

経営情報演習B

2. ゲームのモデル化

情報学部 経営情報学科
堀田敬介

2009/10/23, Fri.

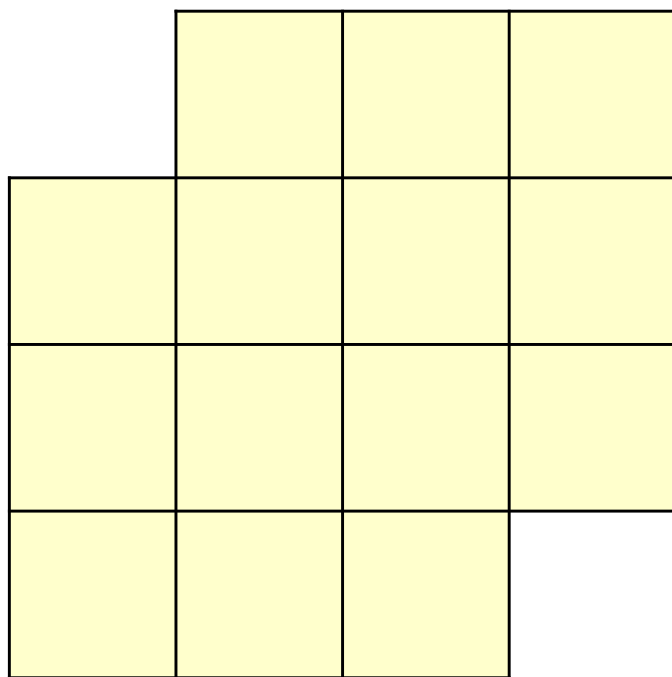
Contents

- パズルを解こう
 - はじめに
 - 解けないパズルを解かずに知る
 - パズルのモデル化
 - 魔方陣
 - 数独
 - ペグソリティア
 - ノノグラム

Puzzleを解こう

- はじめに

- 床にタイルを敷き詰めたい。できますか？ ただし、
 - タイルは下の1種類のみで重ねたり切っては駄目
 - 床の左上端・右下端には柱があるのでタイルは置けない



床

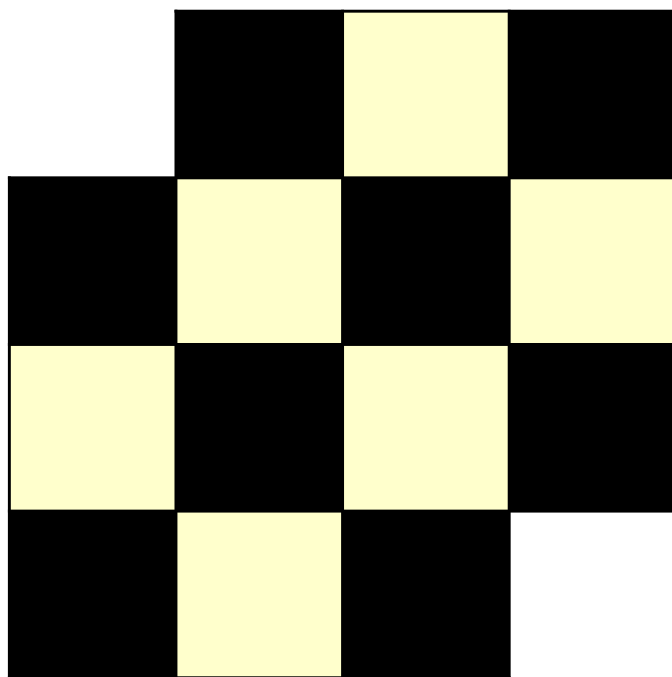


タイル

Puzzleを解こう

- はじめに

- 床にタイルを敷き詰めたい。できますか？ ただし、
 - タイルは下の1種類のみで重ねたり切っては駄目
 - 床の左上端・右下端には柱があるのでタイルは置けない



床



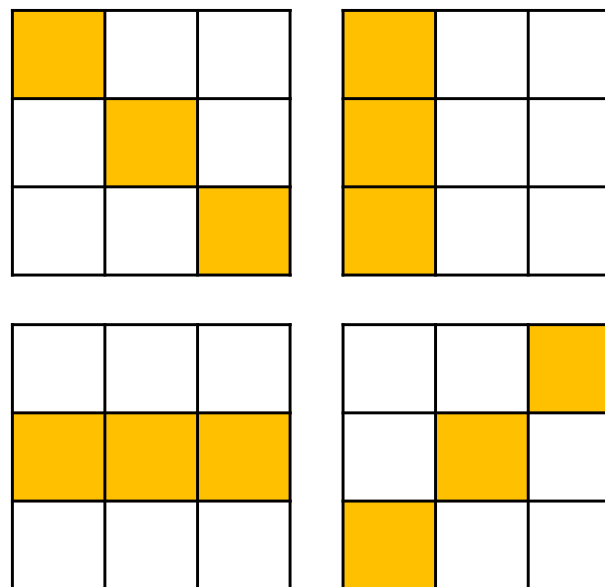
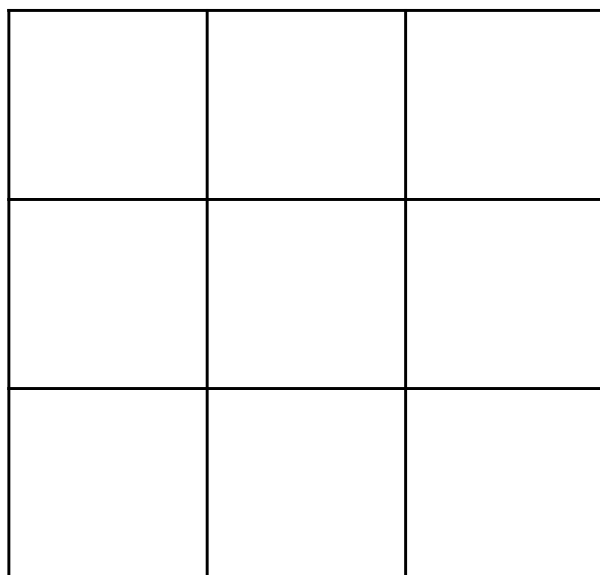
タイル

