意思決定科学：ゲーム理論1

情報学部　堀田敬介

2010/11/9,Sat.～

Contents

ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた.
2人に均等に与えたいのだが，2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い，けんかになる.

どうしたら
いいだろう?

仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

ケーキを仲良く

One divides,
the other chooses.

- You Cut, I Choose！
  - Bobにケーキを切らせ，Carolにケーキを選ばせる

ただし，これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」！

- 解は…
  - Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division”, p.9)

ケーキを仲良く

◆ 解の持つ2つの性質

- proportionality (An allocation is proportional.)
  - Each thinks he or she received a portion that has size or value of at least 1/n.
- envy-freeness (An allocation is envy-free.)
  - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, does not envy any other player.

プレイヤーが二人の場合は等価

ケーキを仲良く（３人いたら？）

H. Steinhaus, 1948

◆ The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)

1. Bob がケーキを1/3(とBobが思う通り)に切る
2. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘
   (少なくとも1つは acceptable cake があるという条件で)
3. Ted も Carol と同様のことを行う.
4. Case1: Carol(or Ted)が2個以上acceptable cake がある
   Ted → Carol → Bob の順にケーキを取る
5. Case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個
   Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて，残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う.

call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least 1/3 of the cake.

ケーキを仲良く（3人いたら？）

- The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes)
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - Bobはちょうど1/3（とBobが思う）piece に切る
    - Carol, Ted は acceptable cake を取る
  - envy-free ではない
    - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが，Carol は Ted を妬む可能性がある．（Tedが，彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので）
    - case2 : Carol, Ted は誰も妬まないが，Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある．（Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合，2人のいずれかが1/3以上（とBobが思う）cake を得るので）

ケーキを仲良く（n人いたら？）

H.W. Kuhn, 1967

- Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes) を n人版に拡張

  （Frobenius & Kӧnig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム）

  （4人版は Steinhaus も気づいていたらしい）

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- The Banach-Knaster last-diminisher procedure

  （Steinhaus が 1948年に2人（彼の学生，ポーランド人）のアイデアを論文の形で発表）

- ……

ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- The Banach-Knaster last-diminisher procedure (n players)
  - The partners being ranged A,B,C,…,N. A cuts from the cake an arbitrary part. B has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off. Whatever he does, C has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice, and so on up to N. The rule obliges the ``last-diminisher" to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of , the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake. After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder. (from ``Fair Division", p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

- The last-dimisher procedure
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - 切るプレイヤーがちょうど1/nと考えるpiece に切ること
  - envy-freeではない
    - 理由：例えば，ゲームを先に抜けたプレイヤーAが，ある段階で切られたケーキが1/nより大きい（とAが思う）ときでもそれを阻止できない．結果として1/nより大きいケーキが誰か（B）に行く（とAが思う）ので，AはBを妬む．

ゲーム理論とは何か？

- ゲーム的状況　game situations
  - 複数の意思決定主体（プレイヤー）が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ゲーム理論　game theory
  - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日（火）取得の情報

ゲーム理論とは何か？

- プレイヤー　player
  - 意思決定し，行動する主体．（2人，3人，…，n人，…，∞）
    - 例：個人，複数の個人から成る組織，政党，国家，…

プレイヤーの集合
$N=\{1, 2, \ldots, n\}$

- 戦略　strategy
  - プレイヤーが取りうる行動．（有限，無限）

プレイヤーiの戦略集合
$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\}\quad (i\in N)$

- 利得と利得関数　payoff
  - 各プレイヤーの戦略決定後，ゲームは終了し，結果が出る．結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値．利得 payoff，効用 utility.

