

意思決定科学： ゲーム理論3

情報学部 堀田敬介

2010/12/17, Fri. ~

CONTENTS

◎ 協力ゲームの理論

- 2人交渉ゲーム
- 結合戦略, 実現可能集合
- Nash交渉解
- 提携ゲーム, 提携と配分
- コア, 安定集合, シャープレイ値

◎ 投票ゲーム

- 投票力指数
 - シャープレイ・シュービック指数
 - バンザフ指数
 - ディーガン・パックル指数

協力ゲームの理論

- 2人交渉ゲーム
 - 交渉問題 (bargaining problem)
 - 交渉を行う ←何らかの共通の認識をもつ
 - 共通の認識を明確に定義し、交渉のルールと解を求める
 - 例：恋人達のジレンマ
 - 事前に話し合いを行う
 - ジャンケンで勝った方、強く主張した方、くじ引き、etc...



男\女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)



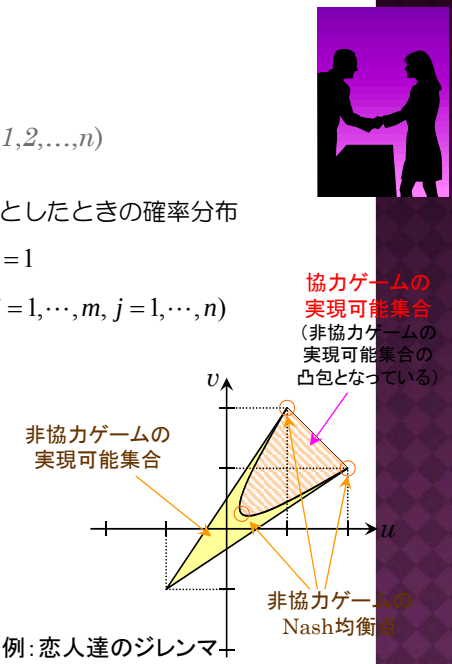
- 結合純戦略 (joint pure strategy)
 - (野球, 野球), (野球, 映画), (映画, 野球), (映画, 映画)
- 結合混合戦略 (joint mixed strategy)
 - $z = (z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22})$, $\begin{cases} z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22} = 1 \\ z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} \geq 0 \end{cases}$

協力ゲームの理論

- 結合混合戦略と実現可能集合
 - 双行列 $G=(a_{ij},b_{ij})$ ($i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$)
 - 結合混合戦略
 - 結合純戦略(i,j)がとられる確率を z_{ij} としたときの確率分布
$$z = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{mn}) , \begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} = 1 \\ z_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n) \end{cases}$$
 - 結合 (混合) 戦略集合: $Z=\{z\}$

- 二人の期待利得
 - $$u(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} z_{ij}$$
$$v(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} z_{ij}$$

- 実現可能集合 (到達可能集合)
 - $R = \{ (u(z), v(z)) \mid z \in Z \}$



協力ゲームの理論

交渉の基準点

交渉

成功

失敗

交渉が不成功に終わったとしても期待できる保証水準
= 交渉の基準点

利得
IV
利得 = 最悪の場合でも保証される利得
= maximin 値

$$\begin{cases} c_1 := \max \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j \\ c_2 := \max \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j \end{cases}$$

例: 恋人達のジレンマ

交渉

成功

失敗

交渉の基準点

・デート成立
・家に帰って不貞寝
・非協力ゲームをやる

$(c_1, c_2) = (0, 0)$
 $(c_1, c_2) = (1/5, 1/5)$

協力ゲームの理論

2人交渉ゲーム

演習:

A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(6, 7)	(0, 9)
s_{B_2}	(9, 0)	(2, 3)

1. (協力) 実現可能集合を描いてみよう

2. このゲームを協力ゲームの出発点として、交渉の基準点を考えよう

協力ゲームの理論

交渉問題の要素と定式化

- プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- 交渉の基準点 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \leftarrow$ 交渉不成立時の保証水準

- 実現可能集合 $S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$

- S の満たすべき性質

1. n 次元Euclid空間の有界閉凸集合
2. 基準点 c は S に含まれる
3. S には、任意の i について、 $x_i > c_i$ なる点を少なくとも1つ含む

- 交渉問題 (N, S, c)

- 交渉の妥結点 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$

- 交渉問題 (N, S, c) が与えられたとき、全てのプレイヤーが納得する S に属すただ一つの点 s が選び出されたとき、その点 s

- 交渉解 $F: (N, S, c) \rightarrow s$

- 交渉問題 (N, S, c) が与えられたとき、 (N, S, c) に対してただ一つの妥結点 s を対応させるルール

※プレイヤーに c の共通認識があるとき、 c を交渉の基準点とよぶ (c は所与とする)

交渉のルールが共通認識となっていれば、基準点を定める交渉となる!



協力ゲームの理論

交渉の妥結点の満たすべき公準（その1）

- 公準1：個人合理性

- x が個人合理的 $\Leftrightarrow x_i \geq c_i \ (i=1, \dots, n)$
- $F(N, S, c)$ の妥結点 s が個人合理的のとき、 F は個人合理的であるという

- 公準2：強個人合理性

- x が強個人合理的 $\Leftrightarrow x_i > c_i \ (i=1, \dots, n)$
- $F(N, S, c)$ の妥結点 s が強個人合理的のとき、 F は強個人合理的であるという

交渉成立時は、交渉不成立時に保証される利得 c より多くの利得が保証されねばならない

- 公準3：パレート最適性（共同合理性、効率性）

- 交渉の妥結点 $F(N, S, c) = s$ はパレート最適でなければならない

- 公準4：弱パレート最適性

- 交渉の妥結点 $F(N, S, c) = s$ は弱パレート最適でなければならない



協力ゲームの理論

交渉領域

$T = \{s \in S \mid x \geq c\}$

例：

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	(8, 4)	(2, 3)	(4, 1)	2	4
s_{B_2}	(6, 2)	(4, 6)	(4, 2)	4	
min	2	3	1		
max	3				

