	7	2	3

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：
    - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-4	2	0	-4	1
s_{A_2}	4	3	1	1	
s_{A_3}	1	-3	2	-3	
max	4	3	2		
min	2				

マキシミン戦略

$$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - **Proposition1**

    利得行列A=[a_{ij}]が与えられた時，以下が成り立つ

    $$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

⇩

いかなる場合に均衡点が存在し，
ゲームが厳密に確定的であるか？

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - 鞍点 saddle point
    - 行列A=[a_{ij}]において，任意の i, j に対し，

      $$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}$$

      が成り立つとき，(i_0, j_0)をこの行列の鞍点といい，$a_{i_0j_0}$ を鞍点値という．

$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0}$

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}$

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - **Theorem1**
    - (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は，その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること．またこのとき，鞍点が均衡点．
  - 最適戦略　optimal strategy
    - 均衡点(i^*, j^*)は鞍点なので，プレイヤーAが戦略 i^* を用いると，プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ，また，Bが戦略 j^* を取る限り，Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない．

⇨ 戦略 i^* がAの最適戦略

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - **Theorem2**
    - 厳密に確定的な零和ゲームにおいて，均衡点が複数ある場合，各均衡点の値は等しい．また，(i^*, j^*), (i_0, j_0) が均衡点ならば，(i^*, j_0), (i_0, j^*)も均衡点である．

均衡戦略は交換可能

$$\begin{array}{c|cc} & j_0 & j^* \\ \hline i_0 & a_{i_0j_0} & a_{i_0j^*} \\ i^* & a_{i^*j_0} & a_{i^*j^*} \end{array}$$

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

⇨ 主体的な賭，最適な賭の確率

⇨ 期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

$$p_i \geq 0, (i=1,2,3)$$
$$p_1+p_2+p_3=1$$
$$q_j \geq 0, (j=1,2,3)$$
$$q_1+q_2+q_3=1$$

プレイヤーBが各戦略をとったときの，プレイヤーAの期待効用

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -4p_1+4p_2+p_3 \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = \ \ 2p_1+3p_2-3p_3 \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = \qquad\quad p_2+2p_3 \end{cases}$$

よって，Bが各戦略を(q_1,q_2,q_3)の確率でとったときの，Aの期待効用

$$E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3$$

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

純粋戦略 pure strategy

混合戦略 mixed strategy

プレイヤーAが各戦略をとったときの，プレイヤーBの期待効用

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = -4q_1+2q_2 \\ E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = \ \ 4q_1+3q_2+q_3 \\ E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q}) = \ \ \ \ q_1-3q_2+2q_3 \end{cases}$$

Aが各戦略を(p_1,p_2,p_3)の確率でとったときの，Bの期待効用

$$E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3$$

まとめると，プレイヤーA, Bがそれぞれ確率(p_1,p_2,p_3), (q_1,q_2,q_3)で各戦略をとったとき，各プレイヤーの期待効用は以下のようになる．

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3 \end{cases}$$

また，このとき明らかに，以下が成り立つ．

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

プレイヤーAは期待効用最大化！
プレイヤーBは期待損失最小化！

2人非協力零和ゲーム

- 支配戦略
  - Example3：

	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
被支配戦略	s_{A_1}	-4	2	0
支配戦略	s_{A_2}	4	3	1
	s_{A_3}	1	-3	2

支配する dominate

戦略の支配 domination of strategies
プレイヤー i の戦略 h, k について，
戦略 h が戦略 k を支配するとは，
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して，

$$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$$

が成立すること．

- ＝だと「同等」
- ≧かつ≠だと「弱支配」

補足）通常は，被弱支配戦略は除去しない→　共有地の悲劇

被支配戦略除去の原理
「支配される戦略は用いない」

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	4 >	3	1
s_{A_3}	1 >	-3	2

⇨

A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	3	1
s_{A_3}	-3	2

補足：被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ **ゲームは支配可解 dominance solvable**

2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

- 最適混合戦略
  - Example3：

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= E(\boldsymbol{p},s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p},s_{B_3})q_3 \\
&= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\
&= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2)
\end{aligned}
$$

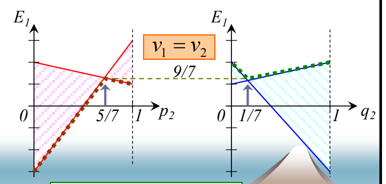
$$
\left[= \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right]
$$

$$
\begin{cases} E(\boldsymbol{p},(1,0)) = 6p_2 - 3 \\ E(\boldsymbol{p},(0,1)) = -p_2 + 2 \end{cases}
$$