プレイヤーiの利得関数
$f_i : S_1 \times S_2 \ldots \times S_n \rightarrow R \quad (i\in N)$

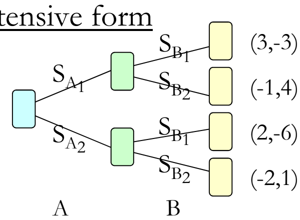
ゲームの定義
$G=(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{f_i\}_{i\in N})$

各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し，
Gは全てのプレイヤーの共有知識とする

ゲーム理論とは何か？

◆ ゲームの表現形式

- 展開形　extensive form



- 戦略形　strategic form，標準形　normal form

A＼B	S_{B_1}	S_{B_2}
S_{A_1}	3	1
S_{A_2}	-4	6

ゲーム理論とは何か？

◆ 非協力ゲームと協力ゲーム

- 各プレイヤーの戦略決定における前提

1. プレイヤー間には，各プレイヤーがとるべき戦略について，強制力のある取り決めは存在しない．

   拘束的合意が成立しない → 非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に，とるべき戦略についての合意が成り立ち，それに基づいて戦略決定する．

   拘束的合意が成立 → 協力ゲーム

2人非協力零和ゲーム

- Example1 :
  - 2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」をしている
  - プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う
  - 2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち，異なるならBさんの勝ち
  - 表を出して勝ったら相手から2円貰い，裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$N=\{1, 2\}$

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}, \quad (i \in N)$

$S_1=\{表, 裏\}, \quad S_2=\{表, 裏\}$

$f_i : S_1 \times S_2 \rightarrow R, \quad (i \in N)$

$f_1(表, 表) = 2 \quad f_2(表, 表) = -2$
$f_1(表, 裏) = -1 \quad f_2(表, 裏) = 1$
$f_1(裏, 表) = -2 \quad f_2(裏, 表) = 2$
$f_1(裏, 裏) = 1 \quad f_2(裏, 裏) = -1$

A君の利得表

A＼B	表	裏
表	2	-1
裏	-2	1

Bさんの利得表

A＼B	表	裏
表	-2	1
裏	2	-1

2人非協力零和ゲーム

- Example2 :
  - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理 minimax principle
  - Example2でプレイヤーAの思考
    最大化プレイヤー
    - 戦略s_{A_1}を取ったときの最悪の事態は
      min(-2, 4, -1) = -2（プレイヤーBが戦略s_{B_1}を取る）
    - 戦略s_{A_2}を取ったときの最悪の事態は
      min(2, 2, 1) = 1 （プレイヤーBが戦略s_{B_3}を取る）
    - 戦略s_{A_3}を取ったときの最悪の事態は
      min(4, -3, 0) = -3（プレイヤーBが戦略s_{B_2}を取る）

⇒ 戦略s_{A_2}を取る （最悪でも利得1が保証される）

もっと良い利得を得ることができるのか？

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理 minimax principle
  - Example2でプレイヤーAがBの立場で思考
    - Bが戦略s_{B_1}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_3}を取る
      max(-2, 2, 4) = 4
    - Bが戦略s_{B_2}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_1}を取る
      max(4, 2, -3) = 4
    - Bが戦略s_{B_3}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_2}を取る
      max(-1, 1, 0) = 1

⇒ 戦略s_{B_3}を取る （最悪でも損失1で済む）

Aは戦略s_{A_2}を取るとき，利得1を得られ，
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる．

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理

- Example2:

保証水準 security level

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-2	4	-1	-2	
s_{A_2}	2	2	1	1	1
s_{A_3}	4	-3	0	-3	
max	4	4	1		
min	1				

マキシミン値
maximin value

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

保証水準
security level

マキシミン原理
maximin principle
〔最大化プレイヤーの行動原理〕

ミニマックス値
minimax value

$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス原理
minimax principle
〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$$v_1 = v_2$$

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

◆ 均衡点とゲームの値

- 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると，どうなるのか？

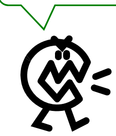
2人共に勝つことはあり得ない！

⇩

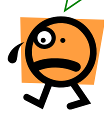
何らかの意味での**均衡**に到達

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$$

やむを
えない…



しかた
ない…



2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

$(s_{A_2}{}^*, s_{B_3}{}^*)$：ゲームの均衡点 equilibrium point

演習1：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？ （1），（2）それぞれのゲームについて考えよ

