

意思決定科学：
ゲーム理論3

情報学部 堀田敬介

2009/12/18, Fri. ~

協力ゲームの理論

2人交渉ゲーム

交渉問題 (bargaining problem)

交渉を行う ←何らかの共通の認識をもつ

共通の認識を明確に定義し、交渉のルールと解を求める

例：恋人達のジレンマ

事前に話し合いを行う

ジャンケンで勝った方、強く主張した方、くじ引き、etc...



男\女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)



結合純戦略 (joint pure strategy)

(野球, 野球), (野球, 映画), (映画, 野球), (映画, 映画)

結合混合戦略 (joint mixed strategy)

$z = (z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22})$, $\begin{cases} z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22} = 1 \\ z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} \geq 0 \end{cases}$

CONTENTS

協力ゲームの理論

2人交渉ゲーム

結合戦略, 実現可能集合

Nash交渉解

提携ゲーム, 提携と配分

コア, 安定集合, シャープレイ値

投票ゲーム

投票力指数

シャープレイ・シュービック指数

バンザフ指数

ディーガン・バックル指数

協力ゲームの理論

結合混合戦略と実現可能集合

双行列 $G=(a_{ij},b_{ij})$ ($i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$)

結合混合戦略

結合純戦略(i,j)がとられる確率を z_{ij} としたときの確率分布

$$z = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{mn})$$
 , $\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} = 1 \\ z_{ij} \geq 0 \quad (i=1,\dots,m, j=1,\dots,n) \end{cases}$

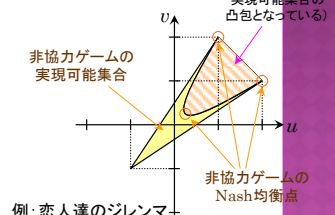
結合 (混合) 戦略集合: $Z=\{z\}$

二人の期待利得

$$u(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} z_{ij}$$
$$v(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} z_{ij}$$

実現可能集合 (到達可能集合)

$$R = \{(u(z), v(z)) \mid z \in Z\}$$



例: 恋人達のジレンマ

Confidential

1

協力ゲームの理論

交渉の基準点

交渉

成功

利得

IV

失敗

利得 = 最悪の場合でも保証される利得 = maximin値

交渉が不成功に終わったとしても期待できる保証水準 = 交渉の基準点

$$\begin{cases} c_1 := \max \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j \\ c_2 := \max \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j \end{cases}$$

例: 恋人達のジレンマ

交渉

成功

デート成立

失敗

家に帰って不貞寝
非協力ゲームをやる

交渉の基準点

$(c_1, c_2) = (0, 0)$
 $(c_1, c_2) = (1/5, 1/5)$

協力ゲームの理論

交渉問題の要素と定式化

プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$

交渉の基準点 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ← 交渉不成功時の保証水準

実現可能集合 $S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$

- Sの満たすべき性質
 - 1. n次元Euclid空間の有界閉凸集合
 - 2. 基準点 c は Sに含まれる
 - 3. Sには、任意の i について、 $x_i > c_i$ なる点を少なくとも1つ含む

交渉問題 (N, S, c)

交渉の妥結点 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$

- 交渉問題 (N, S, c) が与えられたとき、全てのプレイヤーが納得する S に属すただ一つの点 s が選び出されたとき、その点 s

交渉解 $F : (N, S, c) \rightarrow s$

- 交渉問題 (N, S, c) が与えられたとき、 (N, S, c) に対してただ一つの妥結点 s を対応させるルール

※プレイヤーに c の共通認識があるとき、c を交渉の基準点とよぶ (c は所与とする)

交渉のルールが共通認識となっていれば、基準点を定める交渉となる!

協力ゲームの理論

2人交渉ゲーム

演習:

A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(6, 7)	(0, 9)
s_{A_2}	(9, 0)	(2, 3)

1. (協力)実現可能集合を描いてみよう

2. このゲームを協力ゲームの出発点として、交渉の基準点を考えよう

協力ゲームの理論

交渉の妥結点の満たすべき公準 (その1)

公準1: 個人合理性

- x が個人合理的 $\Leftrightarrow x_i \geq c_i (i=1, \dots, n)$
- $F(N, S, c)$ の妥結点 s が個人合理的のとき、F は個人合理的であるという

公準2: 強個人合理性

- x が強個人合理的 $\Leftrightarrow x_i > c_i (i=1, \dots, n)$
- $F(N, S, c)$ の妥結点 s が強個人合理的のとき、F は強個人合理的であるという

公準3: パレート最適性 (共同合理性, 効率性)

- 交渉の妥結点 $F(N, S, c) = s$ はパレート最適でなければならない

公準4: 弱パレート最適性

- 交渉の妥結点 $F(N, S, c) = s$ は弱パレート最適でなければならない

交渉成立時は、交渉不成功時に保証される利得 c より多くの利得が保証されねばならない

■ 例：

各々のmaximinを
交渉の基準点 $c = (4, 3)$
とする

公準1より $T \neq \varnothing$
公準3よりプレート最適

- 例：

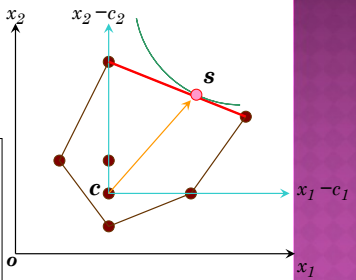
基準点 $c = (4, 3)$ とする
 ↑ 各々の maximin

演習: $y_1 = 1/2x_1$ という正一次変換を施して考えてみよう!

