

# 意思決定科学： ゲーム理論2

情報学部 堀田敬介

2010/11/30, Tue. ~



## Contents

- ❁ **2人非協力非零和ゲーム**
  - ❁ 定義: ゲームのルール, 双行列
  - ❁ 例: 囚人のジレンマ, 面会ゲーム, 恋人達のジレンマ, ...
  - ❁ 最適応答, **Nash**均衡点
- ❁ **Nash**均衡点と線形相補性問題 (**LCP**)
- ❁ 戦略形ゲームの社会・経済問題への応用例



## 2人非協力非零和ゲーム

### Example:

- プレイヤーはAとBの2人
- 各プレイヤーは、独立に自分の戦略を決定 (非協力)
- プレイヤーの利得の和は一定とは限らない (非零和)
- 純粋戦略の数は有限

$$N = \{A, B\}$$

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}\}, (i=A, B)$$

$$S_A = \{s_{A1}, s_{A2}\}, S_B = \{s_{B1}, s_{B2}\}$$

$$f_i : S_A \times S_B \rightarrow R, (i=A, B)$$

$$\begin{array}{ll} f_A(s_{A1}, s_{B1}) = 2 & + f_B(s_{A1}, s_{B1}) = 3 \quad \neq 0 \\ f_A(s_{A1}, s_{B2}) = -1 & + f_B(s_{A1}, s_{B2}) = -2 \quad \neq 0 \\ f_A(s_{A2}, s_{B1}) = -2 & + f_B(s_{A2}, s_{B1}) = -1 \quad \neq 0 \\ f_A(s_{A2}, s_{B2}) = 1 & + f_B(s_{A2}, s_{B2}) = 1 \quad \neq 0 \end{array}$$

A, Bの利得表

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$
$s_{A1}$	(2, 3)	(-1, -2)
$s_{A2}$	(-2, -1)	(1, 1)



## 2人非協力非零和ゲーム

### 双行列ゲーム

和が零(一定)という条件はない(非零和)

- 利得関数

$$\forall i, j, f_A(s_{A_i}, s_{B_j}) = a_{ij}, f_B(s_{A_i}, s_{B_j}) = b_{ij}$$

- 利得行列

$$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$$

プレイヤーBの戦略(n個)の利得(右側)

$$\left[ \begin{array}{cccc} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{array} \right] =: (A, B)$$

プレイヤーA  
の戦略(m個)  
の利得(左側)

双行列



## 2人非協力非零和ゲーム

性の戦い, 男女の戦い, 逢引きのジレンマ, ...

### 例1: 恋人達のジレンマ **battle of sexes**

- ある一組のカップルがデートをしたいと思っている
- 男性は野球観戦を希望し, 女性は映画鑑賞がしたい
- 各々が好きなものを見るより一緒にいることの方が大事

男\女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1$$

$$\max_j \min_i b_{ij} = -1$$

互いに支配戦略は持たない  
ミニマックス原理に従うと, 互いにどちらの戦略でも良い?  
(または各戦略のマックスが大きくなる方を選ぶ!?)



## 2人非協力非零和ゲーム

### 例1: 恋人達のジレンマ **battle of sexes**

- 零和ゲームの時と同じ方法で, 混合戦略で期待利得最大化すると...

$$\begin{cases} E_A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + p_2q_2 \\ E_B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + 2p_2q_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_A(\mathbf{p}, (1,0)) = 3p_1 - 1 \\ E_A(\mathbf{p}, (0,1)) = -2p_1 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} E_B((1,0), \mathbf{q}) = 2q_1 - 1 \\ E_B((0,1), \mathbf{q}) = -3q_1 + 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow (\hat{p}, \hat{q}) = \left( \left( \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right), \left( \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right) \right), \quad E_A(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{5}, \quad E_B(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{5}$$

ところが...

$$E_A(\mathbf{p}, \hat{q}) = p_1 - \frac{1}{5} \quad E_B(\hat{p}, \mathbf{q}) = -q_1 + \frac{4}{5}$$

**B**が  $\hat{q}$  をとるなら **A**は  $\hat{p}$  ではなく(1,0)にする方が期待利得が高くなる!

**A**が  $\hat{p}$  をとるなら **B**は  $\hat{q}$  ではなく(0,1)にする方が期待利得が高くなる!

均衡しない

つまり, 相手が純粋戦略を取ってきたときだけの自分の混合戦略を考えて期待利得を求めるやり方では, 均衡解を求められない



## 2人非協力非零和ゲーム

2人零和ゲームでは、  
ミニマックス原理は  
最適応答原理に帰着

### Definition 最適応答と最適応答対応

#### 最適応答 best response

- プレイヤーAの戦略  $\bar{s}_A \in S_A$  が、プレイヤーBの戦略  $s_B \in S_B$  に対する**最適応答**であるとは、以下が成り立つこと

$$f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \quad \leftarrow \text{純粋戦略の場合}$$

$$E_A(\bar{p}, q) = \max_p E_A(p, q) \quad \leftarrow \text{混合戦略の場合}$$

#### 最適応答対応 best response correspondence

- Bの戦略  $s_B \in S_B$  に対するAの最適応答の集合

$$R_A(s_B) = \{ \bar{s}_A \in S_A \mid f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \} \quad \leftarrow \text{純粋戦略の場合}$$

$$R_A(q) = \{ p \mid E_A(\bar{p}, q) = \max_p E_A(p, q) \} \quad \leftarrow \text{混合戦略の場合}$$