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	1	-1
s_{A_2}	-1	0	2
s_{A_3}	5	2	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	5	6	4
s_{A_2}	1	8	2
s_{A_3}	7	2	3

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：
    - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-4	2	0	-4	1
s_{A_2}	4	3	1	1	
s_{A_3}	1	-3	2	-3	
max	4	3	2		
min	2				

マキシミン戦略

$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- **Proposition1**

  利得行列A=[a_{ij}]が与えられた時，以下が成り立つ

  $$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

⇩

いかなる場合に均衡点が存在し，
ゲームが厳密に確定的であるか？

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- 鞍点 saddle point
  - 行列A=[a_{ij}]において，任意の i, j に対し，

$$\boxed{a_{ij_0} \le \boxed{a_{i_0 j_0}} \le a_{i_0 j}}$$

が成り立つとき，(i_0, j_0)をこの行列の鞍点といい，$a_{i_0 j_0}$ を鞍点値という.

$$\boxed{a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0}}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1} & \cdots & a_{i_0 j_0} & \cdots & a_{i_0 n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boxed{a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}}$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- **Theorem1**
  - (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は，その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること．またこのとき，鞍点が均衡点．

- 最適戦略 optimal strategy
  - 均衡点(i*, j*)は鞍点なので，プレイヤーAが戦略 i* を用いると，プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ，また，Bが戦略 j* を取る限り，Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない.

⇒ 戦略 i* がAの最適戦略

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - **Theorem2**
    - 厳密に確定的な零和ゲームにおいて，均衡点が複数ある場合，各均衡点の値は等しい．また，(i^*, j^*), (i_0, j_0) が均衡点ならば，(i^*, j_0), (i_0, j^*)も均衡点である．

均衡戦略は<u>交換可能</u>

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} j_0 & j^* \end{array} \\
\begin{array}{c} i_0 \\ i^* \end{array}
\begin{bmatrix} a_{i_0 j_0} & a_{i_0 j^*} \\ a_{i^* j_0} & a_{i^* j^*} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

⇒ 主体的な賭，最適な賭の確率

⇒ 期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

$$p_i \geq 0, (i=1,2,3)$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$q_j \geq 0, (j=1,2,3)$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

プレイヤーBが各戦略をとったときの，プレイヤーAの期待効用

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = p_2 + 2p_3 \end{cases}$$

よって，Bが各戦略を(q_1,q_2,q_3)の確率でとったときの，Aの期待効用

$$E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

純粋戦略
pure strategy

混合戦略
mixed strategy

プレイヤーAが各戦略をとったときの，プレイヤーBの期待効用

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = -4q_1 + 2q_2 \\ E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = 4q_1 + 3q_2 + q_3 \\ E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q}) = q_1 - 3q_2 + 2q_3 \end{cases}$$

Aが各戦略を(p_1,p_2,p_3)の確率でとったときの，Bの期待効用

$$E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3$$

まとめると，プレイヤーA, Bがそれぞれ確率(p_1,p_2,p_3), (q_1,q_2,q_3)で各戦略をとったとき，各プレイヤーの期待効用は以下のようになる．

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3 \end{cases}$$

また，このとき明らかに，以下が成り立つ．

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

プレイヤーAは期待効用最大化！
プレイヤーBは期待損失最小化！

2人非協力零和ゲーム

◆ 支配戦略

- Example3:

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

被支配戦略 → s_{A_1}

支配戦略 → s_{A_2}

支配する dominate

戦略の支配 domination of strategies
プレイヤー i の戦略 h, k について,
戦略 h が戦略 k を支配するとは,
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して,

$$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$$

が成立すること.