- ・共同合理性 (パレート最適) を満たす部分は?
- ・基準点 c は?

さらに $z_1 = y_1/2$, $z_2 = x_2/3$ としたとき,

- ・Nash 解はどの書けるか?
- ・妥結点を求めよとの問題の妥結点を出そう!



- Nash積

$$\prod_{i \in N} (x_i - c_i) = (x_1 - c_1) \times \cdots \times (x_n - c_n)$$

て、基準点からの
利得の増分の積

各プレイヤーについて、基準点からの利得の増分の積

- 交渉問題 (N, S, c) の Nash 交渉解は, Nash 積を最大にする S の点 s

$$\text{or } N(S, \mathbf{c}) = \arg \max \left\{ \prod_{i \in N} (x_i - c_i) \mid \mathbf{x} \in S, \mathbf{x} \geq \mathbf{c} \right\}$$

Nash交渉解は、利得の測定法から独立なので、プレイヤー毎に利得を正一次変換しても変わらない。
(効用の個人間比較を排除)

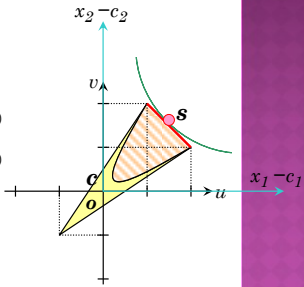
← 基準点を 0 に変換して考えることが出来る

- 例：交渉力 (bargaining power)

$$(x_1 - c_1)^a \times (x_2 - c_2)^b, \quad [a \geq 0, b \geq 0, a + b > 0]$$

男\女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1, -1)
映画	(-1, -1)	(1, 2)

- $a > b$ の時 (プレイヤーAの方が交渉力が高い)
Nash交渉解: $(u^*, v^*) = (2, 1)$
- $a < b$ の時 (プレイヤーBの方が交渉力が高い)
Nash交渉解: $(u^*, v^*) = (1, 2)$
- $a = b$ の時 (双方の交渉力が等しい)
Nash交渉解: $(u^*, v^*) = (3/2, 3/2)$



協力ゲームの理論

交渉の妥結点の満たすべき公準（その2）

公準5：利得の正一次変換からの独立性

公準6：対称性

公準7：無名性（匿名性）

基準点を $c=0$ と出来る

プレイヤーの番号を付替えても、交渉領域が変化しないとき、全てのプレイヤーの受け取る利得が同じ

プレイヤーの番号を付替えた時、交渉領域が変化しなくても、妥結点におけるプレイヤーの受け取る利得が番号の付け方に独立、例え匿名にしても変わらない

無名性

協力ゲームの理論

交渉の妥結点の満たすべき公準（その3）

公準8：無関連な代替案からの独立性

公準9：全体と部分との整合性

交渉の場を (S, c) から (T, c) に変えても妥結点 s は変わらない

整合性を持たないと、プレイヤーが色々な部分集合に分かれて交渉が始まってしまう！

独立性

協力ゲームの理論

Nash交渉解の一意性

Nashの定理（1950）

Rothの定理（1977）

Lensbergの定理（1985）

2人交渉問題のNash交渉解は、次の5つの公準を満たす唯一の解

任意の交渉問題において、Nash交渉解は次の4つの公準を満たす唯一の解

任意の交渉問題において、次の3つの公準を満たすのはNash解か、非合意解 $F(S) = c = 0$ のみ。

任意の交渉問題において、Nash交渉解は次の5つの公準を満たす唯一の解

協力ゲームの理論

交渉の妥結点の満たすべき公準（その4）

公準10：個人単調性

Kalai & Smorodinsky解

交渉問題の理想点：
 $M(S)=(M(S)_1, M(S)_2)$
 $M(S)_i$: 交渉領域 S 内でのプレイヤー i の利得上限（最大限度額）

2つの交渉問題 (N, S, c) , (N, T, c) において、解 F が個人単調
 $T \supset S$, かつ $M(T)_i = M(S)_i$ ($i=1,2$) $\Rightarrow F_i(T) \geq F_i(S)$ ($i=1,2$)

公準8への批判
Nash解は公準10を満たさないという批判

交渉領域 S のパレート最適解集合と、交渉基準点 c と理想点 $M(S)$ とを結ぶ直線との交点を妥結点とするルール

Kalai & Smorodinskyの定理(1975)
任意の2人交渉問題において、Kalai & Smorodinsky解は次の5つの公準を満たす唯一の解
個人合理性(公準1), パレート最適性(公準3), 利得測定法からの独立性(公準5), 対称性(公準6), 個人単調性(公準10)