各々のmaximinを交渉の基準点 $c = (4, 3)$ とする

協力ゲームの理論

Nash交渉解

Nash積

$$\prod_{i \in N} (x_i - c_i) = (x_1 - c_1) \times \cdots \times (x_n - c_n)$$

各プレイヤーについて、基準点からの利得の増分の積

Nash交渉解

交渉問題 (N, S, c) のNash交渉解は、Nash積を最大にする S の点 s

$$(s_1 - c_1) \times \cdots \times (s_n - c_n) = \max_{x \in S, x \geq c} (x_1 - c_1) \times \cdots \times (x_n - c_n)$$

$$\text{or } N(S, c) = \arg \max \left\{ \prod_{i \in N} (x_i - c_i) \mid x \in S, x \geq c \right\}$$

Nash交渉解は、利得の測定法から独立なので、プレイヤー毎に利得を正一次変換しても変わらない。
(効用の個人間比較を排除)

基準点を 0 に変換して考えることができる

協力ゲームの理論

Nash交渉解

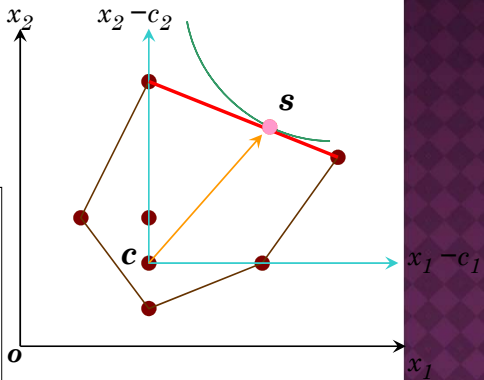
$$(s_1 - c_1) \times \cdots \times (s_n - c_n) = \max_{x \in S, x \geq c} (x_1 - c_1) \times \cdots \times (x_n - c_n)$$

■ 例：

A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	(8, 4)	(2, 3)	(4, 1)
s_{B_2}	(6, 2)	(4, 6)	(4, 2)

基準点 $c = (4, 3)$ とする
↑ 各々の maximin

- 演習： $y_i = 1/2 x_i$ という正一次変換を施して考えてみよう！
- 共同合理性 (パレート最適) を満たす部分は？
 - 基準点 c は？
 - さらに $z_1 = y_1 - 2, z_2 = x_2 - 3$ としたとき、Nash解はどう書けるか？
 - 妥結点を求めもとの問題の妥結点を出そう！



協力ゲームの理論

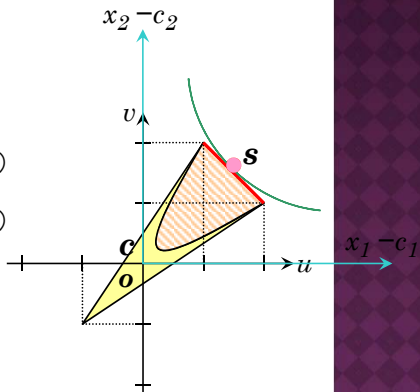
Nash交渉解

■ 例：交渉力 (bargaining power)

$$(x_1 - c_1)^a \times (x_2 - c_2)^b, [a \geq 0, b \geq 0, a + b > 0]$$

男 \ 女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)

- $a > b$ の時 (プレイヤーAの方が交渉力が強い)
Nash交渉解: $(u^*, v^*) = (2, 1)$
- $a < b$ の時 (プレイヤーBの方が交渉力が強い)
Nash交渉解: $(u^*, v^*) = (1, 2)$
- $a = b$ の時 (双方の交渉力が等しい)
Nash交渉解: $(u^*, v^*) = (3/2, 3/2)$

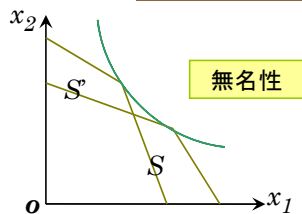


協力ゲームの理論

交渉の妥結点の満たすべき公準（その2）

- 公準5：利得の正一次変換からの独立性
 - 利得を測定する単位や尺度を変えても本質的に変わらない
- 公準6：対称性
 - 例えば、2人交渉問題(S)において、『交渉領域 S が $y=x$ に関して対称ならば、ルール F による妥結点における2人の利得が等しい』を満たす
 - 一般には、実現可能集合 S の任意の置換 $\pi(S) = \{\pi(x) \mid x \in S\}$ に対し、『 $\pi(S) = S \Rightarrow F_i(S) = F_j(S)$ for all i, j 』を満たす
- 公準7：無名性（匿名性）
 - 交渉問題 (N, S, θ) において、 $F[\pi(S)] = \pi[F(S)]$

プレイヤーの番号を付替えた時、交渉領域が変化したとしても、妥結点におけるプレイヤーの受け取る利得が番号の付け方に独立、例え匿名にしても変わらない



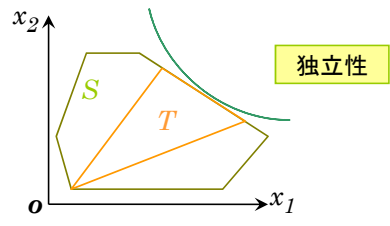
協力ゲームの理論

交渉の妥結点の満たすべき公準（その3）

- 公準8：無関連な代替案からの独立性
 - 交渉問題 (N, S, θ) と妥結点 s において、 $T \subset S, F(S) \in T \Rightarrow F(S) \in F(T)$
- 公準9：全体と部分との整合性
 - 交渉問題 (N, S) の解 F について、 $F(T)=t$ とする。 $M \subset N$ を考え、妥結点 t の $N-M$ 人の利得を固定し、Mのプレイヤーだけの交渉問題 (M, S) を考える。このとき、解 F によって M のプレイヤーの利得は、 (N, S) でも (M, S) でも変わらない。

