

意思決定科学
DEA（包絡分析法）

情報学部 堀田敬介

2011年1月14日（金）

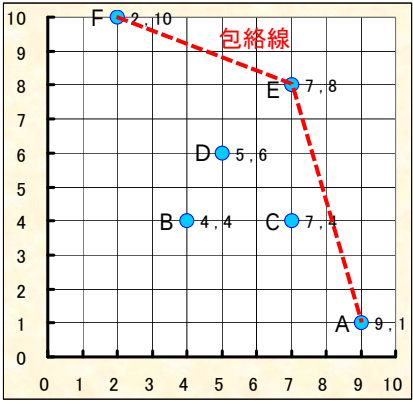
考えよう

- ▶ あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500



	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10



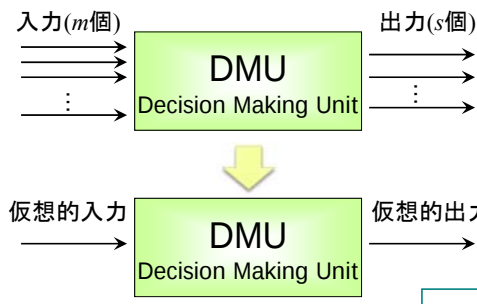
Contents

- ▶ DEAとは？
 - ▶ DMU(意思決定主体)
 - ▶ 効率性:DMUの入力・出力と効率値
- ▶ DEAの基本的モデル
 - ▶ CCRモデル
- ▶ 生産可能集合とその他のモデル
 - ▶ 凸包モデル
 - ▶ BCCモデル
 - ▶ IRSモデル
 - ▶ DRSモデル
 - ▶ GRSモデル

DEAとは？

- ▶ DEA (Data Envelopment Analysis)

envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒



比率尺度を効率性として見なして相対比較

DMUの変換効率 = $\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$

最も変換効率の良いDMUを基準として、他のDMUの非効率性を算出し、比較する。
ただし、変換効率はDMU毎に最も有利になるように計算。

DEAとは？

- ▶ 1入力・1出力
 - ▶ 営業所の営業マン人数と売上について ([2] p.1)

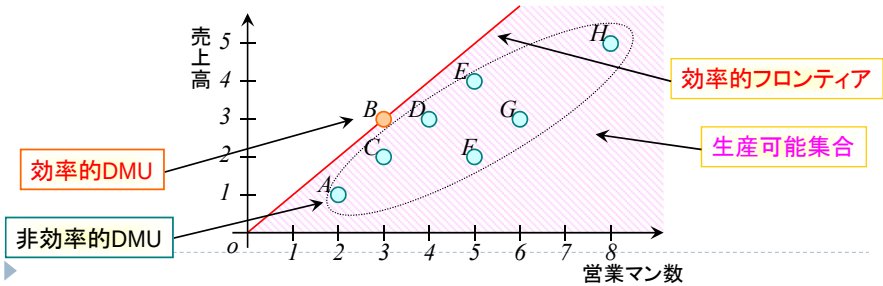
	営業所 (DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
入力	営業マン数	2	3	3	4	5	5	6	8
出力	売上高	1	3	2	3	4	2	3	5



DEAとは？

- ▶ 1入力・1出力
 - ▶ 営業所の営業マン人数と売上について ([2] p.1)

	営業所 (DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
出力/入力	売上高/営業マン数	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625
	効率値	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625



DEAとは？

- ▶ 2入力・1出力
- ▶ デパートの各店舗の売上 (cf. [2] p.5)

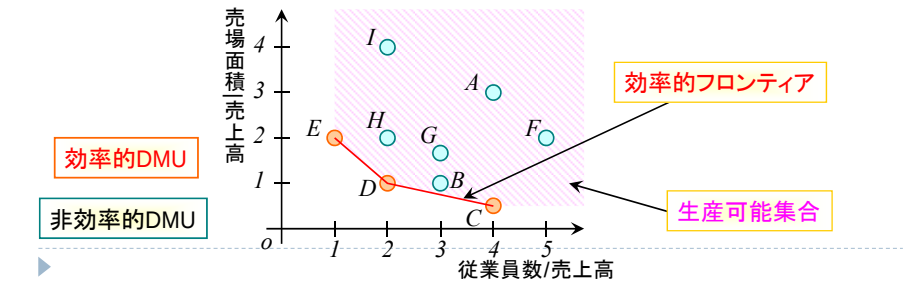
	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1	従業員数	4	9	8	4	2	5	3	6	4
入力2	売場面積	3	3	1	2	4	2	6	6	8
出力	売上高	1	3	2	2	2	1	2	3	2