交渉領域が S から T に拡大したのに、Nash解ではプレイヤー2の利得が減少！

協力ゲームの理論

● 例題

■ → [例題6.1] [2] p.151～

■ → [例題6.2] [2] p.155～

協力ゲームの理論

● 提携と配分

■ 定義：提携ゲーム

○ ゲームのルール

(1) プレイヤー $N = \{1, 2, \dots, n\}$

(2) N の任意の部分集合は提携可能

(3) 譲渡可能効用が存在し、提携内で別払い可能
〔別払いのあるゲーム (games with sidepayment) 〕

○ 任意の提携 S にたいし、実数値を対応させる関数 $v(S)$ が存在

● v : 特性関数 (characteristic function)

● $v(S)$: 提携 S のもつ提携値

↓

(N, v) : 提携形ゲーム (coalitional game)

譲渡可能効用(transformable utility)
が存在 = 利得の一部をプレイヤー間で自由に譲渡でき、 $A \rightarrow B$ へ譲渡したときの、 A の損失と B の利得が等しい

プレイヤーの間で利得を自由に譲渡可能

協力ゲームの理論

● 提携と配分

■ 例題：ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32～)

○ 3市が各々独自に建設 ... $A=5$ 億円, $B=3$ 億円, $C=2$ 億円

○ 共同施設の建設 ... $A+B=7.2$ 億円, $B+C=4.8$ 億円, $C+A=6.6$ 億円, $A+B+C=8$ 億円

例えば、A市とB市はそれぞれ独自に建設する(5億+3億=8億)よりも、提携して共同施設を建設(7.2億)したほうが安い。
→ 0.8億円の得をするということ！

協力関係を結んだプレイヤーのグループ=提携
提携が作られることによって得られる便益の値を与える関数=特性関数

協力ゲームの理論

● 提携と配分

■ 例題：ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32～)

○ 3市が各々独自に建設 ... $A=5$ 億円, $B=3$ 億円, $C=2$ 億円

○ 共同施設の建設 ... $A+B=7.2$ 億円, $B+C=4.8$ 億円, $C+A=6.6$ 億円, $A+B+C=8$ 億円

プレイヤーの集合: $N = \{A, B, C\}$

実現可能な提携: $2^N = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{B,C\}, \{C,A\}, \{A,B,C\}\}$

特性関数: $v(\emptyset) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$
 $v(\{A,B\}) = (5+3) - 7.2 = 0.8$
 $v(\{B,C\}) = (3+2) - 4.8 = 0.2$
 $v(\{C,A\}) = (2+5) - 6.6 = 0.4$
 $v(\{A,B,C\}) = (5+3+2) - 8 = 2$

$S \cap T = \emptyset$

● v が**超加法的**(superadditive)
互いに素な任意の提携 S, T について以下が成立する特性関数 v
 $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

相交わない2つの提携は、各々別個に行動するより共に行動した方が得られる便益が大きい(小さくはない)ということ

だから提携すればよい問題は「配分」をどうするかとなる

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\{A\}) + v(\{B\}) = 0 < 0.8 = v(\{A,B\}) \\ v(\{B\}) + v(\{C\}) = 0 < 0.2 = v(\{B,C\}) \\ v(\{C\}) + v(\{A\}) = 0 < 0.4 = v(\{C,A\}) \\ v(\{A,B\}) + v(\{C\}) = 0.8 < 2 = v(\{A,B,C\}) \\ v(\{B,C\}) + v(\{A\}) = 0.2 < 2 = v(\{A,B,C\}) \\ v(\{C,A\}) + v(\{B\}) = 0.4 < 2 = v(\{A,B,C\}) \end{array} \right.$$

Confidential

5

協力ゲームの理論

提携と配分

定義：配分 (imputation)

提携形ゲーム (N, v)

プレイヤー i の利得 x_i 利得ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

実現可能集合 R

$$R = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i \in N} x_i \leq v(N) \right\}$$

実現可能集合の点 $\mathbf{x}$ が交渉領域にあるための条件

(1) 個人合理性 $x_i \geq v(\{i\})$

(2) 全体合理性 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

各プレイヤーの利得は単独行動で獲得可能な値以上

全プレイヤーの協力で得られる値 $v(N)$ は、全て配分されねばならない

全体合理性を満たす利得ベクトルは実現可能領域でパレート最適になっている

準配分 (preimputation)
全体合理性を満たす利得ベクトル

配分 (imputation)
個人合理性と全体合理性を満たす利得ベクトル

協力ゲームの理論

例題

多数決ゲーム

プレイヤーは3人 $N = \{1, 2, 3\}$

12万円が贈られてきた。多数決で分け、多数派が全てにとって良い。

提携集合 2^N 、多数派の提携 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

特性関数

$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$

$v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{3, 1\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 12$