交渉の場を (S, e) から (T, e) に変えても妥結点 s は変わらない

整合性を持たないと、プレイヤーが色々な部分集合に分かれて交渉が始まってしまう！

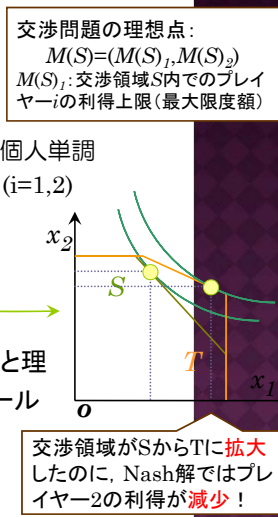


協力ゲームの理論

- Nash交渉解の一意性
 - Nashの定理 (1950)
 - 2人交渉問題のNash交渉解は、次の5つの公準を満たす唯一の解
 - ・ 個人合理性 (公準1), パレート最適性 (公準3), 利得測定法からの独立性 (公準5), 対称性 (公準6), 無関連な代替案からの独立性 (公準8)
 - Rothの定理 (1977)
 - 任意の交渉問題において、Nash交渉解は次の4つの公準を満たす唯一の解
 - ・ 強個人合理性 (公準2), 利得測定法からの独立性 (公準5), 対称性 (公準6), 無関連な代替案からの独立性 (公準8)
 - 任意の交渉問題において、次の3つの公準
 - ・ 利得測定法からの独立性 (公準5), 対称性 (公準6), 無関連な代替案からの独立性 (公準8)を満たすのはNash解か、非合意解 $F(S) = c = \theta$ のみ。
 - Lensbergの定理 (1985)
 - 任意の交渉問題において、Nash交渉解は次の5つの公準を満たす唯一の解
 - ・ 個人合理性 (公準1), パレート最適性 (公準3), 利得測定法からの独立性 (公準5), 無名性 (公準7), 全体と部分との整合性 (公準9)

協力ゲームの理論

- 交渉の妥結点の満たすべき公準 (その4)
 - 公準10: 個人単調性
 - 2つの交渉問題 (N, S, c) , (N, T, c) において、解 F が個人単調 $\xleftrightarrow{\Delta} T \supset S$, かつ $M(T)_i = M(S)_i$ ($i=1,2$) $\Rightarrow F_i(T) \geq F_i(S)$ ($i=1,2$)
- Kalai & Smorodinsky解
 - 交渉領域 S のパレート最適集合と、交渉基準点 c と理想点 $M(S)$ とを結ぶ直線との交点を妥結点とするルール
 - Kalai&Smorodinskyの定理(1975)
 - 任意の2人交渉問題において、Kalai&Smorodinsky解は次の5つの公準を満たす唯一の解
 - ・ 個人合理性 (公準1), パレート最適性 (公準3), 利得測定法からの独立性 (公準5), 対称性 (公準6), 個人単調性 (公準10)



協力ゲームの理論

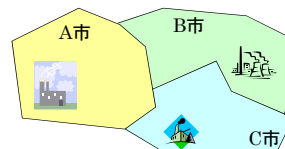
◎ 例題

- → [例題6.1] [2] p.151～
- → [例題6.2] [2] p.155～

協力ゲームの理論

◎ 提携と配分

- 例題：ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32～)
 - 3市が各々独自に建設 ... $A=5$ 億円, $B=3$ 億円, $C=2$ 億円
 - 共同施設の建設 ... $A+B=7.2$ 億円, $B+C=4.8$ 億円, $C+A=6.6$ 億円, $A+B+C=8$ 億円



例えば, A市とB市はそれぞれ独自に建設する(5 億 $+$ 3 億 $=8$ 億)
よりも, 提携して共同施設を建設(7.2 億)したほうが安い.
→ 0.8 億円の得をするということ!

協力関係を結んだプレイヤーのグループ＝**提携**
提携が作られることによって得られる便益の値を与える関数＝**特性関数**

協力ゲームの理論

◎ 提携と配分

■ 定義：提携ゲーム

○ ゲームのルール

- (1) プレイヤー $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- (2) N の任意の部分集合は提携可能
- (3) 譲渡可能効用が存在し、提携内で別払い可能
〔別払いのあるゲーム (games with sidepayment) 〕

譲渡可能効用(transformable utility)
が存在 = 利得の一部をプレイヤー間で自由に譲渡でき、 $A \rightarrow B$ へ譲渡したときの、 A の損失と B の利得が等しい

プレイヤーの間で利得を自由に譲渡可能

- 任意の提携 S にたいし、実数値を対応させる関数 $v(S)$ が存在
 - v : 特性関数 (characteristic function)
 - $v(S)$: 提携 S のもつ提携値



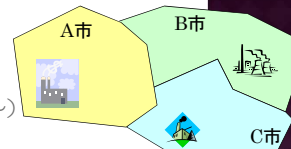
(N, v) : 提携形ゲーム (coalitional game)

協力ゲームの理論

◎ 提携と配分

■ 例題：ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32~)

- 3市が各々独自に建設 ... $A=5$ 億円, $B=3$ 億円, $C=2$ 億円
- 共同施設の建設 ... $A+B=7.2$ 億円, $B+C=4.8$ 億円, $C+A=6.6$ 億円, $A+B+C=8$ 億円



プレイヤーの集合: $N = \{A, B, C\}$

実現可能な提携: $2^N = \{ \emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{B,C\}, \{C,A\}, \{A,B,C\} \}$

特性関数: $v(\emptyset) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

$$v(\{A,B\}) = (5+3) - 7.2 = 0.8$$

$$v(\{B,C\}) = (3+2) - 4.8 = 0.2$$

$$v(\{C,A\}) = (2+5) - 6.6 = 0.4$$

$$v(\{A,B,C\}) = (5+3+2) - 8 = 2$$

$$S \cap T = \emptyset$$

v が優加法的(superadditive)
互いに素な任意の提携 S, T
について以下が成立する特性関数 v
 $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\{A\}) + v(\{B\}) = 0 < 0.8 = v(\{A,B\}) \\ v(\{B\}) + v(\{C\}) = 0 < 0.2 = v(\{B,C\}) \\ v(\{C\}) + v(\{A\}) = 0 < 0.4 = v(\{C,A\}) \\ v(\{A,B\}) + v(\{C\}) = 0.8 < 2 = v(\{A,B,C\}) \\ v(\{B,C\}) + v(\{A\}) = 0.2 < 2 = v(\{A,B,C\}) \\ v(\{C,A\}) + v(\{B\}) = 0.4 < 2 = v(\{A,B,C\}) \end{array} \right.$$