パズルが解けるかどうかを、説明・説得するにはどうすれば？

Puzzleを解こう

- 魔方阵

- 3×3 のマスに, 1~9の数字を1マスに1つ入れる
- ただし, 縦・横・斜めの合計を全て同じにする



Puzzleを解こう

- 魔方阵 (cf.[5])

- ヒント

- 全て同じになるという3つの数字の和は15
- 3つの数字を足して15にするパターンは、縦3列、横3行、斜め2の前部で8つ必要
- 3つを足して15にする組合せは以下の8つしかない

- $1 + 5 + 9$

- $1 + 6 + 8$

- $2 + 4 + 9$

- $2 + 5 + 8$

- $2 + 6 + 7$

- $3 + 4 + 8$

- $3 + 5 + 7$

- $4 + 5 + 6$

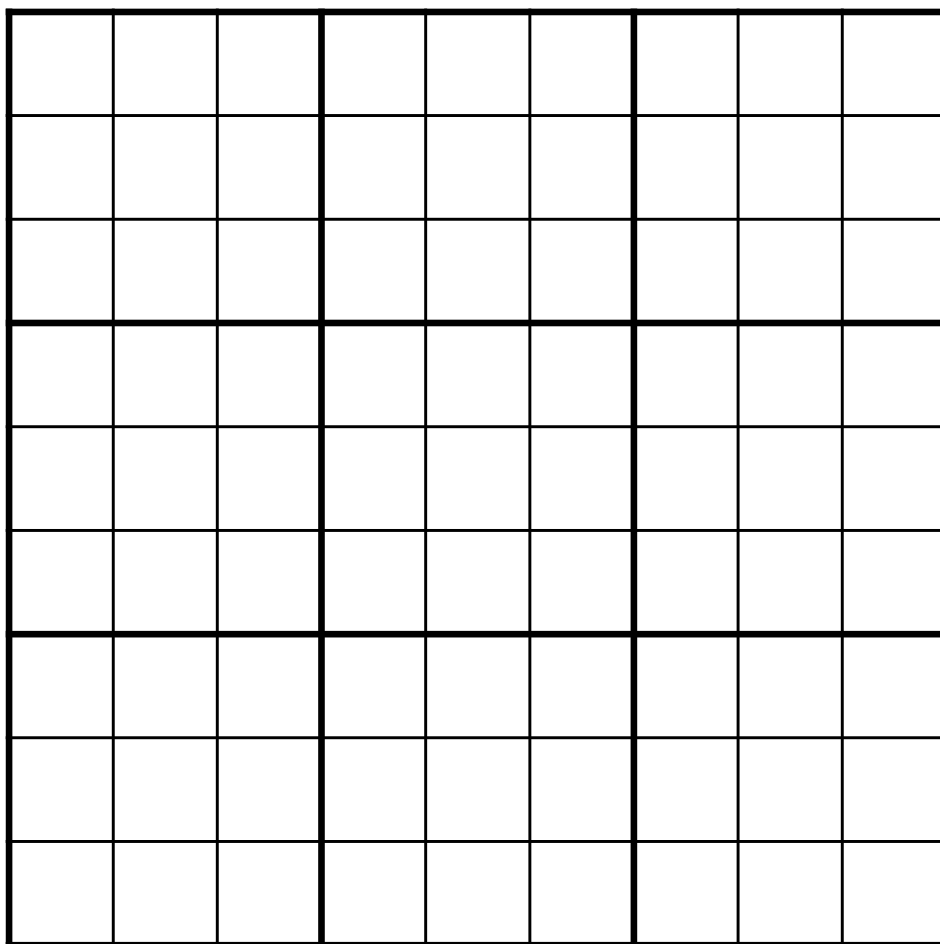
4	9	2
3	5	7
8	1	6

- 1,2,3は同一行・列・斜めには置けない
- 7,8,9は同一行・列・斜めには置けない
- 角は3回和に使われ、中央は4回、他は2回
- etc...

Puzzleを解こう

- 数独

- 9×9 のマスに, 1~9の数字を1マスに1つ入れる
- ただし, 縦・横・ブロックに1~9の数字は1つずつ



Puzzleを解こう

- 数独 (cf.[3])

- 定式化: $\{0,1\}$ -整数計画問題 (IP; Integer Programming)
- $\{0,1\}$ -変数を $9 \times 9 \times 9 = 729$ 個用意

$$x[i, j, k] = \begin{cases} 1 & ([i, j] \text{ に } k \text{ を入れる}) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

i は行, j は列を表し,
 k は代入する数値とする

例)