利得ベクトルの集合

$X = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \} \subset R^3$

例1: 提携 $\{1, 2\}$ が成立 $\rightarrow \mathbf{x} = (6, 6, 0)$

例2: 提携 $\{1, 3\}$ が成立 $\rightarrow \mathbf{x} = (6, 0, 6)$

ゲームの結果として考えられる利得ベクトルの例
 $(6, 6, 0), (6, 0, 6), (0, 6, 6), (8, 4, 0), (2, 4, 6)$

協力ゲームの理論

提携と配分

例題：ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32~)

3市が各々独自に建設 ... A=5億円, B=3億円, C=2億円

共同施設の建設 ... A+B=7.2億円, B+C=4.8億円, C+A=6.6億円, A+B+C=8億円

プレイヤーの集合: $N = \{A, B, C\}$

実現した提携の例: $\{A, B, C\}$ その特性関数の値: $v(\{A, B, C\}) = (5+3+2)-8 = 2$

(1) 個人合理性 $x_i \geq v(\{i\})$

(2) 全体合理性 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

どんな配分がよい?

どんな配分が考えられる?

配分の例: $(x_A, x_B, x_C) = (1, 0.5, 0.5)$

(1) 個人合理性を満たしている: $x_A \geq v(\{A\})=0, x_B \geq v(\{B\})=0, x_C \geq v(\{C\})=0$

(2) 全体合理性を満たしている: $x_A+x_B+x_C = v(\{A, B, C\}) = 2$

配分ではない例: $(x_A, x_B, x_C) = (0.6, 0.8, 0.4)$

(1) 個人合理性を満たしている: $x_A \geq v(\{A\})=0, x_B \geq v(\{B\})=0, x_C \geq v(\{C\})=0$

(2) 全体合理性を満たしていない: $x_A+x_B+x_C > v(\{A, B, C\}) = 2$

協力ゲームの理論

コア (core)

ゲーム (N, v)

配分の集合
 $X = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \}$
= 交渉領域

交渉

ある配分に到達

配分の支配

提携 S において、配分 $\mathbf{x}$ が配分 $\mathbf{y}$ を支配するとは、次の2条件が成立すること

(1) 有効条件 : $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$

(2) 選好条件 : $x_i > y_i, (\forall i \in S)$

提携 S は $\mathbf{x}$ の有効集合 (effective set)
つまり、提携 S にとって、配分 $\mathbf{x}$ は S の力だけで実現可能!

提携 S にとって、配分 $\mathbf{y}$ を支配する配分 $\mathbf{x}$ が存在するとき、
「提携 S は配分 $\mathbf{y}$ を拒否する (block)」
or
「配分 $\mathbf{y}$ は提携 S にとって改善可能」という

交渉の過程で、ある提携にとって支配される配分は、その提携によって拒否され、排除される。
↓
支配されない配分が残る
コア

Confidential

6

協力ゲームの理論

● コア

- ゲーム (N, v) において、いかなる配分にも支配されない配分の集合

⇕

■ コア (別定義)

- ゲーム (N, v) が優加法的であるとき、提携合理性を満たす配分の集合

$$C(v) := \left\{ x \in X \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N \right\}$$

$v(S) = \sum_{i \in S} v_i$ を提携 S の配分 x に対する不満とよぶ。

コアとはいかなる提携に対しても不満を与えない配分の集合

補足: Theorem
各プレイヤーのとりうる純戦略が有限な協力ゲームの特性関数は優加法的

v が優加法的 (superadditive)
互いに素な任意の提携 S, T について以下が成立する特性関数 v
 $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

$S \cap T = \emptyset$

提携合理性 (個人合理性の拡張)
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

協力ゲームの理論

Theorem
本質的定和 n 人ゲーム (N, v) のコアは空

- 加法的 (additive) $\Leftrightarrow v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
- 非本質的 (inessential) $\Leftrightarrow$ 加法的 v を持つ協力ゲーム
- 本質的 (essential) $\Leftrightarrow$ そうでない協力ゲーム

● 演習:

- 以下の各ゲーム (全て優加法的) において、 v を全て書き出し、コアを見つけよう。ただし、 $v(N)=1, v(\emptyset)=0$ とする。
- (1) 3人定和ゲーム ([4] p.25 例3.2)
 - 一定量の資金を3人の多数決で分ける。多数派提携が資金の全てを獲得。
 - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
 - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\emptyset) = 0$
 - コア $C(v) = \emptyset$
- (2) 3人拒否権ゲーム ([4] p.26 例3.3)
 - 一定量の資金を3人の多数決で分ける。多数派提携が資金の全てを獲得。
 - ただし、プレイヤー1には拒否権があり、資金の獲得にはプレイヤー1の協力が必要。即ち、プレイヤー2, 3だけでは資金の獲得不可能。
 - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$
 - $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\emptyset) = 0$
 - コア $C(v) = \{ (1,0,0) \}$