相交わらない2つの提携は、各々別個に行動するより共に行動した方が得られる便益が大きい(小さくはない)ということ

だから提携すればよい
問題は「**配分**」をどうするかとなる

協力ゲームの理論

提携と配分

■ 定義：配分 (imputation)

- 提携形ゲーム (N, v)
- プレイヤー i の利得 x_i 利得ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- 実現可能集合 R

$$R = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i \in N} x_i \leq v(N) \right\}$$

- 実現可能集合の点 $\mathbf{x}$ が交渉領域にあるための条件

(1) **個人合理性** $x_i \geq v(\{i\})$

(2) **全体合理性** $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

各プレイヤーの利得は単独
行動で獲得可能な値以上

全プレイヤーの協力で得られる値
 $v(N)$ は、全て配分されねばならない

全体合理性を満たす利得ベ
クトルは実現可能領域でパ
レート最適になっている

準配分 (preimputation)
全体合理性を満たす利得ベクトル

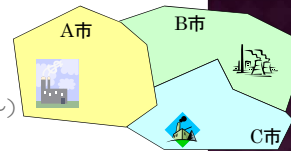
配分 (imputation)
個人合理性と全体合理性を満た
す利得ベクトル

協力ゲームの理論

提携と配分

■ 例題：ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32~)

- 3市が各々独自に建設 ... A=5億円, B=3億円, C=2億円
- 共同施設の建設 ... A+B=7.2億円, B+C=4.8億円, C+A=6.6億円, A+B+C=8億円



プレイヤーの集合: $N = \{A, B, C\}$

実現した提携の例: $\{A, B, C\}$ その特性関数の値: $v(\{A, B, C\}) = (5+3+2)-8 = 2$

(1) **個人合理性** $x_i \geq v(\{i\})$

(2) **全体合理性** $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

• どんな配分がよい？
• どんな配分が考えられる？

配分の例: $(x_A, x_B, x_C) = (1, 0.5, 0.5)$

(1) 個人合理性を満たしている: $x_A \geq v(\{A\})=0, x_B \geq v(\{B\})=0, x_C \geq v(\{C\})=0$

(2) 全体合理性を満たしている: $x_A + x_B + x_C = v(\{A, B, C\}) = 2$

配分ではない例: $(x_A, x_B, x_C) = (0.6, 0.8, 0.4)$

(1) 個人合理性を満たしている: $x_A \geq v(\{A\})=0, x_B \geq v(\{B\})=0, x_C \geq v(\{C\})=0$

(2) 全体合理性を満たしていない: $x_A + x_B + x_C > v(\{A, B, C\}) = 2$

協力ゲームの理論

- 例題
 - 多数決ゲーム
 - プレイヤーは3人 $N = \{1, 2, 3\}$
 - 12万円が贈られてきた。多数決で分け、多数派が全てにとって良い。
 - 提携集合 2^N ，多数派の提携 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$
 - 特性関数
$$v(\varnothing) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{3, 1\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 12$$
 - 利得ベクトルの集合
$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3)\} \subset R^3$$
- 例1: 提携 $\{1, 2\}$ が成立 $\rightarrow x = (6, 6, 0)$
例2: 提携 $\{1, 3\}$ が成立 $\rightarrow x = (6, 0, 6)$

→ ゲームの結果として考えられる利得ベクトルの例
 $(6, 6, 0), (6, 0, 6), (0, 6, 6), (8, 4, 0), (2, 4, 6)$

協力ゲームの理論

● コア (core)

ゲーム (N, v)

→

配分の集合
 $X = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$
= 交渉領域

→ 交渉 →

ある配分に
到達

– 配分の支配

- 提携 S において、配分 x が配分 y を支配するとは、次の2条件が成立すること

(1) 有効条件 : $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$

← 提携 S は x の有効集合 (effective set)

つまり、提携 S にとって、配分 x は S の力だけで実現可能！

(2) 選好条件 : $x_i > y_i, (\forall i \in S)$

提携 S にとって、配分 y を支配する配分 x が存在するとき、
「提携 S は配分 y を拒否する (block)」
or
「配分 y は提携 S にとって改善可能」
という

→ 交渉の過程で、ある提携
にとって支配される配分は、
その提携によって拒否さ
れ、排除される。
↓
支配されない配分が残る
コア

Confidential

12

協力ゲームの理論

v が優加法的(supperadditive)
互いに素な任意の提携 S, T について以下が成立する特性関数 v
 $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

◎ コア

- ゲーム (N, v) において、いかなる配分にも支配されない配分の集合



■ コア(別定義)

- ゲーム (N, v) が優加法的であるとき、提携合理性を満たす配分の集合

$$C(v) := \left\{ x \in X \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N \right\}$$

$v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ を提携 S の配分 x に対する**不満**とよぶ.