$x[2, 7, 4] = 1$... 2行7列のマスを4に入れる

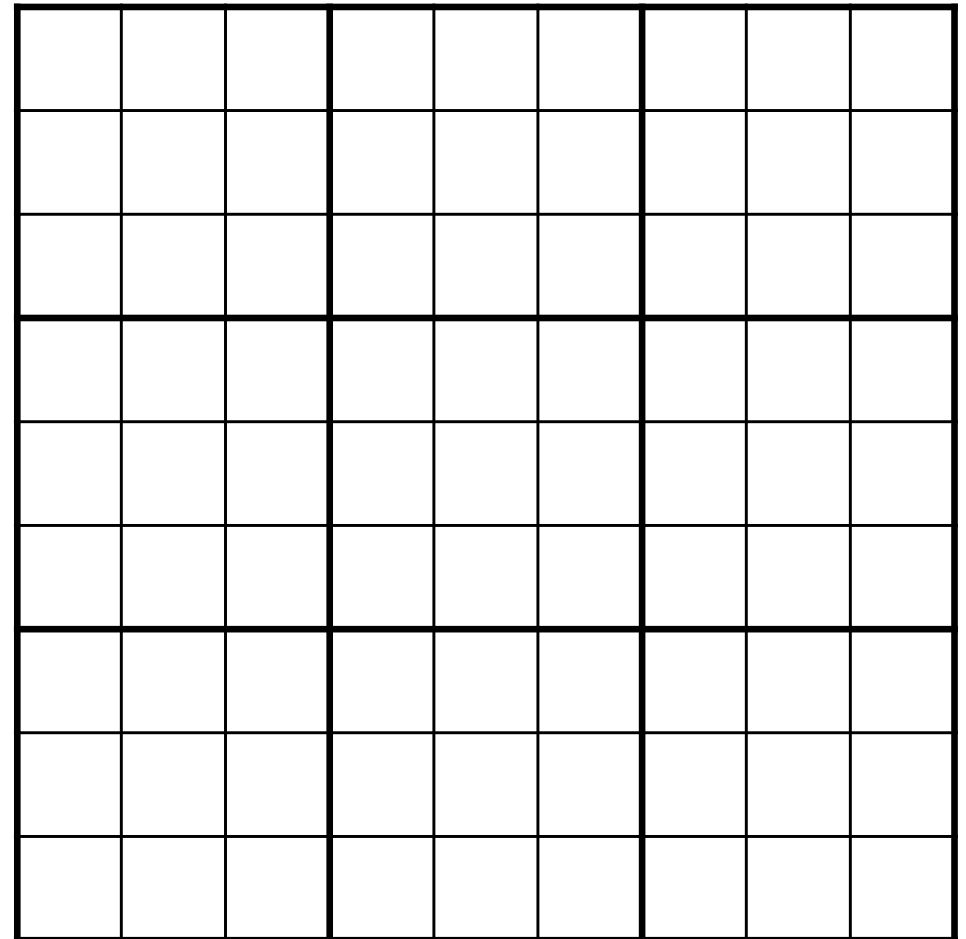
$x[6, 1, 3] = 0$... 6行1列のマスを3に入れない

制約条件1: 各行に1~9を1つ (729個)

制約条件2: 各列に1~9を1つ (729個)

制約条件3: 各枠に1~9を1つ (729個)

目的関数: なんでもよい



演習

• 数独

– 4×4で作ってみよう

– 解いてみよう

$$x[i, j] = \begin{cases} 1 & ([i, j] = 1) \\ 2 & ([i, j] = 2) \\ 3 & ([i, j] = 3) \\ 4 & ([i, j] = 4) \end{cases}$$

[i は行, j は列を表す]

- 制約条件1: 各行に1~4を1つ (i.e., 行の和が10): 4本
ex) $x[1,1] + x[1,2] + x[1,3] + x[1,4] = 10$
- 制約条件2: 各列に1~4を1つ (i.e., 列の和が10): 4本
ex) $x[1,1] + x[2,1] + x[3,1] + x[4,1] = 10$
- 制約条件3: 各枠に1~4を1つ (i.e., 枠の和が10): 4本
ex) $x[1,1] + x[1,2] + x[2,1] + x[2,2] = 10$
- 目的関数: なんでもよい

覚え書き:

Classic LINDO Trial Version

Constraints:150

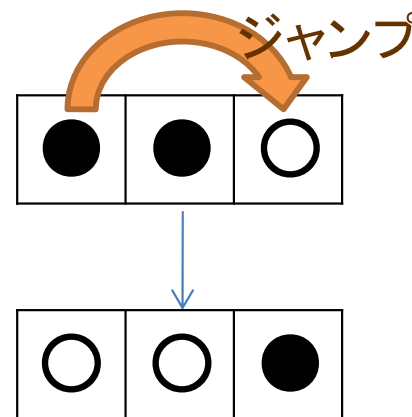
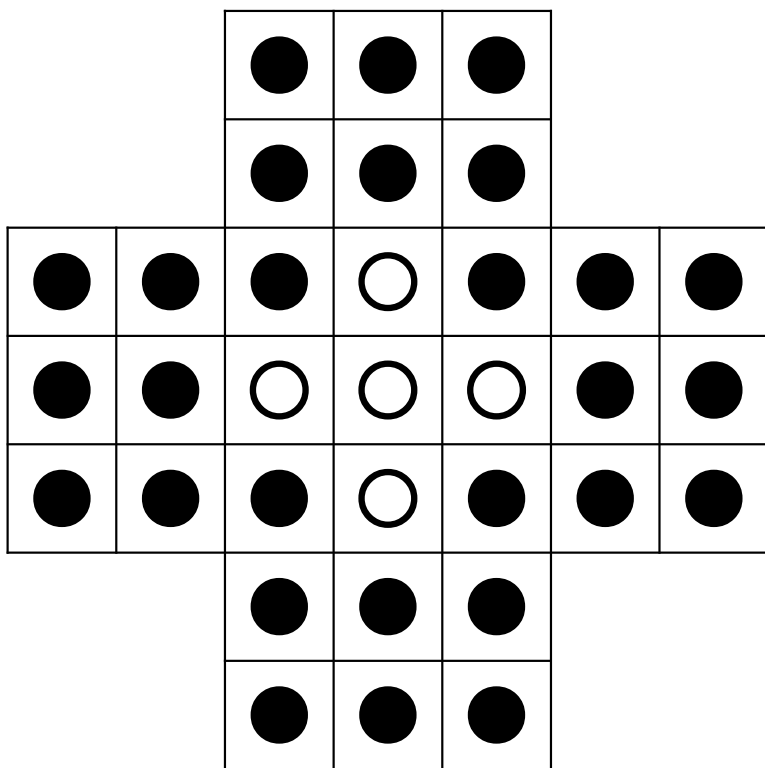
Variables:300

Int.Variables:30

Puzzleを解こう

- ペグソリティア (cf.[4])