を、**プレイヤーAの最適応答対応**とよび、

$$D_A = \{ (s_A, s_B) \mid s_A \in R_A(s_B), s_B \in S_B \}$$

を、プレイヤーAの**最適応答集合**とよぶ



最適応答原理

## 2人非協力非零和ゲーム

### 最適応答と最適応答対応

- プレイヤーA, Bが各々最適応答をとる場合、その組の集合は

$$D := D_A \cap D_B \quad \leftarrow \text{互いに最適応答なら均衡する (D} \neq \emptyset \text{なら均衡) となる}$$

例:

A \ B	S <sub>B1</sub>	S <sub>B2</sub>	S <sub>B3</sub>
S <sub>A1</sub>	(7,7)	(0,8)	(5,5)
S <sub>A2</sub>	(8,0)	(6,6)	(2,7)
S <sub>A3</sub>	(4,5)	(3,1)	(6,2)

プレイヤーBの(純粋戦略での)最適応答

$$s_{B1} \rightarrow \max\{7,8,5\} = 8 \quad R_B(s_{A1}) = \{s_{B2}\}$$

$$s_{B2} \rightarrow \max\{0,6,7\} = 7 \quad R_B(s_{A2}) = \{s_{B3}\}$$

$$s_{B3} \rightarrow \max\{5,1,2\} = 5 \quad R_B(s_{A3}) = \{s_{B1}\}$$

$$D_B = \{ (s_{A2}, s_{B3}), (s_{A1}, s_{B2}), (s_{A3}, s_{B1}) \}$$

プレイヤーAの(純粋戦略での)最適応答

$$s_{B1} \rightarrow \max\{7,8,4\} = 8 \quad R_A(s_{B1}) = \{s_{A2}\}$$

$$s_{B2} \rightarrow \max\{0,6,3\} = 6 \quad R_A(s_{B2}) = \{s_{A2}\}$$

$$s_{B3} \rightarrow \max\{5,2,6\} = 6 \quad R_A(s_{B3}) = \{s_{A3}\}$$

$$D_A = \{ (s_{A2}, s_{B1}), (s_{A2}, s_{B2}), (s_{A3}, s_{B3}) \}$$

$D = \emptyset$  より、  
純粋戦略のみでは  
均衡しない



## 2人非協力非零和ゲーム

Nash均衡点は、零和ゲームの均衡点(鞍点)を含む一般的な概念

### Definition Nash均衡点 Nash equilibrium point

- (混合)戦略の組  $(p^*, q^*)$  が次の条件を満たすとき,  $(p^*, q^*)$  を **Nash均衡点** とよぶ
 
$$E_A(p^*, q^*) \geq E_A(p, q^*) \quad \forall p \quad \leftarrow \text{Bが}q^*\text{をとるならAは}p^*\text{がベスト}$$

$$E_B(p^*, q^*) \geq E_B(p^*, q) \quad \forall q \quad \leftarrow \text{Aが}p^*\text{をとるならBは}q^*\text{がベスト}$$

### Theorem 1

- (混合)戦略の組  $(\hat{p}, \hat{q})$  が互いに最適応答であるならば **Nash均衡点** であり, 逆も成り立つ. 即ち, **Nash均衡点** の集合を  $E$  とすると,  $E = D_A \cap D_B$

### Theorem 2

- (混合)戦略の組  $(p^*, q^*)$  が **Nash均衡点** であるための必要十分条件は

$$E_A(p^*, q^*) \geq E_A(s_A, q^*) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$E_B(p^*, q^*) \geq E_B(p^*, s_B) \quad \forall j = 1, \dots, n$$



## 2人非協力非零和ゲーム

### 2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

$$p_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [A, B] \quad \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

プレイヤーA, Bが混合戦略をとった際の期待利得

$$E_A(p, q) = p^T A q$$

$$= \{(a_{11} - a_{21}) + (a_{22} - a_{12})\} p_1 q_1 - (a_{22} - a_{12}) p_1 + (a_{21} - a_{22}) q_1 + a_{22}$$

$$= (\tilde{r} + \hat{r}) p_1 q_1 - \hat{r} p_1 + \tilde{r} q_1 + a_{22}$$

$$E_B(p, q) = p^T B q$$

$$= \{(b_{11} - b_{21}) + (b_{22} - b_{12})\} p_1 q_1 - (b_{22} - b_{12}) p_1 + (b_{21} - b_{22}) q_1 + b_{22}$$

$$= (\tilde{c} + \hat{c}) p_1 q_1 - \hat{c} p_1 + \tilde{c} q_1 + b_{22}$$

Theorem 2 より,

**Nash均衡点**  $\iff$  
$$\begin{cases} E_A(p, q) \geq E_A((1,0), q) \\ E_A(p, q) \geq E_A((0,1), q) \\ E_B(p, q) \geq E_B(p, (1,0)) \\ E_B(p, q) \geq E_B(p, (0,1)) \end{cases}$$



## 2人非協力非零和ゲーム

### 2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

プレイヤーAの最適応答について

$$\begin{aligned} & \begin{cases} E_A(p, q) \geq E_A((1,0), q) \\ E_A(p, q) \geq E_A((0,1), q) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})p_1q_1 - \hat{r}p_1 + \tilde{r}q_1 + a_{22} \geq (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} + \tilde{r}q_1 + a_{22} \\ (\bar{r} + \hat{r})p_1q_1 - \hat{r}p_1 + \tilde{r}q_1 + a_{22} \geq \tilde{r}q_1 + a_{22} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \{(\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r}\}(1 - p_1) \leq 0 \\ \{(\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r}\}p_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