コアとはいかなる提携に対しても不満を与えない配分の集合

提携合理性(個人合理性の拡張)
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

補足: Theorem

各プレイヤーのとりうる純戦略が有限な協力ゲームの特性関数は優加法的

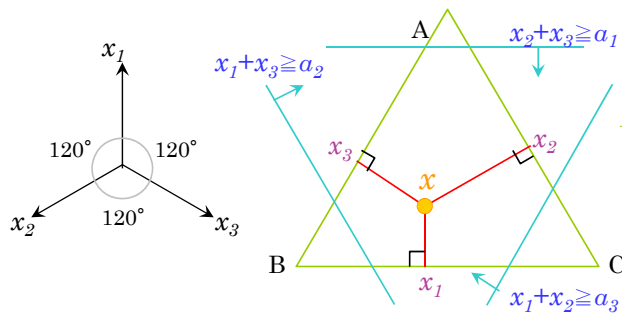
協力ゲームの理論

◎ 例題

- 3人ゲームのコア

- $N = (1, 2, 3)$
- $v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
 $v(\{1, 2\}) = a_3, v(\{2, 3\}) = a_1, v(\{3, 1\}) = a_2, (ただし, 0 \leq a_i \leq 1, i=1,2,3)$
 $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
- ゲームの配分 $x = (x_1, x_2, x_3)$ とすると, $x_i \geq 0 (i=1,2,3), x_1+x_2+x_3=1$

$$C(v) := \left\{ x \in X \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N \right\}$$



正三角形ABCが、
このゲームの配分
の集合 X を表す

Theorem

3人ゲーム (N, v) のコア
が空でないための必要十
分条件は,
 $v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\})$
 $\leq 2v(\{1,2,3\})$

協力ゲームの理論

Theorem
本質的定和n人ゲーム (N, v) のコアは空

- 加法的 (additive) $\Leftrightarrow v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
- 非本質的 (inessential) $\Leftrightarrow$ 加法的 v を持つ協力ゲーム
- 本質的 (essential) $\Leftrightarrow$ そうでない協力ゲーム

◎ 演習：

■ 以下の各ゲーム（全て優加法的）において、 v を全て書き出し、コアを見つけよう。ただし、 $v(N)=1, v(\varnothing)=0$ とする。

(1) 3人定和ゲーム ([4] p.25 例3.2)

- 一定量の資金を3人の多数決で分ける。多数派提携が資金の全てを獲得。
- $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
- $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varnothing) = 0$
- $\rightarrow$ コア $C(v) = \varnothing$

(2) 3人拒否権ゲーム ([4] p.26 例3.3)

- 一定量の資金を3人の多数決で分ける。多数派提携が資金の全てを獲得。
- ただし、プレイヤー1には拒否権があり、資金の獲得にはプレイヤー1の協力が必要。即ち、プレイヤー2, 3だけでは資金の獲得不可能。
- $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$
- $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varnothing) = 0$
- $\rightarrow$ コア $C(v) = \{ (1,0,0) \}$

2,3が1との提携をめぐって競争すると、1が全部を得てしまう

協力ゲームの理論

◎ 演習：

(3) 家購入ゲーム ([4] p.26 例3.4)

1000万
900万
家売りたい
交渉
家を買いたい
1なら, 1150万
2なら, 1000万
1なら, 1070万
2なら, 950万
評価額の差が最も大きくなるように売却し、その差の和で v を計算

$N=\{1,2,3,4\}$

$v(\{1,2,3,4\}) = 200,$
 $v(\{1,2,3\}) = 150, v(\{1,2,4\}) = 70, v(\{1,3,4\}) = 150, v(\{2,3,4\}) = 100,$
 $v(\{1,2\}) = 0, v(\{1,3\}) = 150, v(\{1,4\}) = 70, v(\{2,3\}) = 100, v(\{2,4\}) = 50, v(\{3,4\}) = 0,$
 $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\varnothing) = 0$

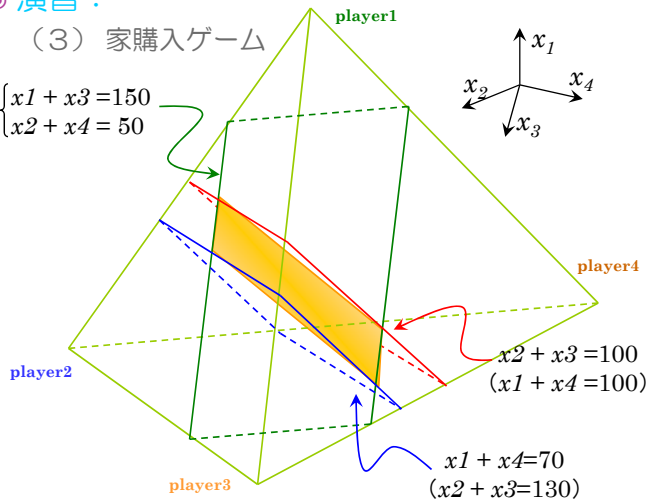
$\rightarrow$ コア $C(v) = \{ \mathbf{x} \in X \mid x_1 + x_3 = 150, x_2 + x_4 = 50, x_1 + x_4 \geq 70, x_2 + x_3 \geq 100 \}$

協力ゲームの理論

● 演習：

(3) 家購入ゲーム

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 150 \\ x_2 + x_4 = 50 \end{cases}$$



取引価格

$$\begin{aligned} p &: \text{player1} \Leftrightarrow \text{player3} \\ q &: \text{player2} \Leftrightarrow \text{player4} \end{aligned}$$

とすると...

$$\begin{cases} x_1 = p - 1000 \\ x_2 = q - 900 \\ x_3 = 1150 - p \\ x_4 = 950 - q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 120 &\leq p - q \leq 150 \\ 1000 &\leq p \leq 1150 \\ 900 &\leq q \leq 950 \end{aligned}$$

$$C(v) = \{ x \in X \mid x_1 + x_3 = 150, x_2 + x_4 = 50, x_1 + x_4 \geq 70, x_2 + x_3 \geq 100 \}$$

協力ゲームの理論

● コアの存在条件（線形計画法に基づく）

- ゲーム (N, v) において、コアが非空となる必要十分条件

$$\exists x \in X, \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = v(N), \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad (\emptyset \neq S \subsetneq N) \end{cases}$$

$$(P) \quad \begin{cases} \min. z = \sum_{i \in N} x_i \\ \text{s.t. } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \emptyset \neq S \subsetneq N \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} \max. w = \sum_{\emptyset \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \\ \text{s.t. } \sum_{\substack{i \in S \\ \emptyset \neq S \subsetneq N}} \gamma_S = 1 \quad (i \in N) \\ \gamma_S \geq 0 \quad (\emptyset \neq S \subsetneq N) \end{cases}$$