- ペグ(黒)があるマスとないマス(白)が与えられる
- ペグをジャンプさせて望む配置に出来るか？

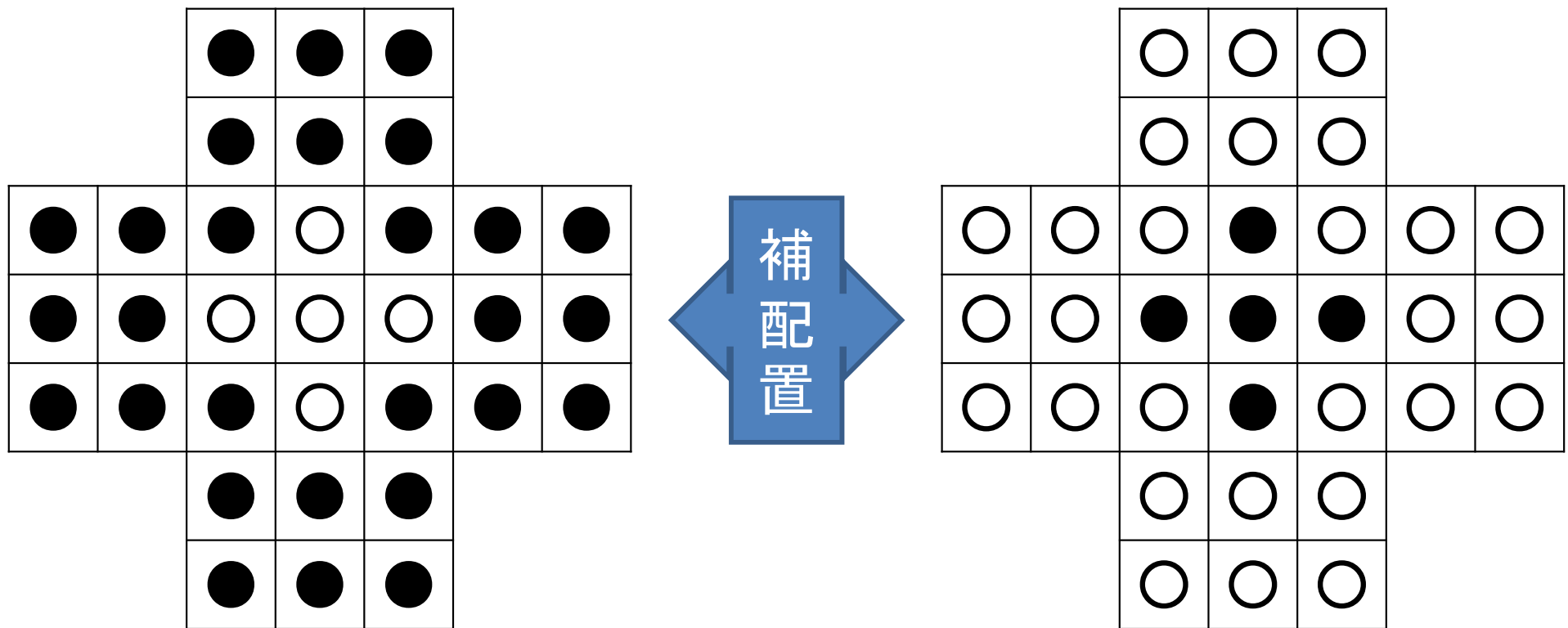


ジャンプは、
縦(上方向・下方向)
横(左方向・右方向)
の任意の3マスで上記配置の時にで
きる. 左の例では, 例えば上方向に
は3カ所ジャンプ可能な箇所がある

Puzzleを解こう

- ペグソリティア (cf.[4])

– 補配置: ペグのあるなしが逆転している配置

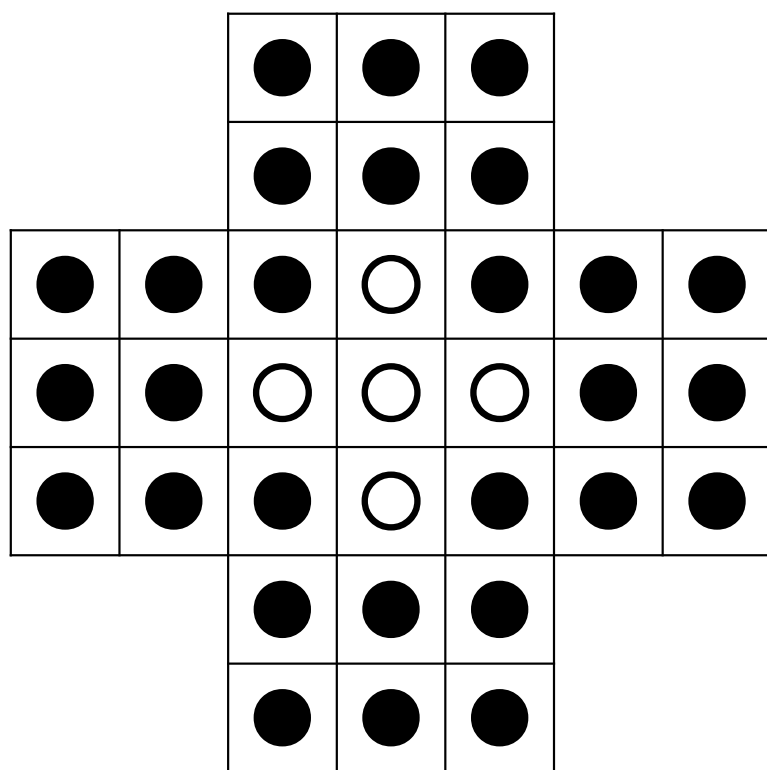


– Question?: ジャンプ操作で初期配置(左)をその補配置(右)にできるか?