故に,  $p \in R_A(q)$  となるためには,

$$\begin{aligned} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} > 0 \text{ となる } q_1 & \rightarrow \begin{cases} 1 - p_1 \leq 0 \\ p_1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow p_1 = 1 \\ (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 0 \text{ となる } q_1 & \rightarrow \begin{cases} 1 - p_1 : \text{任意} \\ p_1 : \text{任意} \end{cases} \rightarrow p_1 : \text{任意} \\ (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} < 0 \text{ となる } q_1 & \rightarrow \begin{cases} 1 - p_1 \geq 0 \\ p_1 \leq 0 \end{cases} \rightarrow p_1 = 0 \end{aligned}$$



## 2人非協力非零和ゲーム

### 2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

プレイヤーBの最適応答について

$$\begin{aligned} & \begin{cases} E_B(p, q) \geq E_B(p, (1,0)) \\ E_B(p, q) \geq E_B(p, (0,1)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (\bar{c} + \hat{c})p_1q_1 - \hat{c}p_1 + \tilde{c}q_1 + b_{22} \geq (\bar{c} + \hat{c})p_1 - \hat{c}p_1 + \tilde{c} + b_{22} \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1q_1 - \hat{c}p_1 + \tilde{c}q_1 + b_{22} \geq -\hat{c}p_1 + b_{22} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \{(\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c}\}(1 - q_1) \leq 0 \\ \{(\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c}\}q_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

故に,  $q \in R_B(p)$  となるためには,

$$\begin{aligned} (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} > 0 \text{ となる } p_1 & \rightarrow \begin{cases} 1 - q_1 \leq 0 \\ q_1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow q_1 = 1 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = 0 \text{ となる } p_1 & \rightarrow \begin{cases} 1 - q_1 : \text{任意} \\ q_1 : \text{任意} \end{cases} \rightarrow q_1 : \text{任意} \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} < 0 \text{ となる } p_1 & \rightarrow \begin{cases} 1 - q_1 \geq 0 \\ q_1 \leq 0 \end{cases} \rightarrow q_1 = 0 \end{aligned}$$



## 2人非協力非零和ゲーム

### 2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

例:

		$q_1$	$q_2$
A \ B	$S_{B1}$	$S_{B2}$	
$p_1$	$S_{A1}$	(6,5)	(2,7)
$p_2$	$S_{A2}$	(3,4)	(6,1)



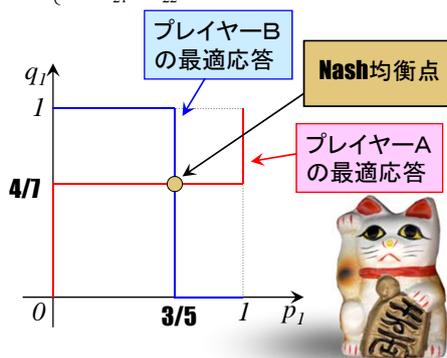
$$\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} = 6 - 3 = 3 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 6 - 2 = 4 \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} = 3 - 6 = -3 \\ \bar{c} = b_{11} - b_{21} = 5 - 4 = 1 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = 1 - 7 = -6 \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$(\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 7q_1 - 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} q_1 > 4/7 \rightarrow p_1 = 1 \\ q_1 = 4/7 \rightarrow p_1 : \text{任意} \\ q_1 < 4/7 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases}$$

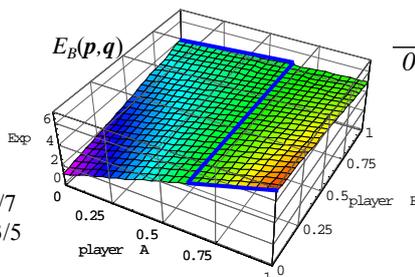
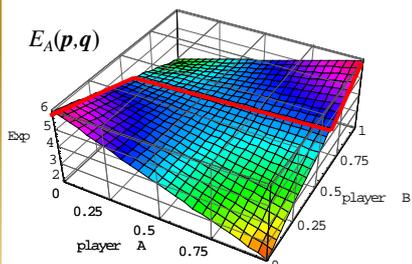
$$(\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = -5p_1 + 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_1 < 3/5 \rightarrow q_1 = 1 \\ p_1 = 3/5 \rightarrow q_1 : \text{任意} \\ p_1 > 3/5 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}$$



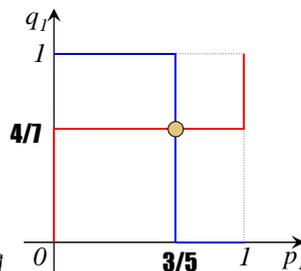
## 2人非協力非零和ゲーム

A \ B	$S_{B1}$	$S_{B2}$
$S_{A1}$	(6,5)	(2,7)
$S_{A2}$	(3,4)	(6,1)



$$E_A(p, (4/7, 3/7)) = 30/7$$

$$E_B((3/5, 2/5), q) = 23/5$$



## 2人非協力非零和ゲーム

### ❁ Theorem 3

- ❁ (混合戦略まで拡大すると,) 双行列ゲームには, 少なくとも1つNash均衡点が存在する

### ❁ Theorem 4 (cf. Theorem 2)

- ❁ (混合)戦略の組  $(p^*, q^*)$  がNash均衡点であるための必要十分条件は,  $(p^*, q^*)$  が写像  $R_A(q) \times R_B(p)$  の不動点であること. 即ち,  

$$p^* \times q^* \in R_A(q^*) \times R_B(p^*)$$

↑  
 戦略の組が均衡点であるための必要十分性(Theorem 2, 4など)の証明は, 「Brouwerの不動点定理」「角谷の不動点定理」などから



## 演習1:

- ❁ 次の双行列ゲームのNash均衡点を求めよ

A \ B	S <sub>B1</sub>	S <sub>B2</sub>
S <sub>A1</sub>	(-24, 12)	(4, 6)
S <sub>A2</sub>	(6, -8)	(-2, 2)