協力ゲームの理論

● 例題

- 3人ゲームのコア
- $N = \{1, 2, 3\}$
- $v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
 $v(\{1, 2\}) = a_2, v(\{2, 3\}) = a_3, v(\{3, 1\}) = a_1$ (ただし、 $0 \leq a_i \leq 1, i=1,2,3$)
 $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
- ゲームの配分 $x = (x_1, x_2, x_3)$ とすると、 $x_i \geq 0 (i=1,2,3), x_1+x_2+x_3=1$

正三角形ABCが、このゲームの配分の集合 X を表す

Theorem
3人ゲーム (N, v) のコアが空でないための必要十分条件は、
 $v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\}) \leq 2v(\{1,2,3\})$

協力ゲームの理論

● 演習:

- (3) 家購入ゲーム ([4] p.26 例3.4)

$N=\{1,2,3,4\}$

$v(\{1,2,3,4\}) = 200,$
 $v(\{1,2,3\}) = 150, v(\{1,2,4\}) = 70, v(\{1,3,4\}) = 150, v(\{2,3,4\}) = 100,$
 $v(\{1,2\}) = 0, v(\{1,3\}) = 150, v(\{1,4\}) = 70, v(\{2,3\}) = 100, v(\{2,4\}) = 50, v(\{3,4\}) = 0,$
 $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\emptyset) = 0$

→ コア $C(v) = \{ x \in X \mid x_1 + x_3 = 150, x_2 + x_4 = 50, x_1 + x_4 \geq 70, x_2 + x_3 \geq 100 \}$

協力ゲームの理論

● 演習：

(3) 家購入ゲーム

player1

player2

player3

player4

x_1

x_2

x_3

x_4

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 150 \\ x_2 + x_4 = 50 \end{cases}$

取引価格

$p : \text{player1} \Leftrightarrow \text{player3}$
 $q : \text{player2} \Leftrightarrow \text{player4}$

とすると...

$\begin{cases} x_1 = p - 1000 \\ x_2 = q - 900 \\ x_3 = 1150 - p \\ x_4 = 950 - q \end{cases}$

$\begin{cases} 120 \leq p - q \leq 150 \\ 1000 \leq p \leq 1150 \\ 900 \leq q \leq 950 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 + x_3 = 100 \\ (x_1 + x_4 = 100) \end{cases}$
 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 70 \\ (x_2 + x_3 = 130) \end{cases}$

$C(v) = \{x \in X \mid x_1 + x_3 = 150, x_2 + x_4 = 50, x_1 + x_4 \geq 70, x_2 + x_3 \geq 100\}$

協力ゲームの理論

● コアの存在条件（線形計画法に基づく）

■ ゲーム (N, v) において、コアが非空となる必要十分条件

$\exists x \in X, \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = v(N), \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \ (\phi \neq \forall S \subsetneq N) \end{cases}$

(P) $\min z = \sum_{i \in N} x_i$
 $s.t. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \phi \neq \forall S \subsetneq N$

(D) $\max w = \sum_{\phi \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S)$
 $s.t. \sum_{i \in S} \gamma_S = 1 \ (i \in N)$
 $\gamma_S \geq 0 \ (\phi \neq \forall S \subsetneq N)$

(P), (D) 共に実行可能で最適解 z^*, w^* を持ち、 $z^* = w^*$ 。
また、『 $z^* \leq v(N) \Leftrightarrow$ コアが非空』

Theorem

ゲーム (N, v) において、非空なコアが存在するための必要十分条件は、双対問題 (D) の制約を満たす非負ベクトル γ_S に対し $\sum_{\phi \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \leq v(N)$

協力ゲームの理論

● 仁 (nucleolus) (Schmeidler, 1969)

■ 提携 S と 配分 $x = (x_1, \dots, x_n)$ について

$e(S, x) := v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ 【注: コアでは $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ より不満は常に0か負!】

を「配分 x に対して 提携 S が持つ **不満**」という

■ 配分 x に対して、全員集合 N と 空集合 ϕ を除く $2^n - 2$ 個の提携の不満の量を大きい順に並べる。

$\theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \dots \geq \theta_{2^n - 2}(x)$ 【注: 全員集合の不満 $e(N, x) = 0$ ($\therefore$ 全体合理性)
空集合の不満 $e(\phi, x) = 0$ ($\therefore$ $v(\phi) = 0$)】

■ 2つの配分 x, y について

「 x は y より **受容的** である」とは、以下が成り立つ

$\exists k \in \{1, \dots, 2^n - 2\}, \begin{cases} \theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \dots \geq \theta_k(x) \geq \theta_k(y) \geq \dots \\ \theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(y) \geq \theta_k(y) \geq \dots \end{cases}$

それよりも受容的な配分が存在しない配分を **仁** という

最大不満

の最小化

協力ゲームの理論

● 仁

■ 例題：ゴミ処理場建設 ([数セミナ-](2004/8) p.32~)