DEAとは？

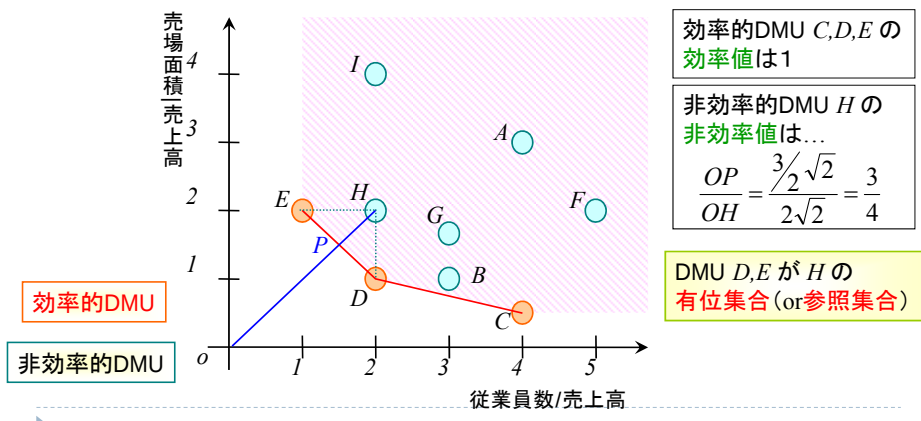
- ▶ 2入力・1出力
- ▶ デパートの各店舗の売上 (cf. [2] p.5)

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1/出力	従業員数/売上高	4	3	4	2	1	5	3/2	2	2
入力2/出力	売場面積/売上高	3	1	1/2	1	2	2	3	2	4



DEAとは？

- ▶ 2入力・1出力
 - ▶ デパートの各店舗の売上 (cf. [2] p.5)



DEAとは？

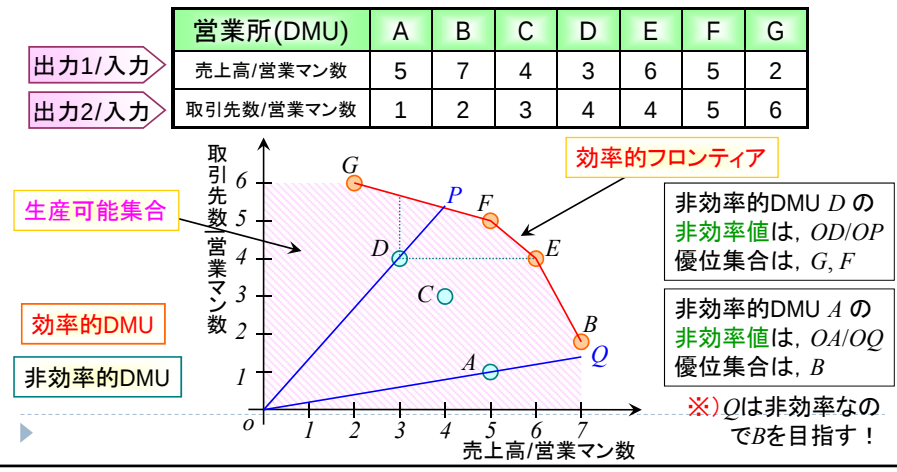
- ▶ 1入力・2出力
 - ▶ 各営業所の取引先と売上 (cf. [2] p.7)

営業所 (DMU)		A	B	C	D	E	F	G
入力	営業マン数	2	1	3	1	2	2	4
	売上高	10	7	12	3	12	10	8
	取引先数	2	2	9	4	8	10	24