# Coffee Brake!

## John F. Nash (1928-)

紹介サイトの情報



■ Non-Cooperative Games Nash (pdf)

## A Beautiful Mind



いずれも2004年11月9日(火)取得の情報

# 補足: 2人非協力零和ゲーム

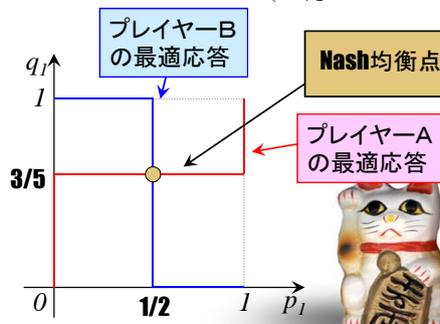
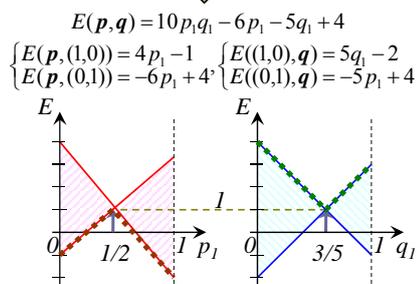
零和ゲームの場合は  
 > 最適応答戦略  
 > ミニマックス戦略  
 いずれの考え方で均  
 衡解を求められるよ

## 2人非協力零和ゲームのNash均衡点

例: プレイヤーAの利得表

		$q_1$	$q_2$
A \ B	$S_{B1}$	$S_{B2}$	
$p_1$	$S_{A1}$	3	-2
$p_2$	$S_{A2}$	-1	4

$$\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} = 3 - (-1) = 4 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 4 - (-2) = 6 \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} = (-1) - 4 = -5 \\ \bar{c} = b_{11} - b_{21} = (-3) - 1 = -4 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = (-4) - 2 = -6 \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} = 1 - (-4) = 5 \end{cases} \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 10q_1 - 6 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = -10p_1 + 5 \end{cases}$$



## 2人非協力非零和ゲーム

### 例2: 囚人のジレンマ **prisoner's dilemma**

- 2人の凶悪犯が別個に取り調べを受けている
- 現状では証拠不十分で軽い罪でしか起訴できないため、2人とも**3**年
- 各囚人は司法取引を持ちかけられ、応じた方は**1**年、応じない方は**10**年、ただし、2人ともが応じた場合は2人とも**8**年



<b>A \ B</b>	<b>黙秘</b>	<b>自白</b>
<b>黙秘</b>	(3,3)	(10,1)
<b>自白</b>	(1,10)	(8,8)

注意: 値が小さい方が嬉しい!



※司法取引: 被告が自分の罪を認める代わりに罪を軽くしてもらうこと

## 2人非協力非零和ゲーム

### 例2: 囚人のジレンマ **prisoner's dilemma**

		$q_1$	$q_2$
<b>A \ B</b>	<b>黙秘</b>	<b>自白</b>	
$p_1$	<b>黙秘</b>	(3,3)	(10,1)
$p_2$	<b>自白</b>	(1,10)	(8,8)

注意: 値が小さい方が嬉しい!

明らかにもっと良い解がある  
**Pareto**最適でない!

各プレイヤーとも、「自白」が支配戦略! 結果として、(自白, 自白)が**Nash**均衡点であり、ゲームは支配可解

最適応答原理に従って考えても...

$$D_A = \{((0,1), q) \mid 0 \leq q \leq 1\}$$

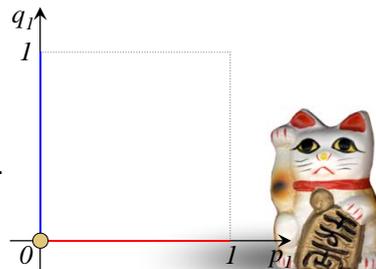
$$D_B = \{(p, (0,1)) \mid 0 \leq p \leq 1\}$$

$$\rightarrow D := D_A \cap D_B = \{((0,1), (0,1))\}$$

最適応答原理に従ってまじめに計算しても...

$$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 0 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \hat{c} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ q_1 = 0 \end{cases}$$

注意: 土逆で計算



## 2人非協力非零和ゲーム

### ❁ Nash均衡点が最適戦略か？

#### ❁ 2人零和ゲーム

- ミニマックス戦略が最適戦略！ ← 行動の指針を与えてくれる

#### ❁ 2人非零和ゲーム

- Nash均衡点が最適戦略を与えるわけではない！
- ゲームの値が異なる複数の均衡点が存在する場合がある！
- Nash均衡点は、必ずしもPareto最適ではない！

→ 最適応答原理は不十分かも...！？  
(しかし他に適切なものがあるか？)