Aの最適戦略 $\boldsymbol{p}^*=(0, 5/7, 2/7)$

$$
\begin{cases} E((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_2 + 1 \\ E((0,1),\boldsymbol{q}) = -5q_2 + 2 \end{cases}
$$

Bの最適戦略 $\boldsymbol{q}^*=(0, 1/7, 6/7)$

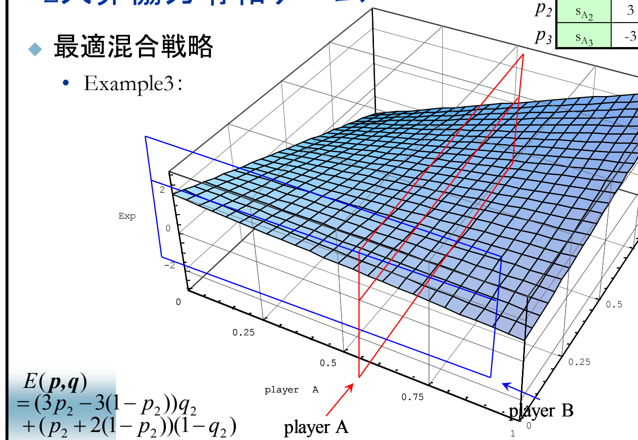


$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$：均衡解

2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

- 最適混合戦略
  - Example3：

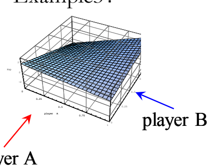


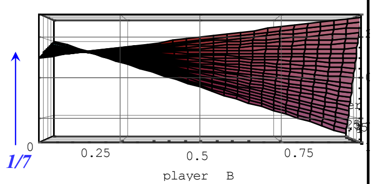
$$
E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2)
$$

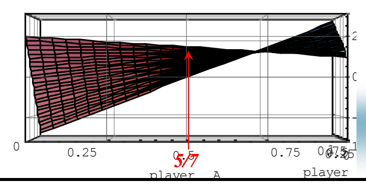
2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

- 最適混合戦略
  - Example3：







2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

- 混合戦略の意味
  - $\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*$ の確率のくじをつくって，引いていずれかに決する方法が，なぜ合理的な決定方法なのか？

    Aの最適戦略 $\boldsymbol{p}^*=(0, 5/7, 2/7)$　Bの最適戦略 $\boldsymbol{q}^*=(0, 1/7, 6/7)$

  - player A は S_{A_2}なら 3，S_{A_3}なら 2 が望ましいが，$p_2^* q_3^* + p_3^* q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる．

しかし，これは事後的

  - このような状況も全て考慮に入れた上で，最適戦略が決定された！

演習2：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

（3）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}
s_{A_1}	3	1	3	4
s_{A_2}	4	4	2	3
s_{A_3}	2	3	1	2

（4）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	2	4
s_{A_2}	-1	3	0
s_{A_3}	2	1	-2

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーA, Bの純粋戦略
    $S_A=\{s_{A_i} \mid i=1,\cdots,m\}, S_B=\{s_{B_j} \mid j=1,\cdots,n\}$
  - プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）
    $$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
    利得関数
    $$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j$$
  - プレイヤーA, Bの混合戦略
    $$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_m) \longrightarrow s_{A_i}=(0,\cdots,1,\cdots,0)$$
    $$\begin{cases} p_1+\cdots+p_m=1 \\ p_1,\cdots,p_m \geq 0, \end{cases}$$
    $$\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n) \longrightarrow s_{B_j}=(0,\cdots,1,\cdots,0)$$
    $$\begin{cases} q_1+\cdots+q_n=1 \\ q_1,\cdots,q_n \geq 0 \end{cases}$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーAの保証水準
    $$\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_1=\max_{\boldsymbol{p}}\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$
    pを操作して期待利得最大
  - プレイヤーBの保証水準
    $$\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_2=\min_{\boldsymbol{q}}\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$
    qを操作して期待損失最小
  - **Proposition2**
    $$\max_{\boldsymbol{p}}\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \leq \min_{\boldsymbol{q}}\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

  - **Theorem3**
    $$\max_{\boldsymbol{p}}\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \min_{\boldsymbol{q}}\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$
    また，これを成立させる戦略の組（$\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$）を**均衡点**といい，均衡点における利得 $v(\boldsymbol{A})$ をゲームの値という．
    $$v(\boldsymbol{A}):=\boldsymbol{p}^{*T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^*=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i^*q_j^*$$
    均衡点における戦略が**最適戦略**
  - **Theorem4**
    戦略の組（$\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$）が均衡点であるための必要十分条件は，（$\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$）が関数 $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の**鞍点**であること．即ち，
    $$\forall \boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\quad E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \leq E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \leq E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q})$$
    が成立すること．
    Bがq^*の時，Aはp^*にするのが利得最大
    Aがp^*の時，Bはq^*にするのが損失最小