(P), (D)共に実行可能で最適解 z^*, w^* を持ち, $z^* = w^*$.
また、『 $z^* \leq v(N) \Leftrightarrow$ コアが非空』

Theorem

ゲーム (N, v) において、非空なコアが存在するための必要十分条件は、双対問題(D)の制約を満たす非負ベクトル γ_S に対し

$$\sum_{\emptyset \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \leq v(N)$$

協力ゲームの理論

● 仁 (nucleolus) (Schmeidler, 1969)

- 提携 S と 配分 $x=(x_1, \dots, x_n)$ について

$$e(S, x) := v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

【注: コアでは $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ より不満は常に0か負】

を「配分 x に対して 提携 S が持つ **不満**」という

- 配分 x に対して, 全員集合 N と 空集合 $\emptyset$ を除く $2^n - 2$ 個の提携の不満の量を大きい順に並べる.

$$\theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \dots \geq \theta_{2^n-2}(x)$$

【注: 全員集合の不満 $e(N, x) = 0$ ($\because$ 全体合理性)
空集合の不満 $e(\emptyset, x) = 0$ ($\because v(\emptyset) = 0$)】

- 2つの配分 x, y について

「 x は y より **受容的** である」とは, 以下が成り立つ

acceptable

$$\exists k \in \{1, \dots, 2^n - 2\}, \begin{cases} \theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(x) \geq \theta_k(x) \geq \dots \\ \theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(y) \geq \theta_k(y) \geq \dots \end{cases}$$

それよりも受容的な配分が存在しない配分を **仁** という

不満の量を大きい順に比較していき, 最初に異なるところで不満が小さい方が好ましい(受容的)と考える

最大不満の最小化

コアは複数存在したり, 空集合だったりする.
仁は, 常にただ一つの配分を与える解である.
コアが非空のときは, 仁はコアに含まれる.

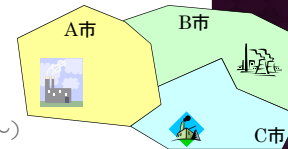
協力ゲームの理論

● 仁

- 例題: ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32~)

- 3市が各々独自に建設 ... A=5億円, B=3億円, C=2億円
- 共同施設の建設 ... A+B=7.2億円, B+C=4.8億円, C+A=6.6億円, A+B+C=8億円

費用分担問題における仁の応用
「滑走路使用料の決定」(岡田 p.360 参)



最大不満最小化

$$\begin{cases} e(\{A, B\}, x) = v(\{A, B\}) - (x_A + x_B) = 0.8 - (x_A + x_B) \\ e(\{B, C\}, x) = v(\{B, C\}) - (x_B + x_C) = 0.2 - (x_B + x_C) \\ e(\{C, A\}, x) = v(\{C, A\}) - (x_C + x_A) = 0.4 - (x_C + x_A) \\ e(\{A\}, x) = v(\{A\}) - x_A = -x_A \\ e(\{B\}, x) = v(\{B\}) - x_B = -x_B \\ e(\{C\}, x) = v(\{C\}) - x_C = -x_C \end{cases}$$

ただし, 全体合理性から $x_A + x_B + x_C = v(N) = 2$ も満たす必要がある

最小コアを求めるLP

$$\begin{aligned} \min. \quad & \varepsilon \\ \text{s.t.} \quad & 0.8 - (x_A + x_B) \leq \varepsilon \\ & 0.2 - (x_B + x_C) \leq \varepsilon \\ & 0.4 - (x_C + x_A) \leq \varepsilon \\ & -x_A \leq \varepsilon \\ & -x_B \leq \varepsilon \\ & -x_C \leq \varepsilon \\ & x_A + x_B + x_C = 2 \end{aligned}$$

最適値: $\varepsilon^* = -0.6$

最適解: $(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.6, 0.6)$

LPを有限回繰り返し解くことで仁を得る

任意の配分 x について, 不満が $\varepsilon = -0.6$ に一致する提携 S を除く.
($e(S, x) = -0.6$ となる S を除く)

そのうえで, 同様のLPを作って解く. 以下, この繰り返し.
例ではLP制約より $\begin{cases} -\varepsilon \leq x_A \leq \varepsilon + 1.8 \\ -\varepsilon \leq x_B \leq \varepsilon + 1.6 \\ -\varepsilon \leq x_C \leq \varepsilon + 1.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.6 \leq x_A \leq 1.2 \\ 0.6 \leq x_B \leq 1.0 \\ 0.6 \leq x_C \leq 0.6 \end{cases}$

故に, $e(\{A, B\}, x) = e(\{C\}, x) = -0.6$ なので, 提携 $\{A, B\}$ と $\{C\}$ の式を除く.

$$\begin{aligned} \min. \quad & \varepsilon \\ \text{s.t.} \quad & -\varepsilon \leq x_A \leq \varepsilon + 1.8 \\ & -\varepsilon \leq x_B \leq \varepsilon + 1.6 \\ & x_A + x_B = 1.4 \end{aligned}$$

最適値: $\varepsilon^* = -0.7$
最適解: $(x_A, x_B) = (0.7, 0.7)$

唯一配分の仁
 $(x_A, x_B, x_C) = (0.7, 0.7, 0.6)$

協力ゲームの理論

シャープレイ値も仁と同様、**唯一の解**を与える
コア・仁が「不満」をもとにしているのに対し、シャープレイ値は「貢献度」をもとにした解
コアに含まれるとは限らない

◎ シャープレイ値 (Shapley value)

- 提携に対するプレイヤーの**貢献度**をもとにした解
- プレイヤーが1人ずつ加わり全員提携を作る順列を考える
- プレイヤーが加わるにより新たに獲得できる量を**貢献度**とする
全員提携の順列が{1,2,...,i-1,i,...}のとき,
i番目に加わるプレイヤーの貢献度 = $v(\{1,2,...,i-1,i\}) - v(\{1,2,...,i-1\})$
- $n!$ 個の全ての順列が**当確率**で起こるときの、プレイヤーの**貢献度の期待値**をそのプレイヤーの**シャープレイ値**といふ
- プレイヤー i のシャープレイ値