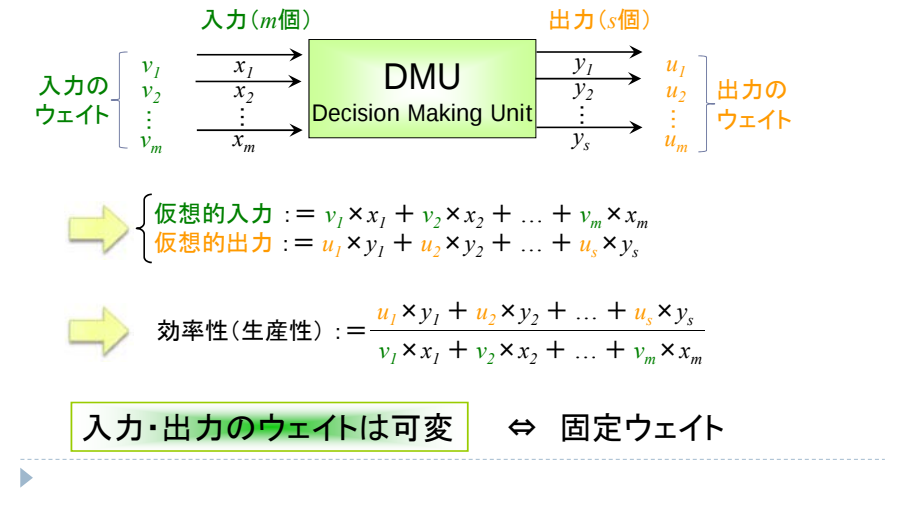
DEAとは？

- ▶ 1入力・2出力
 - ▶ 各営業所の取引先と売上 (cf. [2] p.7)



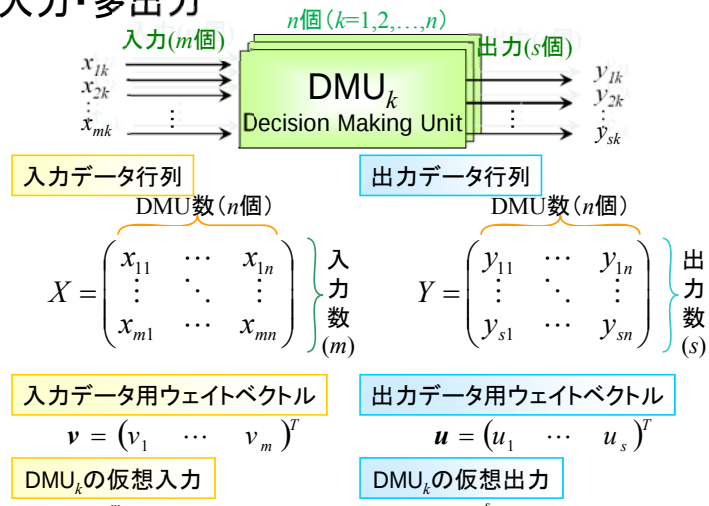
DEA：CCRモデル

- ▶ 多入力・多出力



DEA：CCRモデル

多入力・多出力



DEA：CCRモデル

多入力・多出力

測定対象DMU_o($o=1, \dots, n$)のウェイトを計算する

分数計画問題

同値

線形計画問題

$\langle FP_o \rangle$

$\max. \theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}}$

s.t.

$\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k=1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$

$u_1, \dots, u_s \geq 0$

$\langle LP_o \rangle$

$\max. \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$

s.t.

$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$

$u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$

$u_1, \dots, u_s \geq 0$

対象のDMUの効率性を最大化

全てのDMUの効率性は1以下

入出力用可変ウェイトの変数は非負

$\langle FP_o \rangle$ の目的関数について分母を1にし、分子を最大化

$\langle FP_o \rangle$ の制約の分母を払う

注)全部でn個のLPを解く！

DEA：CCRモデル

- ▶ 多入力・多出力
- ▶ 効率性について

<LP_o>

max. $\theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$

s.t.