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - **Theorem5**

    $v(\boldsymbol{A})$ がゲームの値，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$が均衡点であるための必要十分条件は

    $$\forall i, j,\quad E(s_{A_i}, \boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*, s_{B_j})$$

    が成立すること.

$$\forall i = 1,\cdots,m,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$$

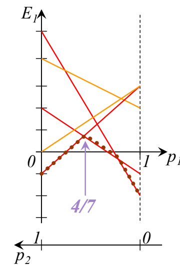
$$\forall j = 1,\cdots,n,\quad E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example4

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}	s_{B_5}
p_1	s_{A_1}	-2	-1	2	3	3
p_2	s_{A_2}	5	2	4	-1	0
	s_{A_3}	4	1	3	-2	-1

$$E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$$
$$\cancel{E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2}$$
$$E(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$$
$$E(\boldsymbol{p}, s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$$
$$\cancel{E(\boldsymbol{p}, s_{B_5}) = 3p_1}$$



$$\boldsymbol{p}^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0)$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example5：一般の2×2ゲーム

		q_1	q_2
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p_1	s_{A_1}	a_{11}	a_{12}
p_2	s_{A_2}	a_{21}	a_{22}

鞍点が存在すればそれが**均衡点**.
なければ，混合戦略を考えるが，
このとき，必ず $E(\boldsymbol{p},s_{B_1})$ と $E(\boldsymbol{p},s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1},\boldsymbol{q})$ と $E(s_{A_2},\boldsymbol{q})$ は交点を持つ.

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}} \right)$$

演習3：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える. プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーAの利得行列と混合戦略 $\boldsymbol{p}$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \vdots \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

まとめると…

$$\begin{array}{ll} \max . u & \\ s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{array}$$

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min \{E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}), E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\boldsymbol{p}, s_{B_n})\}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーBの損失行列(Aの利得行列)と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$\begin{array}{cccc} q_1 & q_m & \cdots & q_n \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \vdots \\ E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \end{cases}$$

まとめると…

$$\begin{array}{ll} \min . w & \\ s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \cdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{array}$$

$$\min_{\boldsymbol{q}} \max \{E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}), E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}), \cdots, E(s_{A_m}, \boldsymbol{q})\}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題
(LPの主問題:**P**)

主・双対

プレイヤーBの最適化問題
(LPの双対問題:**D**)

$$\begin{array}{ll} \max . u & \\ s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min . w & \\ s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \cdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{array}$$

注)(**P**)(**D**)ともに自明解($\boldsymbol{p}$=(1,0,…,0), $\boldsymbol{q}$=(1,0,…,0))があるので実行可能.
→双対定理より，最適解が存在し，最適値は一致する

Theorem6
(P),(D)の最適解が($\boldsymbol{p}^*$, u^*),($\boldsymbol{q}^*$, w^*)のとき,($\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$)がゲームの均衡点であり，$v := u^* = w^*$がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6:じゃんけん

A＼B				min	max
	0	2	-7	-7	-2
	-2	0	4	-2	
	7	-4	0	-4	
max	7	2	4		
min		2			

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

	A＼B	q_1	q_2	q_3
p_1		0	2	-7
p_2		-2	0	4
p_3		7	-4	0

$$
\begin{array}{l}
\max . u \\
s.t. \quad -2p_2 + 7p_3 \geq u \\
\quad 2p_1 - 4p_3 \geq u \\
\quad -7p_1 + 4p_2 \geq u \\
\quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
\quad p_1, \ p_2, \ p_3 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\min . w \\
s.t. \quad 2q_2 - 7q_3 \leq w \\
\quad -2q_1 + 4q_3 \leq w \\
\quad 7q_1 - 4q_2 \leq w \\
\quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\
\quad q_1, \ q_2, \ q_3 \geq 0
\end{array}
$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

$(p_1^*, p_2^*, p_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)$, $u^*=0$
$(q_1^*, q_2^*, q_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)$, $w^*=0$

演習4：

- LPによる均衡解の求解
  - 2人のプレイヤーA, Bは，プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列)が以下で与えられるゲームをする．各プレイヤーの問題をLPで表し，均衡解とゲームの値を求めよ．

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	1	5	-2
s_{A_2}	4	1	3
s_{A_3}	-2	3	6

参考文献

- S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division", Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981,2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2008）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣（2000）
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2001）
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版（2003）
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房（2005）
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）