#### 非協力ゲーム

- 得られる解の状態を示すことで、何らかの均衡戦略をとるべきことを教える
- 均衡状態が複数あることを示すことで、戦略決定判断が困難であることも教える

Nash均衡点の精緻化  
協力ゲームへの転換



## 2人非協力非零和ゲーム

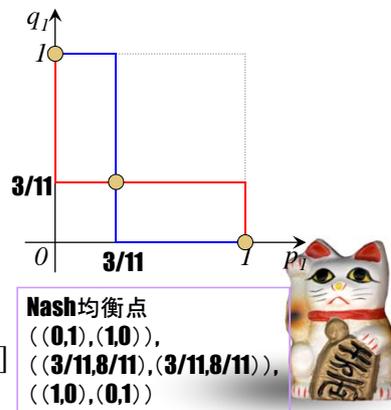
### ❁ 例3: 面会ゲーム

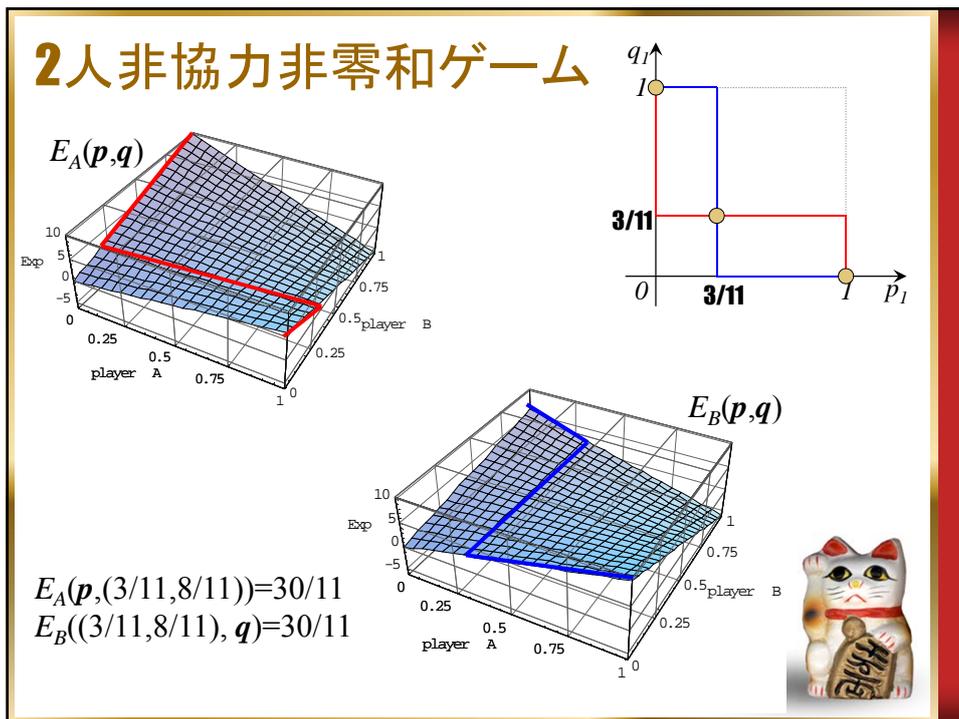
- 遠く離れている2人が至急会う必要がある
- 今居る場所は互いにわかっており、会いに行くか、相手が来るのを待つかの選択が出来る。(途中で会うことはない)

↓

A \ B	行く	待つ
行く	(-6, -6)	(6, 10)
待つ	(10, 6)	(0, 0)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = -22q_1 + 6 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = -22p_1 + 6 \end{array} \right. \begin{cases} > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0, 1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0, 1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}$$





## 2人非協力非零和ゲーム

❁ 例4: 弱虫ゲーム **chicken game**

- 2人の人間が2台の車をそれぞれ運転する
- 2人は、お互いに向かって車を走らせる
- 2台ともそのまま走り続ければ、やがてぶつかり死ぬため、直前で回避してよい。
- しかし、相手より先によけた(進路を変えた)プレイヤーは「チキン」と罵られ、臆病者のレッテルを貼られる

↓

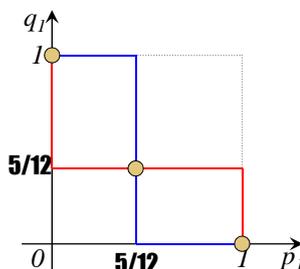
<b>A \ B</b>	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

## 2人非協力非零和ゲーム

### 例4: 弱虫ゲーム chicken game

A \ B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

$$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = -12q_1 + 5 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = -12p_1 + 5 \end{cases} \begin{cases} > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}$$



**Nash均衡点**  
 ((0,1), (1,0)),  
 ((5/12, 7/12), (5/12, 7/12)),  
 ((1,0), (0,1))

$E_A(p, (5/12, 7/12)) = 10/12$   
 $E_B((5/12, 7/12), q) = 10/12$

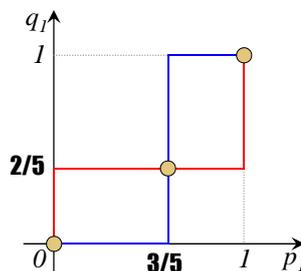


## 2人非協力非零和ゲーム

### 例1: 恋人達のジレンマ battle of sexes

男 \ 女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 5q_1 - 2 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = 5p_1 - 3 \end{cases} \begin{cases} > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}$$



**Nash均衡点**  
 ((1,0), (1,0)),  
 ((3/5, 2/5), (2/5, 3/5)),  
 ((0,1), (0,1))

$E_A(p, (5/12, 7/12)) = 1/5$   
 $E_B((5/12, 7/12), q) = 1/5$



## 2人非協力非零和ゲーム

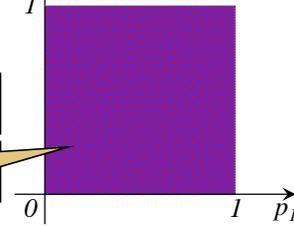
### 例5: 病的な例

<b>A \ B</b>	<b>S<sub>B1</sub></b>	<b>S<sub>B2</sub></b>
<b>S<sub>A1</sub></b>	(8,8)	(4,8)
<b>S<sub>A2</sub></b>	(8,4)	(4,4)

$$\begin{cases} E_A(p, q) = 8p_1q_1 + 8p_2q_1 + 4p_1q_2 + 4p_2q_2 = 8q_1 + 4q_2 \\ E_B(p, q) = 8p_1q_1 + 4p_2q_1 + 8p_1q_2 + 4p_2q_2 = 8p_1 + 4p_2 \end{cases}$$

↑自分の期待利得を自分の戦略で決められないことによる

$$q_1 \begin{cases} (0+0)q_1 - 0 = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ (0+0)p_1 + 0 = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \end{cases}$$



全ての純粋戦略の組がNash均衡点!