○ 3市が各々独自に建設 ... A=5億円, B=3億円, C=2億円

○ 共同施設の建設 ... A+B=7.2億円, B+C=4.8億円, C+A=6.6億円, A+B+C=8億円

$\begin{cases} e(\{A, B\}, x) = v(\{A, B\}) - (x_A + x_B) = 0.8 - (x_A + x_B) \\ e(\{B, C\}, x) = v(\{B, C\}) - (x_B + x_C) = 0.2 - (x_B + x_C) \\ e(\{C, A\}, x) = v(\{C, A\}) - (x_C + x_A) = 0.4 - (x_C + x_A) \\ e(\{A\}, x) = v(\{A\}) - x_A = -x_A \\ e(\{B\}, x) = v(\{B\}) - x_B = -x_B \\ e(\{C\}, x) = v(\{C\}) - x_C = -x_C \end{cases}$

ただし、全体合理性から $x_A + x_B + x_C = v(N) = 2$ も満たす必要がある

最大不満最小化

■ 最小コアを求めるLP

$\min \varepsilon$
 $s.t. \begin{cases} 0.8 - (x_A + x_B) \leq \varepsilon \\ 0.2 - (x_B + x_C) \leq \varepsilon \\ 0.4 - (x_C + x_A) \leq \varepsilon \\ -x_A \leq \varepsilon \\ -x_B \leq \varepsilon \\ -x_C \leq \varepsilon \\ x_A + x_B + x_C = 2 \end{cases}$

最適値: $\varepsilon^* = -0.6$
最適解: $(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.6, 0.6)$

LPを有限回繰り返し解くことで仁を得る

任意の配分 x について、不満が $\varepsilon = -0.6$ に一致する提携 S を除く。
($e(S, x) = -0.6$ となる S を除く)

そのうえで、同様のLPを作って解く。以下、この繰り返し。
例ではLP制約より $\begin{cases} -\varepsilon \leq x_A \leq \varepsilon + 1.8 \\ -\varepsilon \leq x_B \leq \varepsilon + 1.6 \\ -\varepsilon \leq x_C \leq \varepsilon + 1.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.6 \leq x_A \leq 1.2 \\ 0.6 \leq x_B \leq 1.0 \\ 0.6 \leq x_C \leq 0.6 \end{cases}$

故に、 $e(\{A, B\}, x) = e(\{C\}, x) = -0.6$ なので、提携 $\{A, B\}$ と $\{C\}$ の式を除く。

$\min \varepsilon$
 $s.t. \begin{cases} -\varepsilon \leq x_A \leq \varepsilon + 1.8 \\ -\varepsilon \leq x_B \leq \varepsilon + 1.6 \end{cases}$
最適値: $\varepsilon^* = -0.7$
最適解: $(x_A, x_B) = (0.7, 0.7)$

唯一配分の仁
 $(x_A, x_B, x_C) = (0.7, 0.7, 0.6)$

Confidential

8

協力ゲームの理論

シャープレイ値も仁と同様、**唯一の**解を与える
コア・仁が「不満」をもとにしているのに対し、シャープレイ値は「貢献度」をもとにした解
コアに含まれるとは限らない

- シャープレイ値 (Shapley value)
- 提携に対するプレイヤーの貢献度をもとにした解
- プレイヤーが1人ずつ加わり全員提携を作る順列を考える
- プレイヤーが加わるにより新たに獲得できる量を**貢献度**とする
全員提携の順列が{1,2,...,i-1,i,...}のとき、
i番目に加わるプレイヤーの貢献度 = $v(\{1,2,...,i-1,i\}) - v(\{1,2,...,i-1\})$
- $n!$ 個の全ての順列が当確率で起こるとき、プレイヤーの貢献度の期待値をそのプレイヤーの**シャープレイ値**といふ
プレイヤー i を含む提携 S を固定したとき、
提携 $S \cup \{i\}$ のメンバー数 = $|S| + 1$
 $N \setminus S$ のプレイヤー数 = $n - |S|$
より、提携 $S \cup \{i\}$ が $N \setminus S$ の順列の総数は $(|S| + 1)!(n - |S|)!$ 通り、
故に i が最後に参加して提携 S となる確率は $(|S| + 1)!(n - |S|)! / n!$

$$\tilde{\phi}_i = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} (v(S) - v(S - \{i\}))$$
$$\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_n)$$

プレイヤー i を含む提携 S を固定したとき、
提携 $S \cup \{i\}$ のメンバー数 = $|S| + 1$
 $N \setminus S$ のプレイヤー数 = $n - |S|$
より、提携 $S \cup \{i\}$ が $N \setminus S$ の順列の総数は $(|S| + 1)!(n - |S|)!$ 通り、
故に i が最後に参加して提携 S となる確率は $(|S| + 1)!(n - |S|)! / n!$

公準1: 全体合理性
公準2: ナルプレイヤーの零評価
公準3: 対称性
公準4: 加法性

補足: シャープレイ値は4つの公準を満たす唯一の解である
補足: v が優加法的なら個人合理性も満たし配分となる

協力ゲームの理論

- 安定集合 (stable set) [or 解 (solution), von Neumann-Morgenstern 解]
- 例題 (再掲): 3人定和ゲーム
 - 一定量の資金を3人の多数決で分ける、多数派提携が資金の全てを獲得。
 - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
 - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\emptyset) = 0$
 - コア $C(v) = \emptyset$