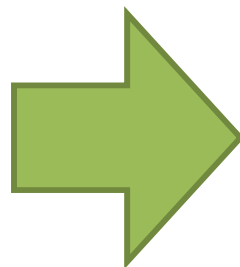
Puzzleを解こう

- ペグソリティア (cf.[4])

– パゴダ関数: $\text{pag}(p)$...配置 p に関する値を返す



配置 p^s



		-1	0	-1		
		1	1	1		
-1	1	0	1	0	1	-1
0	1	1	2	1	1	0
-1	1	0	1	0	1	-1
		1	1	1		
		-1	0	-1		

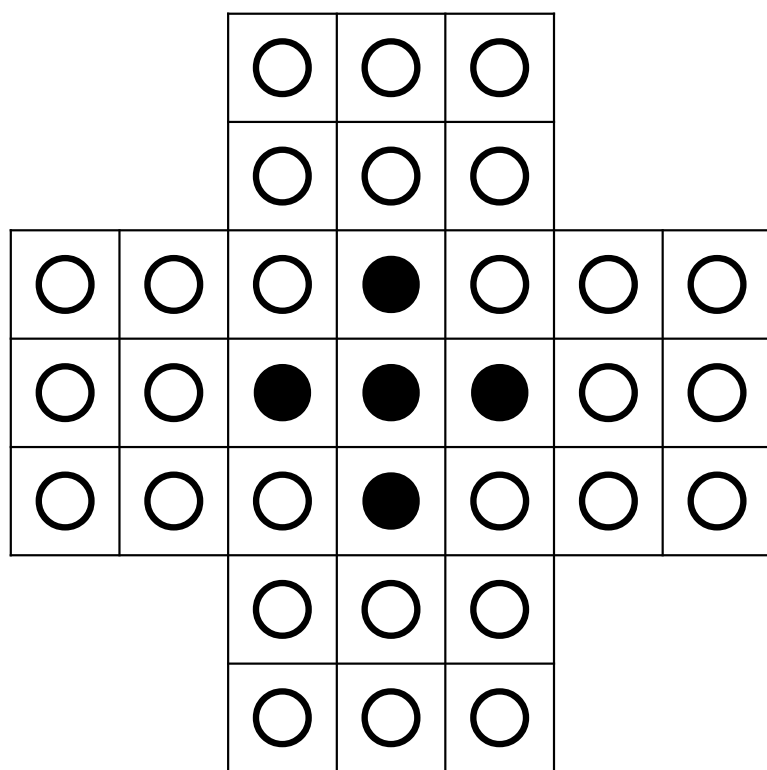
$$\text{pag}(p^s)=4$$

ペグのあるマスの数値の和

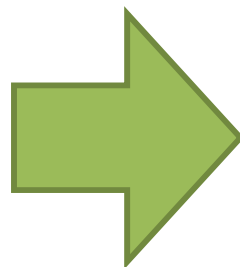
Puzzleを解こう

- ペグソリティア (cf.[4])

– パゴダ関数: $\text{pag}(p)$...配置 p に関する値を返す



配置 p^f



		-1	0	-1		
		1	1	1		
-1	1	0	1	0	1	-1
0	1	1	2	1	1	0
-1	1	0	1	0	1	-1
		1	1	1		
		-1	0	-1		

$\text{pag}(p^f)=6$

ペグのあるマスの数値の和

Puzzleを解こう

- ペグソリティア (cf.[4])

– パゴダ関数: $\text{pag}(p)$...配置 p に関する値を返す

		-1	0	-1		
		1	1	1		
-1	1	0	1	0	1	-1
0	1	1	2	1	1	0
-1	1	0	1	0	1	-1
		1	1	1		
		-1	0	-1		

〔性質〕

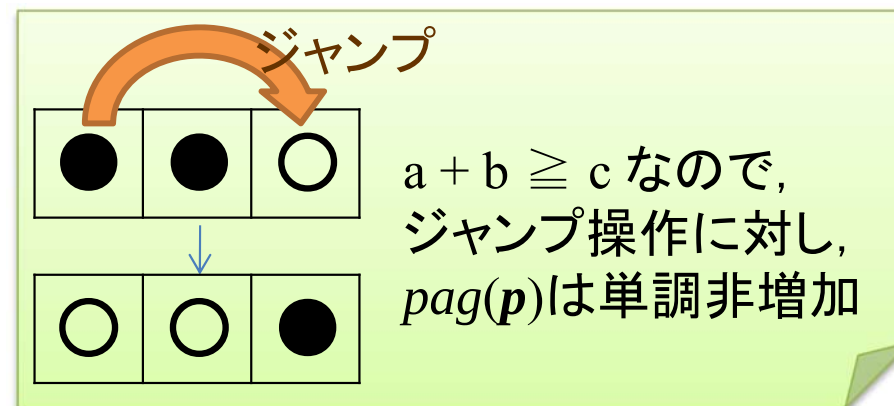
どの連続する3数 (a, b, c) についても

$$a + b \geq c$$

が成り立つ(故に $a \leq b + c$ も成立)

1	1	2
---	---	---

 $\rightarrow \begin{cases} 1 + 1 \geq 2 \\ 1 \leq 1 + 2 \end{cases}$

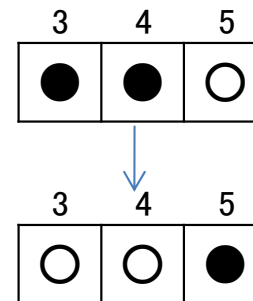
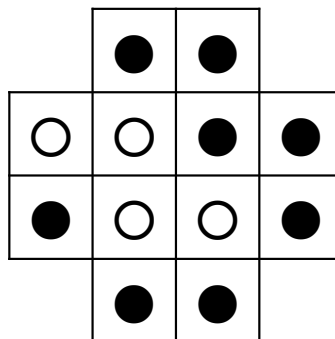
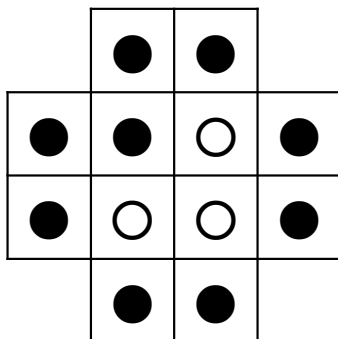
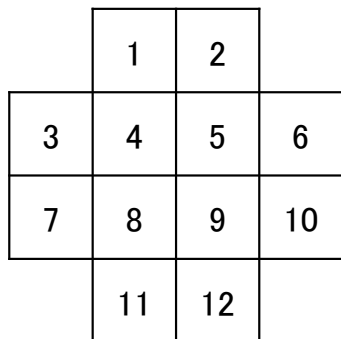