全ての混合戦略の組がNash均衡点!

#### Nash均衡点の精緻化

**友情ルール:** 自分の利得が同じなら、相手の利得が大きくなる戦略を選ぶ

(S<sub>A1</sub>, S<sub>B1</sub>) が均衡点

**嫌がらせルール:** 自分の利得が同じなら、相手の利得が小さくなる戦略を選ぶ

(S<sub>A2</sub>, S<sub>B2</sub>) が均衡点

**A**が友情 & **B**が嫌がらせルールに従う → (S<sub>A1</sub>, S<sub>B2</sub>)  
**A**が嫌がらせ & **B**が友情ルールに従う → (S<sub>A2</sub>, S<sub>B1</sub>)



## 2人非協力非零和ゲーム

### 例6: 共有地の悲劇 (囚人のジレンマのn人拡張版)

- 数軒の酪農家が共有の牧草地を所有している。各酪農家が先を争って牛を放牧し、自分の利益最大をはかる限り、牛の数を増やし続けると、待っているのは共有地の荒廃という悲劇である。

#### 単純なモデルでの考察

- 酪農家は4軒 ( $i=1,2,3,4$ )
- 酪農家  $i$  が放牧する牛の数  $q_i$
- 各酪農家は3頭まで牛を購入でき、購入価格は全て等しく2
- 酪農家  $i$  の収益を  $x_i$  とし、 $x_i = q_i \{16 - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\} - 2q_i$

たくさん放牧すると収益が減る!

弱支配

$i \setminus \text{others}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6
3	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6



Nash均衡点

## Nash均衡点と線形相補性問題

### Definition 戦略的同等性

- ゲームGのNash均衡点がG'のそれであり、かつその逆も成立するとき、2つのゲームは**戦略的に同等**であるという

### Theorem 5

- 2つの双行列ゲームG, G'において、任意の要素について、

$$\exists \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \exists \beta_1, \beta_2, \begin{cases} a'_{ij} = \alpha_1 a_{ij} + \beta_1 \\ b'_{ij} = \alpha_2 b_{ij} + \beta_2 \end{cases}$$

という関係があるとき、GとG'は戦略的に同等である

例:  $G$

A \ B	$S_{B1}$	$S_{B2}$
$S_{A1}$	(3, -1)	(0, 2)
$S_{A2}$	(-2, 4)	(5, -2)

戦略的同等

$G'$

A \ B	$S_{B1}$	$S_{B2}$
$S_{A1}$	(5, -1)	(-1, 8)
$S_{A2}$	(-5, 14)	(9, -4)

$\alpha_1 = 2, \beta_1 = -1, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 2$



## Nash均衡点と線形相補性問題

### Nash均衡点を求める

$(p^*, q^*)$   
Nash均衡点  $\iff$  Th.2  $\begin{cases} v_1 := E_A(p^*, q^*) \geq E_A(s_{A_i}, q^*) \quad \forall i = 1, \dots, m \\ v_2 := E_B(p^*, q^*) \geq E_B(p^*, s_{B_j}) \quad \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$

$\iff$   $\begin{cases} v_1 \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \quad \forall i = 1, \dots, m \\ v_2 \geq \sum_{i=1}^m b_{ij} p_i^* \quad \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$

$\iff$  Th.5  $\begin{cases} v_1 \geq \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} q_j^* \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ ただし,} \\ v_2 \geq \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} p_i^* \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ (}\forall i, j, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{ij} > 0\text{)} \end{cases} \implies v_1, v_2 > 0$

$\iff$   $\begin{cases} 1 \geq \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ ただし,} \\ 1 \geq \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i \quad \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \begin{cases} \tilde{q}_j := q_j^* / v_1 \\ \tilde{p}_i := p_i^* / v_2 \end{cases}$

$\implies$   $\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j (\geq 0) \quad (i = 1, \dots, m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i (\geq 0) \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases}$  とおく



## Nash均衡点と線形相補性問題

### Proposition 1 相補性 complementarity

$$\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m u_i \tilde{p}_i = 0 \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n w_j \tilde{q}_j = 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{cases} \text{が成立}$$

まとめると...

Nash均衡点  
が存在する



$$\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} q_j \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} p_i \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^n w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j, q_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{cases}$$

を満たす  $u_i, p_i (i=1, \dots, m)$   
 $w_j, q_j (j=1, \dots, n)$  が存在



## Nash均衡点と線形相補性問題

### LCP, Linear Complementarity Problem

$$\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} q_j \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} p_i \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^n w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j, q_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{cases} \text{を満たす解 } \begin{cases} u_i, p_i (i=1, \dots, m) \\ w_j, q_j (j=1, \dots, n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_i^* := p_i / \sum_i p_i \\ q_j^* := q_j / \sum_j q_j \end{cases} \text{が Nash 均衡点}$$



$$\begin{cases} y = Mx + z, \\ y^T x = 0, \\ (x, y) \geq 0 \end{cases}$$

ただし,

$$x := \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, y := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, z := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$B = -A$ だとLP  $\Leftrightarrow$  零和ゲーム