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} (v(S) - v(S - \{i\}))$$
$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n)$$

プレイヤー i を含む提携 S を固定したとき、
提携 $S - \{i\}$ のメンバー数 = $|S| - 1$
 $N \setminus S$ のプレイヤー数 = $n - |S|$
より、提携 $S - \{i\} + \{i\} + N \setminus S$ の順列の総数は $(|S|-1)!(n-|S|)!$ 通り、
故に i が最後に参加して提携 S となる確率が $(|S|-1)!(n-|S|)!/n!$

○ ○ ○ ○ ○ i ○ ○ ○ ○ ○
S-1 n-|S|

- 補足: シャープレイ値は4つの公準を満たす唯一の解である
- 補足: v が優加法的なら個人合理性も満たし配分となる

公準1: 全体合理性
公準2: ナルプレイヤーの零評価
公準3: 対称性
公準4: 加法性

協力ゲームの理論

◎ シャープレイ値

- 例題: ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32~)
- 3市が各々独自に建設 ... A=5億円, B=3億円, C=2億円
- 共同施設の建設 ... A+B=7.2億円, B+C=4.8億円, C+A=6.6億円, A+B+C=8億円

全体提携 の順列	貢献度		
	A	B	C
A←B←C	0.0	0.8	1.2
A←C←B	0.0	1.6	0.4
B←A←C	0.8	0.0	1.2
B←C←A	1.8	0.0	0.2
C←A←B	0.4	1.6	0.0
C←B←A	1.8	2.0	0.0
合計	4.8	4.2	3.0

$$\left\{ \begin{aligned} v(\emptyset) &= v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0 \\ v(\{A,B\}) &= (5+3) - 7.2 = 0.8 \\ v(\{B,C\}) &= (3+2) - 4.8 = 0.2 \\ v(\{C,A\}) &= (2+5) - 6.6 = 0.4 \\ v(\{A,B,C\}) &= (5+3+2) - 8 = 2 \end{aligned} \right.$$

各プレイヤーのシャープレイ値

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_A &= 4.8 / 6 = 0.8 \\ \phi_B &= 4.2 / 6 = 0.7 \\ \phi_C &= 3.0 / 6 = 0.5 \end{aligned} \right.$$

シャープレイ値による唯一の配分
 $(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$

協力ゲームの理論

安定集合 (stable set) [or 解 (solution), von Neumann-Morgenstern 解]

■ 例題 (再掲) : 3人定和ゲーム

- 一定量の資金を3人の多数決で分ける。多数派提携が資金の全てを獲得。
 - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
 - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\emptyset) = 0$
 - **コア** $C(v) = \emptyset$

でも... 現実には交渉の決着がつき、配分がある範囲に収まるのでは？
例: 提携 $\{1,2\}$ が成立 → 配分 $x = (0.5, 0.5, 0)$

結局, $K = \{ (0.5, 0.5, 0), (0.5, 0, 0.5), (0, 0.5, 0.5) \}$ のいずれかで決着！
[互いに支配関係にない。また, $(0.4, 0, 0.6)$ などは $(0.5, 0.5, 0)$ に支配される。]

■ 安定集合 (stable set)

– 配分の集合 X の部分集合 K が以下の性質を満たす時, K を安定集合という

(1) 内部安定性 (internal stability)

$x \in K, y \in K \rightarrow x, y$ は互いに支配関係にない

(2) 外部安定性 (external stability)

K に属さない任意の配分は, K に属す少なくとも1つの配分に支配される

協力ゲームの理論

安定集合

- $\text{Dom } x := \{ y \mid y \in X, x \text{ dom } y \}$: 配分 x に支配される配分の集合
- $\text{Dom } A := \bigcup_{x \in A} \text{Dom } x$: 集合 A の配分に支配される配分の集合
 - 内部安定性 $\Leftrightarrow K \cap \text{Dom } K = \emptyset$
 - 外部安定性 $\Leftrightarrow K \cup \text{Dom } K = A$
 - 安定集合 $\Leftrightarrow K = A - \text{Dom } K$ を満たす集合 $K \subset A$

Theorem

ゲーム (N, v) の安定集合がただ1つの配分から成るための必要十分条件は, ゲームが非本質的であること。

Theorem

ゲーム (N, v) のコア C および安定集合 K が共に非空ならば
 $C \subset K$.

投票ゲーム

- 投票ゲーム
 - N人のプレイヤーによる投票で何らかの決定がなされるシステムを考える。
 - 投票者の様々なグループ（Nの部分集合）＝**提携**（coalition）
 - 法案の可決など，選択権を持つ提携＝**勝利提携**（winning coalition） W
 - そうでない提携＝**敗北提携**（losing coalition） L
 - (N, W) ：投票ゲーム（voting game）
ただし，以下の性質を持つとする
 - $(1) N \in W, \varnothing \in L$ 全員提携は勝利提携，空集合は敗北提携
 - $(2) S \in W \text{ かつ } S \subseteq T \rightarrow T \in W$ 勝利提携を含む提携は勝利提携
 - $(3) S \in W \rightarrow N - S \in L$ 勝利提携の補集合は敗北提携
 - 例：3つの政党 $N=\{1,2,3\}$ の議員で構成されている議会議定数21，各党議席数(10,10,1)，過半数で議案可決。
 - 勝利提携 $W = \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$
 - 敗北提携 $L = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing \}$

各党 $N=\{1,2,3\}$ の
影響力(投票力指数)
はどの程度か？

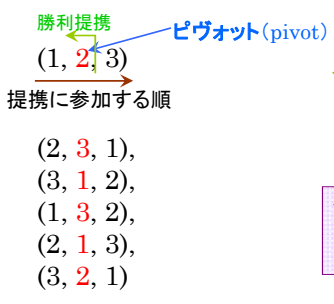
投票ゲーム

- 投票力指数が満たすべき性質
 - [8] p.45～
- 投票力指数
 - シャプレー・シュービク指数（Shapley-Shubik index）（1954）
 - バンザフ指数（Banzhaf index）（1965）
 - ディーガン・パックル指数（Deegan-Packel index）（1978）
 -