配置 p^1 $\xrightarrow{\text{ジャンプ}}$ 配置 p^2 のとき,

$$\text{pag}(p^1) \geq \text{pag}(p^2)$$

Puzzleを解こう

- ペグソリティア: パゴダ関数



$$p^s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

配置 p^s から
1回のジャンプ(a^1)
で配置 p^t に移る
ということは

$$p^t = p^s - a^1$$

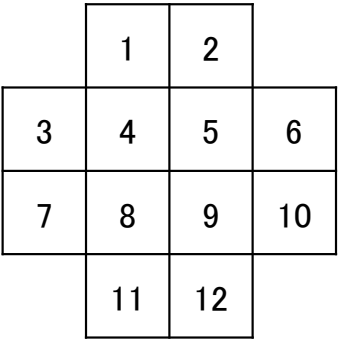
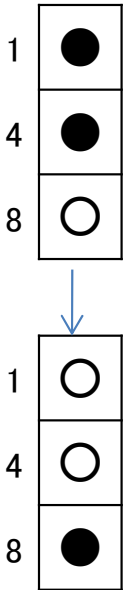
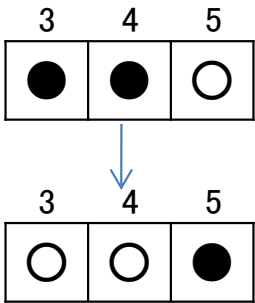
で表せる

配置を表すベクトル

ジャンプを表すベクトル

Puzzleを解こう

- ペグソリティア:パゴダ関数
- 全てのジャンプベクトル



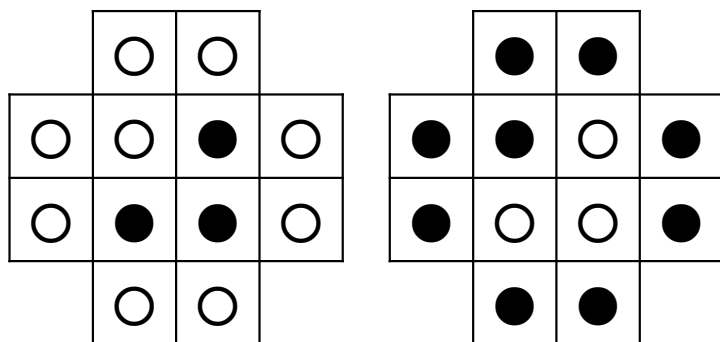
a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}	a^{13}	a^{14}	a^{15}	a^{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0
1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	-1	0	0	1	1	0	0	1	-1	0	0
-1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	-1
0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	-1	-1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	-1	1	0	0	1	1	0	0	-1	1	0	0	1	1
0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1

Puzzleを解こう

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

• ペグソリティア: パゴダ関数

– 初期配置 p^s から最終配置 p^f までの全てのジャンプ



$$\begin{aligned}
 p^f &= p^{f-1} - a^{i1} \\
 &= p^{f-2} - a^{i2} - a^{i1} \\
 &= p^{f-3} - a^{i3} - a^{i2} - a^{i1} \\
 &\dots \\
 &= p^s - \underbrace{a^{in} - \dots - a^{i3} - a^{i2} - a^{i1}}
 \end{aligned}$$

この中に a^1 が x^1 個含まれ, a^2 が x^2 個含まれ, ...

$$\begin{bmatrix} p^f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^s \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 - \dots - \begin{bmatrix} a^{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{16}$$

Puzzleを解こう

• ペグソリティア: パゴダ関数

– 初期配置 p^s から最終配置 p^f までの全てのジャンプ

$$\mathbf{a}^1 x^1 + \mathbf{a}^2 x^2 + \dots + \mathbf{a}^{16} x^{16} = p^s - p^f,$$

$$x^1, x^2, \dots, x^{16} \geq 0$$

従って, この線形不等式系が解 x を持たないなら, 初期配置 p^s から最終配置 p^f へジャンプで到達不可能.

注) 解 x を持っても到達可能とは限らない(ジャンプの順番を考慮していないから)

〔主問題(P)〕 ↑↓ 〔双対問題(D)〕	$\left \begin{array}{l} \max. \ 0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^{16} \\ \text{s.t.} \ \mathbf{a}^1 x^1 + \mathbf{a}^2 x^2 + \dots + \mathbf{a}^{16} x^{16} = p^s - p^f \\ \quad x^1, x^2, \dots, x^{16} \geq 0 \end{array} \right.$ $\left \begin{array}{l} \min. \ \mathbf{y}^T (p^s - p^f) \\ \text{s.t.} \ \mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 \geq 0, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 \geq 0, \dots, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^{16} \geq 0 \end{array} \right.$	(実行可能(最適値0) or 実行不能((D)は非有界)) 双対定理 ↑ 〔$\mathbf{y}^T (p^s - p^f) < 0$となる解$y$が存在〕 (実行可能〔∴〕自明解 $y=0$)
--	---	---

注) (P)が実行可能なら最適値0

(P)が実行不能 ↓ 双対定理 ↑ (D)が実行可能 〔非有界: $\mathbf{y}^T (p^s - p^f) < 0$となる解$y$が存在〕	〔∴〕(P)が実行可能と仮定し, 実行可能解xとすると, $0 = 0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^{16}$ $\leq \mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 x^1 + \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 x^2 + \dots + \mathbf{y}^T \mathbf{a}^{16} x^{16}$ $= \mathbf{y}^T (p^s - p^f) < 0 \text{ となり矛盾}$
---	--