$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$

$u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$

$u_1, \dots, u_s \geq 0$

Def: DMU_o がD効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* = 1$

DMU_o がD非効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* < 1$

注) D効率的だからといって効率的とは言えない

Lem: DMU_o がD非効率的, 即ち $\theta_o^* < 1$ なら

$\exists k \in \{1, \dots, n\}, u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}$

E_o に属するDMUはD効率的

この等号を満たすkの集合を DMU_o の優位集合 (or 参照集合) という

Def: DMU_o の優位集合 (or 参照集合)

$E_o := \{k \in \{1, \dots, n\} \mid u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}\}$

効率的フロンティアの一部を形成

DEA：CCRモデル

- ▶ 多入力・多出力
- ▶ <LP_o>の双対問題と最適解について

CCRモデル

<LP_o>

max. $\theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$

s.t.

$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$

$u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$

$u_1, \dots, u_s \geq 0$

<D_o>

min. θ

s.t.

$\theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \dots + x_{in} \lambda_n) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$

$(y_{j1} \lambda_1 + \dots + y_{jn} \lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, s)$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

双対問題

DMU_oの入力*i*

入力*i*の重み和

出力*j*の重み和

DMU_oの出力*j*

$d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \dots + x_{in} \lambda_n) \quad (i = 1, \dots, m)$

$d_j^y := (y_{j1} \lambda_1 + \dots + y_{jn} \lambda_n) - y_{jo} \quad (j = 1, \dots, s)$

入力の余剰

出力の不足

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 入力の余剰と出力の不足を求める

入力の余剰の和

出力の不足の和

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + \cdots + d_m^x) + (d_1^y + \cdots + d_s^y) \\ \text{s.t.} & d_i^x = \theta^* x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \quad (i=1, \cdots, m) \\ & d_j^y = (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \quad (j=1, \cdots, s) \\ & \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0 \\ & d_1^x, \cdots, d_m^x \geq 0 \\ & d_1^y, \cdots, d_s^y \geq 0 \end{aligned}$$

<LP_o>の最適値

DEAの実行手順

<D_o>を解いて最適解 (θ*, λ₁*, ..., λ_n*) を得た後,
このLPを解いて最適解 (d₁^{x*}, ..., d_m^{x*}, d₁^{y*}, ..., d_s^{y*}) を得る.

Def: DEA効率性の定義
θ* = 1, (d₁^{x*}, ..., d_m^{x*}, d₁^{y*}, ..., d_s^{y*}) = 0 となるDMUはDEA効率
それ以外のDMUはDEA非効率



DEA：CCRモデル

- ▶ 例題
- ▶ 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2



➡

効率性 (生産性) $:= \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + v_3 \times x_3}$



DEA：CCRモデル

▶ 学生A(DMU_A)の効率性を求める

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

分数計画問題 <FP_A>

$$\begin{aligned} \max. \theta := & \frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \leq 1 \\ & \frac{60u_1 + 90u_2}{20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\ & \frac{30u_1 + 55u_2}{15v_1 + v_2 + 0.8v_3} \leq 1 \\ & \frac{20u_1 + 70u_2}{30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\ & \frac{70u_1 + 24u_2}{20v_1 + 0.9v_2 + v_3} \leq 1 \\ & \frac{50u_1 + 60u_2}{16v_1 + v_2 + v_3} \leq 1 \\ & v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

線形計画問題 <LP_A>

$$\begin{aligned} \max. \quad & 40u_1 + 30u_2 \\ \text{s.t.} \quad & 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 = 1 \\ & 40u_1 + 30u_2 \leq 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 \\ & 60u_1 + 90u_2 \leq 20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3 \\ & 30u_1 + 55u_2 \leq 15v_1 + v_2 + 0.8v_3 \\ & 20u_1 + 70u_2 \leq 30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3 \\ & 70u_1 + 24u_2 \leq 20v_1 + 0.9v_2 + v_3 \\ & 50u_1 + 60u_2 \leq 16v_1 + v_2 + v_3 \\ & v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(P) 主問題

(D) 双対問題

$$\begin{aligned} \min. \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\ & 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\ & (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

DEA：CCRモデル

▶ 学生A(DMU_A)の効率性を求める

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

線形計画問題 <LP_A>

$$\begin{aligned} \min. \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\ & 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\ & (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