投票ゲーム

● 投票力指数

- シャプレー・シュービック指数 (SS指数)
 - 例：3人 $N=\{1,2,3\}$ の単純多数決ゲーム
 - 勝利提携 $W = \{ \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\} \}$



協力ゲームの解の1つ
シャプレー値を、投票者
の影響力の評価に適用し
たもの。

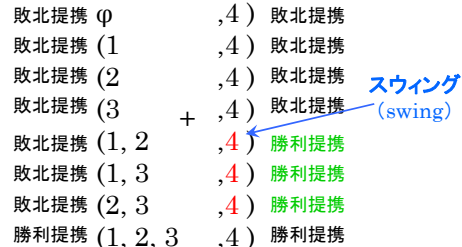
全ての順列の生起確率が等しい
と仮定したときの、各投票者のピ
ヴォットとなる回数の期待値

➡ SS指数: $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$

投票ゲーム

● 投票力指数

- バンザフ指数 (絶対Bz指数)
 - 例：4人 $N=\{1,2,3,4\}$ の単純多数決ゲーム
 - 勝利提携 $W = \{ \{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\} \}$
 - $\{1,2,3\}$ の3人による全ての部分集合



全ての投票者が賛成・反対を表
明しているとき、自らの投票態度
を変更することによって結果を変
えることの出来る投票者(スウィ
ング)となる回数の期待値

➡ 絶対Bz指数: $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (3/8, 3/8, 3/8, 3/8)$

正規Bz指数: $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4) \sum_{i \in N} \hat{\beta}_i = 1$ と正規化

投票ゲーム

投票力指数

■ ディーガン・パックル指数 (DP指数)

- 投票者は「極小勝利提携 W^m 」に属しているとき、影響力を持つという考え
- ただし、極小勝利提携に属す投票者は全て同じ影響力を持つとする

- 投票者 i のDP指数は、
$$\gamma_i = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W^m, S \ni i} \frac{1}{|S|}$$

極小勝利提携
勝利提携のうち、1人でも抜けると敗北提携になってしまうもの。

各極小勝利提携の生起確率が同じと仮定したときの、各投票者の影響力の割合

- 例：4人 $N=\{1,2,3,4\}$ の単純多数決ゲーム

- 勝利提携 $W = \{ \{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \}$
- 極小勝利提携 $W^m = \{ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \}$
- 極小勝利提携の全体 $|W^m| = 4$

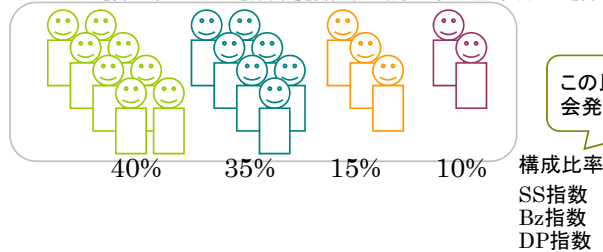
$$\begin{cases} \{1,2,3\} \rightarrow (1/3, 1/3, 1/3, 0) \\ \{1,2,4\} \rightarrow (1/3, 1/3, 0, 1/3) \\ \{1,3,4\} \rightarrow (1/3, 0, 1/3, 1/3) \\ \{2,3,4\} \rightarrow (0, 1/3, 1/3, 1/3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{投票者1についての和: } 1 \\ \text{投票者2についての和: } 1 \\ \text{投票者3についての和: } 1 \\ \text{投票者4についての和: } 1 \end{cases}$$

DP指数: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

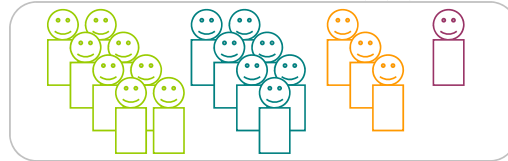
投票ゲーム

投票力指数の意味

- 例：定数20の議会，4政党所属議員で構成，過半数で議案可決。



- 例：定数が19に変化し，議席数が(8,7,3,1)となった。



投票ゲーム

◎ 演習：

- 以下の各投票ゲームにおけるSS指数, Bz指数, DP指数を計算しよう
 - (1) 3人のプレイヤー $N=\{1,2,3\}$ による単純多数決ゲームを考える。ただし、プレイヤー1には拒否権がある。
 - (2) 4つの政党がそれぞれ議席数(40, 30, 10, 5)を占めている議会において、2/3以上の賛成で議案を通すことが出来る。
 - (3) 8社の株を5人の人が所有しており、その比率は(30%, 25%, 25%, 15%, 5%)である。株主総会において、過半数の意見が通るとする。



投票力指数の説明と投票力指数を計算する, 松井先生のWebサイト

参考文献

- [1] 鈴木光男「ゲーム理論入門」 共立出版(1981, 2003(新装版))
- [2] 鈴木光男「新ゲーム理論」 勁草書房(1994)
- [3] 岡田章「ゲーム理論」 有斐閣(1996)
- [4] 鈴木光男・武藤滋男「協力ゲームの理論」 東京大学出版会(1985)
- [5] 中山幹夫・舟木由喜彦・武藤滋男「ゲーム理論で解く」 有斐閣ブックス(2000)
- [6] 舟木由喜彦「エコノミックゲームセオリー」 サイエンス社(2001)
- [7] 武藤滋男・小野理恵「投票システムのゲーム分析」 日科技連(1998)
- [8] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」 朝倉書店(2004)
- [9] 松井知己『投票力指数を計算する』
<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/voting/voting.html>
- [10] 毛利裕昭・岡本吉央「離散最適化と協力ゲーム(1)(2)」 オペレーションズ・リサーチ(2003)Vol.48,no.1,2