でも... 現実には交渉の決着がつき、配分がある範囲に収まるのでは?
例: 提携 {1,2} が成立 → 配分 $x = (0.5, 0.5, 0)$
結局, $K = \{ (0.5, 0.5, 0), (0.5, 0, 0.5), (0, 0.5, 0.5) \}$ のいずれかで決着!
[互いに支配関係にない。また、 $(0.4, 0, 0.6)$ などは $(0.5, 0.5, 0)$ に支配される。]

- 安定集合 (stable set)
- 配分の集合 X の部分集合 K が以下の性質を満たす時、 K を安定集合という
 - 内部安定性 (internal stability)
 $x \in K, y \in K \rightarrow x, y$ は互いに支配関係にない
 - 外部安定性 (external stability)
 K に属さない任意の配分は、 K に属す少なくとも1つの配分に支配される

協力ゲームの理論

- シャープレイ値
- 例題: ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32~)
 - 3市が各々独自に建設 ... A=5億円, B=3億円, C=2億円
 - 共同施設の建設 ... A+B=7.2億円, B+C=4.8億円, C+A=6.6億円, A+B+C=8億円

全体提携の順列	貢献度		
	A	B	C
A←B←C	0.0	0.8	1.2
A←C←B	0.0	1.6	0.4
B←A←C	0.8	0.0	1.2
B←C←A	1.8	0.0	0.2
C←A←B	0.4	1.6	0.0
C←B←A	1.8	2.0	0.0
合計	4.8	4.2	3.0

$$\left\{ \begin{aligned} v(\emptyset) &= v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0 \\ v(\{A,B\}) &= (5+3) - 7.2 = 0.8 \\ v(\{B,C\}) &= (3+2) - 4.8 = 0.2 \\ v(\{C,A\}) &= (2+5) - 6.6 = 0.4 \\ v(\{A,B,C\}) &= (5+3+2) - 8 = 2 \end{aligned} \right.$$

各プレイヤーのシャープレイ値
$$\left\{ \begin{aligned} \phi_A &= 4.8 / 6 = 0.8 \\ \phi_B &= 4.2 / 6 = 0.7 \\ \phi_C &= 3.0 / 6 = 0.5 \end{aligned} \right.$$

シャープレイ値による唯一の配分
 $(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$

協力ゲームの理論

- 安定集合
- $\text{Dom } x := \{y \mid y \in X, x \text{ dom } y\}$: 配分 x に支配される配分の集合
- $\text{Dom } A := \bigcup_{x \in A} \text{Dom } x$: 集合 A の配分に支配される配分の集合
 - 内部安定性 $\Leftrightarrow K \cap \text{Dom } K = \emptyset$
 - 外部安定性 $\Leftrightarrow K \cup \text{Dom } K = A$
 - 安定集合 $\Leftrightarrow K = A - \text{Dom } K$ を満たす集合 $K \subset A$

Theorem
ゲーム (N, v) の安定集合がただ1つの配分から成るための必要十分条件は、ゲームが非本質的であること。

Theorem
ゲーム (N, v) のコア C および安定集合 K が共に非空ならば $C \subset K$ 。

投票ゲーム

投票ゲーム

N人のプレイヤーによる投票で何らかの決定がなされるシステムを考える。

投票者の様々なグループ（Nの部分集合）＝**提携**（coalition）

法案の可決など、選択権を持つ提携＝**勝利提携**（winning coalition） W

そうでない提携＝**敗北提携**（losing coalition） L

→ (N, W) ：投票ゲーム（voting game）

ただし、以下の性質を持つとする

$(1) N \in W, \varnothing \in L$

$(2) S \in W \text{ かつ } S \subseteq T \rightarrow T \in W$

$(3) S \in W \rightarrow N - S \in L$

全員提携は勝利提携、空集合は敗北提携

勝利提携を含む提携は勝利提携

勝利提携の補集合は敗北提携

例：3つの政党 $N=\{1,2,3\}$ の議員で構成されている議会

定数21、各党議席数(10,10,1)、過半数で議案可決。

勝利提携 $W = \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$

敗北提携 $L = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing \}$

各党 $N=\{1,2,3\}$ の影響力(投票力指数)はどの程度か？

投票ゲーム

投票力指数

シャプレー・シュービック指数（SS指数）

例：3人 $N=\{1,2,3\}$ の単純多数決ゲーム

勝利提携 $W = \{ \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\} \}$

勝利提携

$(1, 2, 3)$

提携に参加する順

$(2, 3, 1),$
 $(3, 1, 2),$
 $(1, 3, 2),$
 $(2, 1, 3),$
 $(3, 2, 1)$

ピヴォット(pivot)

協力ゲームの解の1つシャープレイ値を、投票者の影響力の評価に適用したもの。

全ての順列の生起確率が等しいと仮定したときの、各投票者のピヴォットとなる回数の期待値

SS指数: $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$

投票ゲーム

投票力指数が満たすべき性質

[8] p.45～

投票力指数

シャプレー・シュービック指数（Shapley-Shubik index）（1954）

バンザフ指数（Banzhaf index）（1965）

ディーガン・パックル指数（Deegan-Packel index）（1978）

.....