•＝だと「同等」
•≧かつ≠
だと「弱支配」

補足)通常は, 被弱支配戦略は除去しない→ 共有地の悲劇

被支配戦略除去の原理
「支配される戦略は用いない」

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	4 >	3	1
s_{A_3}	1 >	-3	2

A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	3	1
s_{A_3}	-3	2

補足:被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ **ゲームは支配可解 dominance solvable**

2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 最適混合戦略

- Example3:

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\
&= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\
&= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2)
\end{aligned}
$$

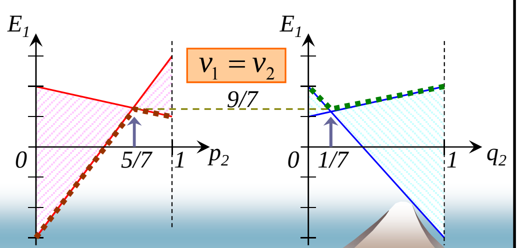
$$
\left[= \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right]
$$

$$
\begin{cases} E(\boldsymbol{p},(1,0)) = 6p_2 - 3 \\ E(\boldsymbol{p},(0,1)) = -p_2 + 2 \end{cases}
$$

Aの最適戦略 $\boldsymbol{p}^*=(0, 5/7, 2/7)$

$$
\begin{cases} E((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_2 + 1 \\ E((0,1),\boldsymbol{q}) = -5q_2 + 2 \end{cases}
$$

Bの最適戦略 $\boldsymbol{q}^*=(0, 1/7, 6/7)$



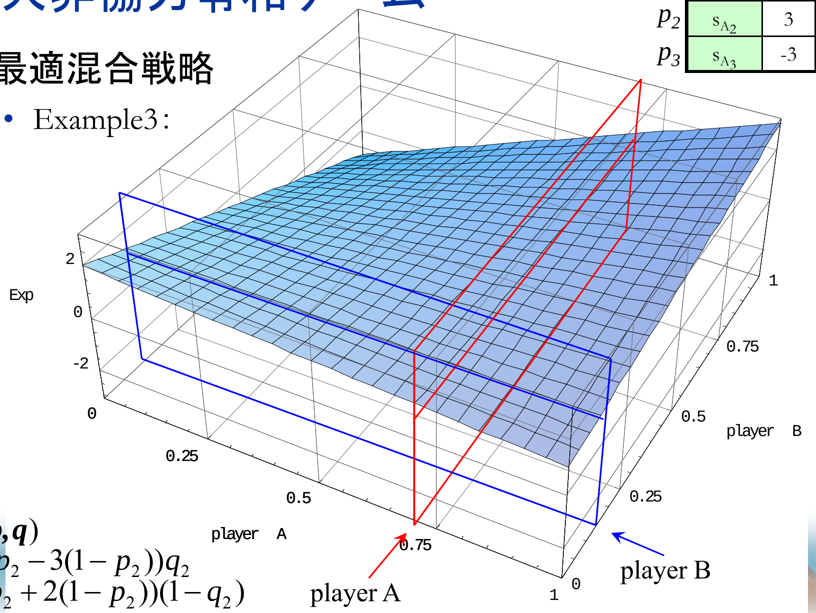
($\boldsymbol{p}^*$,$\boldsymbol{q}^*$):均衡解

2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 最適混合戦略

- Example3 :



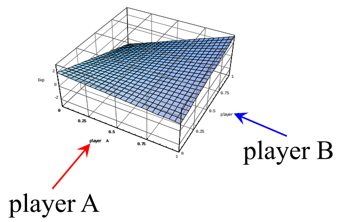
$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2)$$

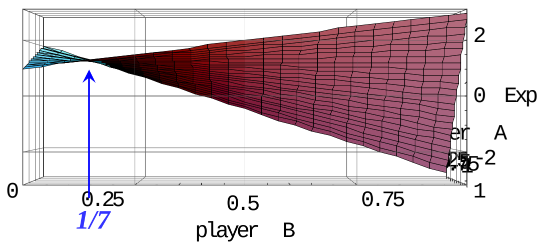
2人非協力零和ゲーム

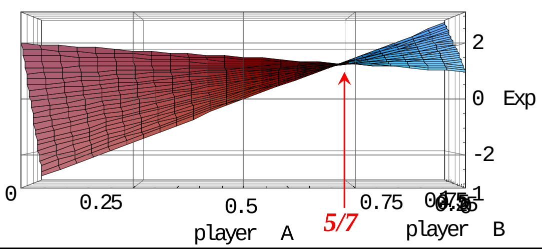
		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 最適混合戦略