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -A \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}$$



Lemke法 ( $M \geq 0$ )  
内点法 ( $M: \text{PSD}, P_0, \dots$ )

## 戦略形ゲームの応用 (岡田章『ゲーム理論』p.49-59等)

### ● 応用例1: クールノー複占市場

- 2企業 ( $i=1,2$ ) が同質な財を生産し、同一市場に供給している
- 企業  $i$  の供給量  $q_i (\geq 0)$  → 財の価格  $p = \max\{a - b(q_1 + q_2), 0\}$ , ( $a, b > 0$ )
- 企業  $i$  の費用関数  $C_i(q_i) = c_i q_i$ , ( $0 < c_i \leq a$ ) 限界費用
- 企業  $i$  の利潤関数  $\pi_i(q_1, q_2) = p q_i - c_i q_i$  各企業は利潤最大化したい!

**クールノー・ナッシュ均衡 Cournot-Nash equilibrium**

$$(q_1^*, q_2^*) : C.N.eq. \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, q_2^*) \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1^*, q_2) \end{cases}$$

- 企業  $i (i=1,2)$  の企業  $j (j \neq i)$  に対する最適応答対応  $p > 0$

$$\pi_i(q_1, q_2) = \begin{cases} (a - c_i - b(q_1 + q_2))q_i & \text{if } 0 \leq q_i < a/b - q_j \\ -c_i q_i & \text{if } a/b - q_j \leq q_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_i^* = \begin{cases} \frac{a - c_i}{2b} - \frac{q_j}{2} & \text{if } 0 \leq q_i \leq \frac{a - c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \frac{a - c_i}{b} < q_i \end{cases} \quad \left[ \because \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0 \quad (i=1,2) \right]$$



## 戦略形ゲームの応用

### ● 応用例1: クールノー複占市場

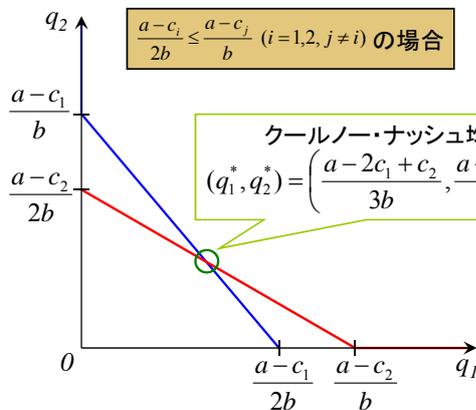
$$\begin{cases} \frac{a - c_i}{2b} - \frac{q_j}{2} & \text{if } 0 \leq q_i \leq \frac{a - c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \frac{a - c_i}{b} < q_i \end{cases}$$

財の価格

$$p^* = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$$

各企業の利潤

$$\begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_1^*) = \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b} \\ \pi_2(q_1^*, q_1^*) = \frac{(a + c_1 - 2c_2)^2}{9b} \end{cases}$$



クールノー・ナッシュ均衡点

$$(q_1^*, q_2^*) = \left( \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b} \right)$$

パレート最適ではない  
例:  $c_1 = c_2$  の時,  $q_1 = q_2 = (a - c) / 4b$  とした方が、どちらの企業もより多くの利潤が得られる

## 戦略形ゲームの応用

### ● 応用例2: 寄付金ゲーム

- ある町の町長が、公共事業のため、n人の住人に寄付を募る
- 各住人は、寄付額 0円~1000円を自分の好きな分だけ寄付
- 寄付総額の2倍を、n人の住人に分配する
- 住人  $i (=1, \dots, n)$  の戦略(寄付額):  $x_i$  ( $0 \leq x_i \leq 1000$ )
- 住人  $i (=1, \dots, n)$  の利得関数:  $u_i(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{k=1}^n x_k - x_i$

寄付はいくら集まるだろう？



自分\他	0	300	...	2700	3000
0	0, 0	600, 500	...	5400, 4500	6000, 5000
100	100, 0	700, 700	...	5500, 4700	6100, 5200
...	...	...	...	...	...
900	900, 0	1500, 2300	...	6300, 6300	6900, 6800
1000	1000, 0	1600, 2500	...	6400, 6500	7000, 7000

注)表内の数値は、  
左=自分の利得  
右=他n人の一人当たり利得



➡ 利得を皆が等しく還元され、享受できるなら、皆喜んで寄付をする

## 戦略形ゲームの応用

### ● 応用例2: 寄付金ゲーム(その2)

- 変更点: 寄付総額の2倍を、n人の住人に均等に分配する
- 住人  $i (=1, \dots, n)$  の戦略(寄付額):  $x_i$  ( $0 \leq x_i \leq 1000$ )
- 住人  $i (=1, \dots, n)$  の利得関数:  $u_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k - x_i$

寄付はいくら集まるだろう？



自分\他	0	300	...	2700	3000
0	0, 0		...		
100			...		
...	...	...	...	...	...