Puzzleを解こう

• ペグソリティア: パゴダ関数

– 初期配置 p^s から最終配置 p^f までの全てのジャンプ(まとめ)

[A] 初期配置 p^s から最終配置 p^f までジャンプで到達不可能

[B] $\left(\begin{array}{l} \mathbf{a}^1 x^1 + \mathbf{a}^2 x^2 + \dots + \mathbf{a}^{16} x^{16} = p^s - p^f \\ x^1, x^2, \dots, x^{16} \geq 0 \end{array} \right)$ が解 x を持たない

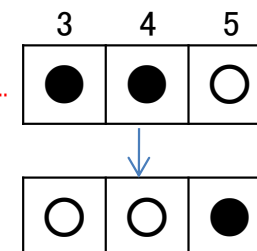
[C] $\left(\begin{array}{l} \mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 \geq 0, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 \geq 0, \dots, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^{16} \geq 0 \\ \mathbf{y}^T (p^s - p^f) < 0 \end{array} \right)$ が解 y を持つ

[C] の解 y についてパゴダ関数を $\text{pag}(p) := \mathbf{y}^T p$ と定義すると

$$\mathbf{y}^T (p^s - p^f) < 0 \iff \text{pag}(p^s) < \text{pag}(p^f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 \geq 0, \\ \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 \geq 0, \\ \dots \\ \mathbf{y}^T \mathbf{a}^{16} \geq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y_3 + y_4 - y_5 \geq 0 \\ y_6 + y_7 - y_8 \geq 0 \\ \dots \\ -y_5 + y_9 + y_{12} \geq 0 \end{array} \right.$$

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	



Puzzleを解こう

- パゴダ関数
– 最後の注意

〔主問題(P)〕

$$\begin{array}{|l} \max. \ 0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^{16} \\ \text{s.t.} \ \mathbf{a}^1 x^1 + \mathbf{a}^2 x^2 + \dots + \mathbf{a}^{16} x^{16} = \mathbf{p}^s - \mathbf{p}^f \\ \quad x^1, x^2, \dots, x^{16} \geq 0 \end{array}$$

p^s から p^f へ
到達不可能

?

実行不能

実行可能
〔最適値0〕

〔双対問題(D)〕

$$\begin{array}{|l} \min. \ \mathbf{y}^T (\mathbf{p}^s - \mathbf{p}^f) \\ \text{s.t.} \ \mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 \geq 0, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 \geq 0, \dots, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^{16} \geq 0 \end{array}$$

実行可能
〔非有界〕

$\mathbf{y}^T (\mathbf{p}^s - \mathbf{p}^f) < 0$
となる解 $\mathbf{y}$ が存在

実行可能
〔有界〕

$\mathbf{y}^T (\mathbf{p}^s - \mathbf{p}^f) = 0$
となる解 $\mathbf{y}$ が存在

パゴダ関数存在

$$\text{pag}(\mathbf{p}) = \mathbf{y}^T \mathbf{p}$$

演習

- ペグソリティア: パゴダ関数
 - パゴダ関数を求めてみよう

〔双対問題(D)〕

$$\begin{array}{|l} \min. \mathbf{y}^T (\mathbf{p}^s - \mathbf{p}^f) \\ \text{s.t. } \mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 \geq 0, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 \geq 0, \dots, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^{16} \geq 0 \end{array}$$



〔双対問題(D')〕

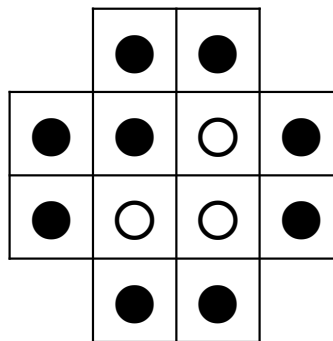
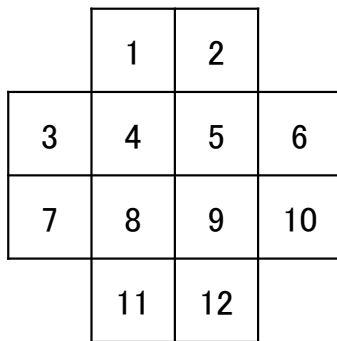
$$\begin{array}{|l} \min. \mathbf{y}^T (\mathbf{p}^s - \mathbf{p}^f) \\ \text{s.t. } \mathbf{y}^T \mathbf{a}^1 \geq 0, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^2 \geq 0, \dots, \mathbf{y}^T \mathbf{a}^{16} \geq 0 \\ \quad \underline{\mathbf{y}^T \mathbf{p}^s = 1} \end{array}$$

↑目的関数が非幽界であるコトへの対処
注) $\mathbf{y}$ を整数にするのは面倒だよ

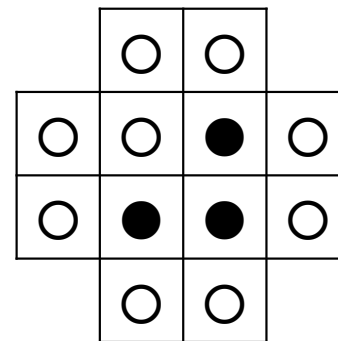
演習

- ペグソリティア: パゴダ関数

- やってみよう: 初期配置 p^s から最終配置 p^f まで到達可能?