- Example3 :







2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 混合戦略の意味

- p^*,q^* の確率のくじをつくって，引いていずれかに決する方法が，なぜ合理的な決定方法なのか？

  Aの最適戦略 $p^*=(0, 5/7, 2/7)$　　Bの最適戦略 $q^*=(0, 1/7, 6/7)$

- player A は S_{A_2}なら 3，S_{A_3}なら 2 が望ましいが，$p_2^* q_3^* + p_3^* q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる．

  しかし，これは事後的 ⇨

しまった！

- このような状況も全て考慮に入れた上で，最適戦略が決定された！

演習2：

◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

（3）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}
s_{A_1}	3	1	3	4
s_{A_2}	4	4	2	3
s_{A_3}	2	3	1	2

（4）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	2	4
s_{A_2}	-1	3	0
s_{A_3}	2	1	-2

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーA, Bの純粋戦略

$$S_A = \{s_{A_i} \mid i = 1,\cdots,m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j = 1,\cdots,n\}$$

  - プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

利得関数

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

  - プレイヤーA, Bの混合戦略

$$\boldsymbol{p} = (p_1,\cdots,p_m) \longrightarrow s_{A_i} = (0,\cdots,1,\cdots,0)$$
$$\begin{cases} p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ p_1,\cdots,p_m \geq 0, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{q} = (q_1,\cdots,q_n) \longrightarrow s_{B_j} = (0,\cdots,1,\cdots,0)$$
$$\begin{cases} q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ q_1,\cdots,q_n \geq 0 \end{cases}$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーAの保証水準

$$\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_1 = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

$\boldsymbol{p}$ を操作して期待利得最大

  - プレイヤーBの保証水準

$$\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_2 = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

$\boldsymbol{q}$ を操作して期待損失最小

  - **Proposition2**

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \leq \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

- **Theorem3**

$$\max_{p}\min_{q} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \min_{q}\max_{p} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

また，これを成立させる戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ を**均衡点**といい，均衡点における利得 $v(\boldsymbol{A})$ をゲームの値という．

$$v(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{p}^{*T} \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

- **Theorem4**

戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が関数 $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の**鞍点**であること．即ち，

$$\forall \boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\quad E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q})$$

が成立すること．

Bが $\boldsymbol{q}^*$ の時，Aは $\boldsymbol{p}^*$ にするのが利得最大

Aが $\boldsymbol{p}^*$ の時，Bは $\boldsymbol{q}^*$ にするのが損失最小

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- **Theorem5**

$v(\boldsymbol{A})$ がゲームの値，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j,\quad E(s_{A_i},\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,s_{B_j})$$

が成立すること．

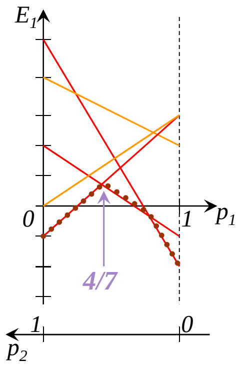
$$\forall i = 1,\cdots,m,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$$

$$\forall j = 1,\cdots,n,\quad E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example4

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}	s_{B_5}
p_1	s_{A_1}	-2	-1	2	3	3
p_2	s_{A_2}	5	2	4	-1	0
	s_{A_3}	4	1	3	-2	-1



$$E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$$
$$\cancel{E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2}$$
$$E(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$$
$$E(\boldsymbol{p}, s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$$
$$\cancel{E(\boldsymbol{p}, s_{B_5}) = 3p_1}$$

$$\boldsymbol{p}^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example5：一般の2×2ゲーム

		q_1	q_2
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p_1	s_{A_1}	a_{11}	a_{12}
p_2	s_{A_2}	a_{21}	a_{22}

鞍点が存在すればそれが**均衡点**．
なければ，混合戦略を考えるが，
このとき，必ず $E(\boldsymbol{p},s_{B_1})$ と $E(\boldsymbol{p},s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1},\boldsymbol{q})$ と $E(s_{A_2},\boldsymbol{q})$ は交点を持つ．