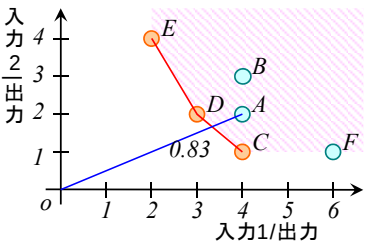
<LP_A>の最適値
θ*=1なら
次のLPも解く

$$\begin{aligned} \max. \quad & (d_1^x + d_2^x + d_3^x) + (d_1^y + d_2^y) \\ \text{s.t.} \quad & d_1^x = 40 \cdot \theta^* - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \\ & d_2^x = 0.8 \cdot \theta^* - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_3^x = \theta^* - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \\ & d_2^y = (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \\ & d_1^x, d_2^x, d_3^x, d_1^y, d_2^y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

DEA：CCRモデル

▶ 例題2 ([3] p.15)

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1



DMU A についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & 2\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

→ $(\theta^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0.83, 0, 0, 0.33, 0.67, 0, 0)$

→ $\begin{cases} \text{入力} & 0.83 \times A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \\ \text{出力} & A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \end{cases}$

DMU A はDEA非効率的で、
有位集合はDMU C, D

DEA：CCRモデル

▶ 例題2 ([3] p.15)

DMU C についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

→ $(\theta^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\ \text{s.t.} & d_1^x = 1 \cdot 4 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\ & d_2^x = 1 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0 \end{aligned}$$

→ $(d_1^x, d_2^x, d_1^y) = (0, 0, 0)$ → DMU C はDEA効率的

DEA：CCRモデル

▶ 例題2 ([3] p.15)

DMU F についての問題

min. θ

s.t. $6\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0$

$\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0$

➡ $(\theta^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

max. $(d_1^x + d_2^x) + (d_1^y)$

s.t. $d_1^x = 1 \cdot 6 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6)$

$d_2^x = 1 \cdot 1 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6)$

$d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0$

➡ $(d_1^x, d_2^x, d_1^y) = (2, 0, 0)$

DMU F は DEA 非効率
優位集合は C で、入力余剰が 入力1 で 2

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

DEAの特徴

▶ 特徴(長所・短所)

▶ 他と違った特徴を持つDMUは、DEA効率的と判断されやすい

→ 他と異なることが良いことの場合は、DEAは良い指標

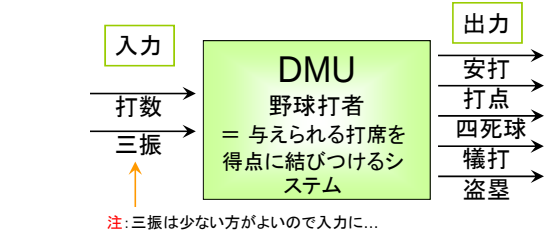
▶ 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある

▶ DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

例題（DEAを用いた野球打者評価）

CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について、DEAにより評価



		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6

データ(一部加工)
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題（DEAを用いた野球打者評価）

CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について、DEAにより評価

- 結果例: 2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗(横)

$<D_o>$ を解いた結果: $\theta=0.8007$, $\lambda_3=0.1638$, $\lambda_5=0.2670$, $\lambda_8=0.1765$, $\lambda_{37}=0.3476$

各入力) $0.8007 \times \text{石井琢朗} = 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)}$
 $+ 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)}$
各出力) $\text{石井琢朗} = 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)}$
 $+ 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)}$

- 結果例: 2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏(巨)

$<D_o>$ を解いた結果: $\theta=0.9053$, $\lambda_1=0.3890$, $\lambda_3=0.1581$, $\lambda_4=0.0225$, $\lambda_7=0.2917$

各入力) $0.9053 \times \text{二岡智宏} = 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)}$
 $+ 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)}$
各出力) $\text{二岡智宏} = 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)}$
 $+ 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)}$