先と同様の表を書いてみよう

$n > 2$  の時、戦略  $x_i^* = 0$  が、他の戦略  $x_i > 0$  に対する支配戦略となる！

➡ 戦略組  $x^* = (0, \dots, 0)$  が唯一の均衡点、即ち、誰も寄付しない

パレート最適ではない  
全ての住人が1000円寄付すると、全ての住民の利得は1000円であり、均衡点より望ましい

だが  $x = (1000, \dots, 1000)$  では、どの住民も裏切る動機を持つ  
 $u_i(0, x_{-i}) = 2000 \frac{n-1}{n} (> 1000)$

ただ乗り free-riding :  
他人の貢献を利用して個人的利益を得る行為



## 戦略形ゲームの応用

### 応用例3: 電力消費ゲーム

- ある都市で,  $n$ 人の住人がクーラーを所持. 暑い日の出来事
- 各住人  $i$  ( $=1, \dots, n$ )の戦略と, その費用, 及び効用は,
  - 戦略: 低温設定 ( $x_i = \alpha$ ), 電力消費1000W, 効用  $U$
  - 戦略: 中温設定 ( $x_i = \beta$ ), 電力消費500W, 効用  $u$  ( $U > u > 0$ )
- この都市の停電確率は, 総電力量を  $Q$  としたとき, 停電臨界点

$$P(Q) = \begin{cases} 0 & (\text{if } 0 \leq Q \leq c) \\ 1 & (\text{if } c < Q) \end{cases} \text{ where } 500n < c < 1000n$$

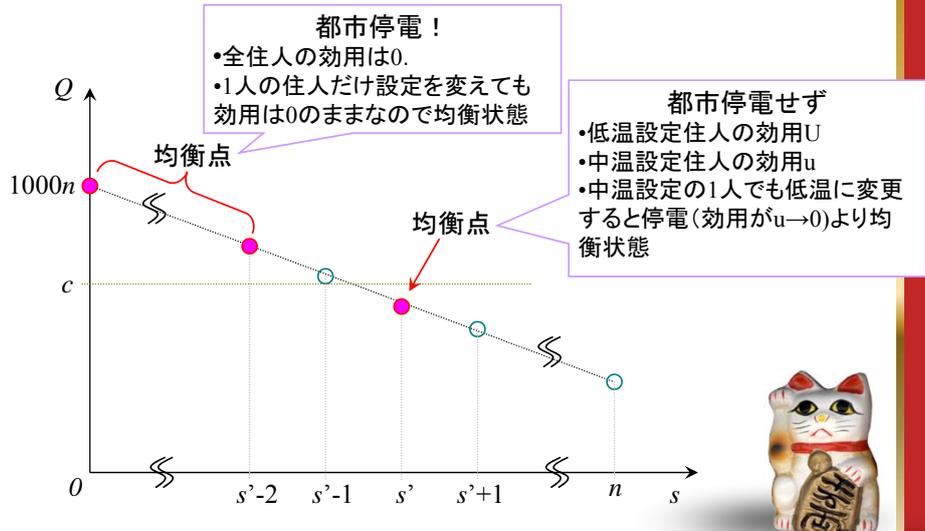
- 節電する住人の数を  $s$  ( $0 \leq s \leq n$ ) とすると, 総電力消費量は
  - $Q(s) := 500s + 1000(n-s) = 1000n - 500s$
- 住人  $i$  の効用は
  - $u_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & (\text{if } c < Q(s)) \\ U & (\text{if } Q(s) \leq c, x_i = \alpha) \\ u & (\text{if } Q(s) \leq c, x_i = \beta) \end{cases}$

→ 減少関数  $Q(s)$  について,  $Q(s^*) \leq c \leq Q(s^*-1)$  を満たす  $s^*$  が唯一定まり,  $0 \leq s^* \leq s^*-2, s^* = s^*$  を満たす全ての  $s$  が均衡点



## 戦略形ゲームの応用

### 応用例3: 電力消費ゲーム



## 戦略形ゲーム

### 囚人のジレンマ型ゲーム

A \ B	C	D
C	$(S_1, S_2)$	$(W_1, B_2)$
D	$(B_1, W_2)$	$(T_1, T_2)$

ただし,  $B_i$  (best)  $>$   $S_i$  (second)  $>$   $T_i$  (third)  $>$   $W_i$  (worst)

$$\begin{cases} \bar{r} = S_1 - B_1 (< 0), \hat{r} = T_1 - W_1 (> 0), \tilde{r} = B_1 - T_1 (> 0) \\ \bar{c} = S_2 - W_2 (> 0), \hat{c} = T_2 - B_2 (< 0), \tilde{c} = W_2 - T_2 (< 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\bar{r} + \hat{r}| \leq |\hat{r}| \\ |\bar{c} + \hat{c}| = |(S_2 - W_2) + (T_2 - B_2)| \\ \quad = |(S_2 - B_2) - (W_2 - T_2)| \leq |W_2 - T_2| = |\tilde{c}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} < 0 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1^* = 0 \\ q_1^* = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Nash均衡は (D,D)}$$

2人のプレイヤーが互いに相手と異なる戦略を交互に取る, 即ち,  $(C,D) \rightarrow (D,C) \rightarrow (C,D) \rightarrow \dots$  とするときの期待利得が, 協調行動(C,C)の利得より小さい状況

$$\text{さらに } S_i = \frac{B_i + W_i}{2} \quad (i=1,2)$$

も満たすならば、『標準的な囚人のジレンマ型ゲーム』とよばれる

$$\begin{cases} f_1(q_2) := (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} \\ f_2(p_1) := (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(q_2) > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ f_1(q_2) = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ f_1(q_2) < 0 \rightarrow p_1 = 0 \\ f_2(p_1) > 0 \rightarrow q_2 = 1 \\ f_2(p_1) = 0 \rightarrow q_2 \in [0,1] \\ f_2(p_1) < 0 \rightarrow q_2 = 0 \end{cases}$$



## 戦略形ゲーム

### 演習:

- 身近な所, あるいは社会において, 囚人のジレンマと同じ状況となっていると思われる例を2つ上げよ.



## 参考文献

- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981, 2003(新装版))
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2008)
- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- R. Axelrod, 松田裕之訳「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)
- .....