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}\right)$$
$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}\right)$$

演習3：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーAの利得行列と混合戦略 $\boldsymbol{p}$

$$
\begin{array}{c}
p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\
E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\
\vdots \\
E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m
\end{cases}
$$

$$
\max_{\boldsymbol{p}} \min \{E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}), E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\boldsymbol{p}, s_{B_n})\}
$$

まとめると…

$$
\begin{array}{ll}
\max. & u \\
s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\
 & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\
 & \cdots \\
 & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\
 & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\
 & p_1, \ \cdots, \ p_m \geq 0
\end{array}
$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーBの損失行列（Aの利得行列）と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$
\begin{array}{cccc}
q_1 & q_m & \cdots & q_n
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
E(s_{A_1},\boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\
E(s_{A_2},\boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\
\vdots \\
E(s_{A_m},\boldsymbol{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n
\end{cases}
$$

$$\min_{\boldsymbol{q}} \max\left\{E(s_{A_1},\boldsymbol{q}), E(s_{A_2},\boldsymbol{q}), \cdots, E(s_{A_m},\boldsymbol{q})\right\}$$

まとめると…

$$
\begin{array}{ll}
\min. w & \\
s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \le w \\
 & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \le w \\
 & \cdots \\
 & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \le w \\
 & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\
 & q_1, \ \cdots, \ q_n \ge 0
\end{array}
$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題（LPの主問題：**P**） ⇔ 主・双対 ⇔ プレイヤーBの最適化問題（LPの双対問題：**D**）

$$
\begin{array}{ll}
\max. u & \\
s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \ge u \\
 & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \ge u \\
 & \cdots \\
 & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \ge u \\
 & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\
 & p_1, \ \cdots, \ p_m \ge 0
\end{array}
$$

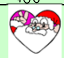
$$
\begin{array}{ll}
\min. w & \\
s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \le w \\
 & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \le w \\
 & \cdots \\
 & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \le w \\
 & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\
 & q_1, \ \cdots, \ q_n \ge 0
\end{array}
$$

注）（**P**）（**D**）ともに自明解（$\boldsymbol{p}=(1,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{q}=(1,0,\ldots,0)$）があるので実行可能.
→双対定理より，最適解が存在し，最適値は一致する

Theorem6
（P），（D）の最適解が（$\boldsymbol{p}^*, u^*$），（$\boldsymbol{q}^*, w^*$）のとき，（$\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*$）がゲームの均衡点であり，$v:= u^* = w^*$がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

A＼B				min	max
	0	2	-7	-7	-2
	-2	0	4	-2	
	7	-4	0	-4	
max	7	2	4		
min		2			

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\neq$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

	A＼B	 q_1	 q_2	 q_3
p_1		0	2	-7
p_2		-2	0	4
p_3		7	-4	0

$$\begin{array}{l} \max.\, u \\ s.t. \quad -2p_2 + 7p_3 \geq u \\ \quad 2p_1 - 4p_3 \geq u \\ \quad -7p_1 + 4p_2 \geq u \\ \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ \quad p_1,\ p_2,\ p_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min.\, w \\ s.t. \quad 2q_2 - 7q_3 \leq w \\ \quad -2q_1 + 4q_3 \leq w \\ \quad 7q_1 - 4q_2 \leq w \\ \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ \quad q_1,\ q_2,\ q_3 \geq 0 \end{array}$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

(p_1^*, p_2^*, p_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692), u^*=0
(q_1^*, q_2^*, q_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692), w^*=0

演習4：

- LPによる均衡解の求解
  - 2人のプレイヤーA, Bは，プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）が以下で与えられるゲームをする．各プレイヤーの問題をLPで表し，均衡解とゲームの値を求めよ．

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	1	5	-2
s_{A_2}	4	1	3
s_{A_3}	-2	3	6

参考文献

- S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division'', Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981,2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2008）

- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣（2000）
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2001）
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版（2003）
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房（2005）
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）