p^s

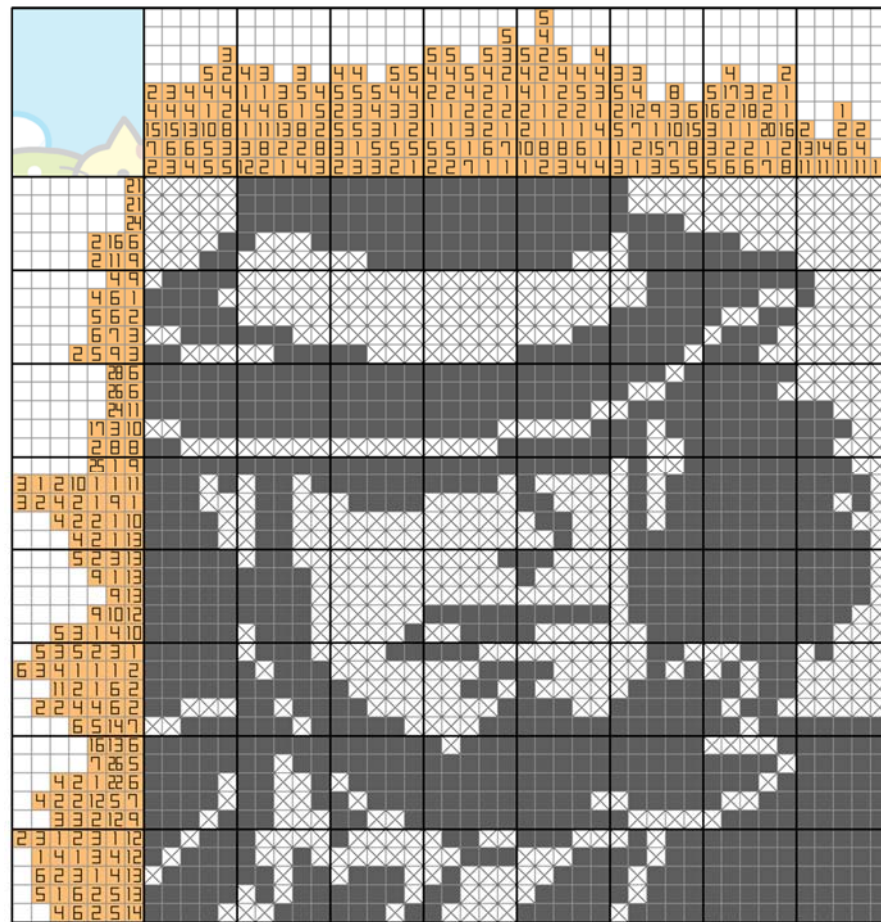
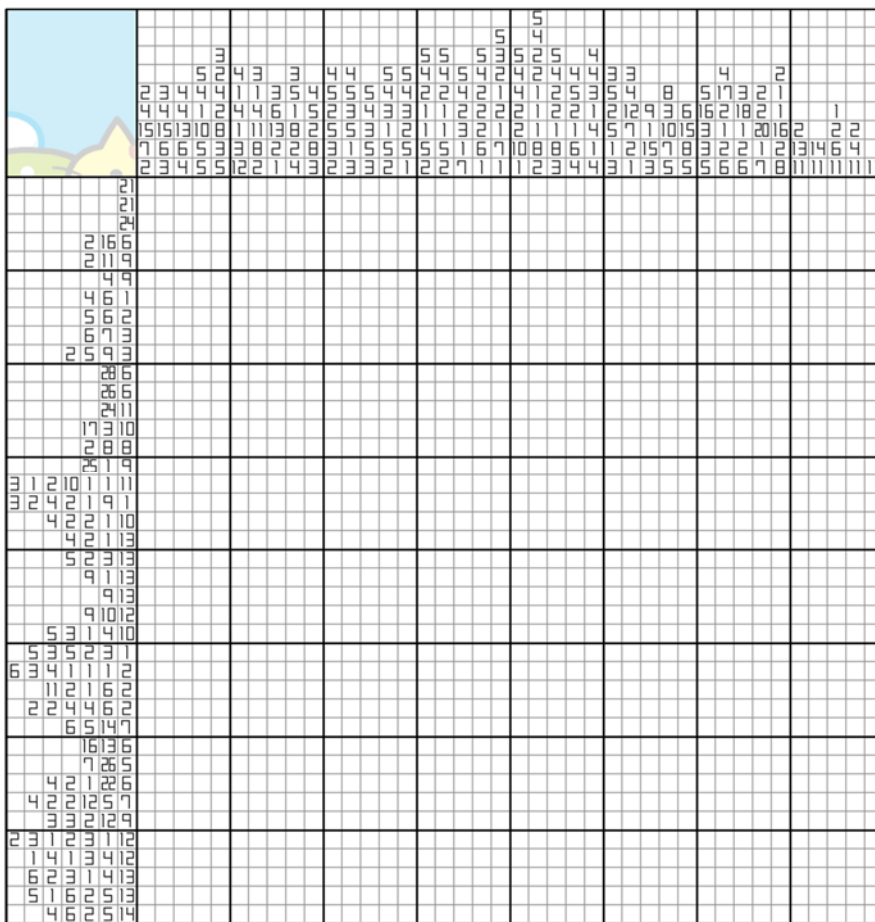


p^f

- 初期配置 p と最終配置 (補配置でなくてよい) を適当に考え, 到達不可能になるかどうか計算してみよう

Puzzleを解こう

- **ノノグラム（お絵かきロジック）** (cf.[3])
 - 縦・横のマスに、割り当てられた数字分、連続して色を塗る



参考文献

◆ モデル化に関する書籍

- [1] H.P.Williams, ``Model Building in Mathematical Programming(4ed.)'', Wiley (1999 [1978,1985,1990,1993]).
- [2] 大山達夫「最適化モデル分析」日科技連(1993).

◆ パズルのモデル化に関する講演・記事

- [3] 岡本吉央, “整数計画法によるパズル解法”, 組合せゲーム・パズルミニプロジェクト 第2回ミニ研究集会(2007/3/16)
- [4] 松井知己, “解けないパズルをLPで解く”, オペレーションズ・リサーチ, vol.53, no.11 (2008) pp.643-648.
- [5] S.Flannery, D.Flannery, 亀井よし子訳, “16歳のセアラが挑んだ世界最強の暗号”, 日本放送出版協会(2001)