投票ゲーム

投票力指数

バンザフ指数（絶対Bz指数）

例：4人 $N=\{1,2,3,4\}$ の単純多数決ゲーム

勝利提携 $W = \{ \{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\} \}$

$\{1,2,3\}$ の3人による全ての部分集合

敗北提携 $\varnothing$

敗北提携 (1, 4)

敗北提携 (2, 4)

敗北提携 (3, 4)

敗北提携 (1, 2, 4)

敗北提携 (1, 3, 4)

敗北提携 (2, 3, 4)

勝利提携 (1, 2, 3, 4)

4

4

4

4

4

4

4

4

敗北提携

敗北提携

敗北提携

敗北提携

勝利提携

勝利提携

勝利提携

勝利提携

スウィング (swing)

全ての投票者が賛成・反対を表明しているとき、自らの投票態度を変更することによって結果を変えることの出来る投票者（スウィング）となる回数の期待値

絶対Bz指数: $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (3/8, 3/8, 3/8, 3/8)$

正規Bz指数: $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4) \sum_{i \in N} \hat{\beta}_i = 1$ と正規化

Confidential

10

投票ゲーム

● 投票力指数

■ ディーガン・バックル指数 (DP指数)

○ 投票者は「極小勝利提携 W^m 」に属しているとき、影響力を持つという考え

○ ただし、極小勝利提携に属す投票者は全て同じ影響力を持つとする

○ 投票者 i のDP指数は、
$$\gamma_i = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W^m, S \ni i} \frac{1}{|S|}$$

○ 例：4人 $N=\{1,2,3,4\}$ の単純多数決ゲーム

● 勝利提携 $W = \{ \{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \}$

● 極小勝利提携 $W^m = \{ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \}$

● 極小勝利提携の全体 $|W^m| = 4$

$\{1,2,3\} \rightarrow (1/3, 1/3, 1/3, 0)$

$\{1,2,4\} \rightarrow (1/3, 1/3, 0, 1/3)$

$\{1,3,4\} \rightarrow (1/3, 0, 1/3, 1/3)$

$\{2,3,4\} \rightarrow (0, 1/3, 1/3, 1/3)$

→

投票者1についての和: 1

投票者2についての和: 1

投票者3についての和: 1

投票者4についての和: 1

→ DP指数: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

極小勝利提携

勝利提携のうち、1人でも抜けると敗北提携になってしまうもの。

各極小勝利提携の生起確率が同じと仮定したときの、各投票者の影響力の割合

投票ゲーム

● 演習：

■ 以下の各投票ゲームにおけるSS指数、Bz指数、DP指数を計算しよう

(1) 3人のプレイヤー $N=\{1,2,3\}$ による単純多数決ゲームを考える。ただし、プレイヤー1には拒否権がある。

(2) 4つの政党がそれぞれ議席数(40, 30, 10, 5)を占めている議会において、2/3以上の賛成で議案を通すことができる。

(3) 8社の株を5人の人が所有しており、その比率は(30%, 25%, 25%, 15%, 5%)である。株主総会において、過半数の意見が通るとする。

ⓘ

投票力指数の説明と投票力指数を計算する。松井先生のWebサイト

投票ゲーム

● 投票力指数の意味

■ 例：定数20の議会、4政党所属議員で構成。過半数で議案可決。

40%

35%

15%

10%

構成比率

SS指数

Bz指数

DP指数

この比率が各党の力(議会発言力)なのか？

ー 例：定数が19に変化し、議席数が(8,7,3,1)となった。

参考文献

[1] 鈴木光男 「ゲーム理論入門」 共立出版 (1981, 2003 (新装版))

[2] 鈴木光男 「新ゲーム理論」 勁草書房 (1994)

[3] 岡田章 「ゲーム理論」 有斐閣 (1996)

[4] 鈴木光男・武藤滋男 「協力ゲームの理論」 東京大学出版会(1985)

[5] 中山幹夫・舟木由喜彦・武藤滋男 「ゲーム理論で解く」 有斐閣ブックス (2000)

[6] 舟木由喜彦 「エコノミックゲームセオリー」 サイエンス社(2001)

[7] 武藤滋男・小野理恵 「投票システムのゲーム分析」 日科技連(1998)

[8] 森雅夫・松井知己 「オペレーションズ・リサーチ」 朝倉書店(2004)

[9] 松井知己 『投票力指数を計算する』
<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/voting/voting.html>

[10] 毛利裕昭・岡本吉央 「離散最適化と協力ゲーム(1)(2)」 オペレーションズ・リサーチ(2003)Vol.48, no.1,2

Confidential

11