注: $<D_o>$ のモデル化, 解は cplex9.0 による

演習：やってみよう

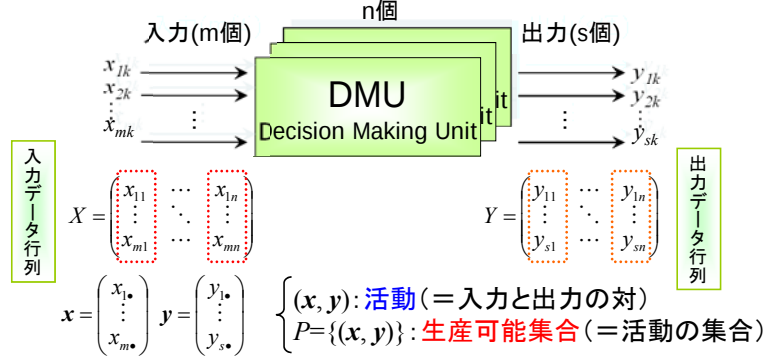
(DEAを用いた野球打者評価) CCRモデルによる

- ▶ 昨シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について, DEAにより評価



生産可能集合

- ▶ 生産可能集合 P

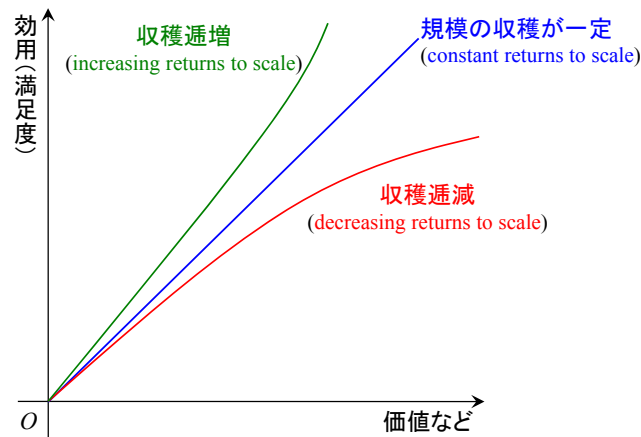


- ❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)
 - (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
 - (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
 - (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
 - ▶ (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

生産可能集合

「規模の収穫が一定」とは？



注: 一般には価値が大きくなるほど、効用の増加量は減る場合が多い。

生産可能集合

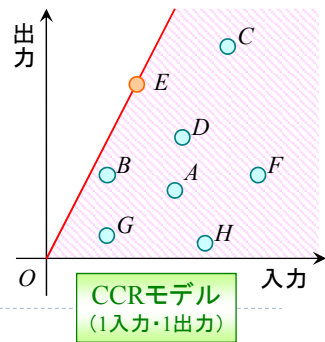
Charnes-Cooper-Rhodes

- 生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)
- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\}$$

実際の問題は θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$



生産可能集合

注: CCRモデルは、凸包モデルの $L=0, U=\infty$ の場合とみなせる

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

L, U の取り方により変わる

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

実際の問題は θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$

λ_1, λ_2 の条件による $x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2$ の取り得る範囲

生産可能集合

Banker-Charnes-Cooper

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル1: BCCモデル [$L=U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

実際の問題は θx_o と y_o を使う

$e\lambda = 1$

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$

生産可能集合

Increasing Returns to Scale

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル2: IRSモデル [$L=1, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

実際の問題は θx_0 と y_0 を使う

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq \theta, L \leq e\lambda \leq U\}$$

$e\lambda \geq 1$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 1$

収穫通増

比較的小規模の活動の効率性を重視

IRSモデル (1入力・1出力)

生産可能集合

Decreasing Returns to Scale

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル3: DRSモデル [$L=0, U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

実際の問題は θx_0 と y_0 を使う

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq \theta, L \leq e\lambda \leq U\}$$

$e\lambda \leq 1$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1$

収穫通減

比較的大規模の活動の効率性を重視

DRSモデル (1入力・1出力)

生産可能集合

General Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル4: GRSモデル [$L \leq 1, U \geq 1$])
 - (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
 - (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
 - (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
 - (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

現存の活動の規模を
ある程度縮小拡大した
ものまで認める立場

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

実際の問題は
 θx_0 と y_0 を使う

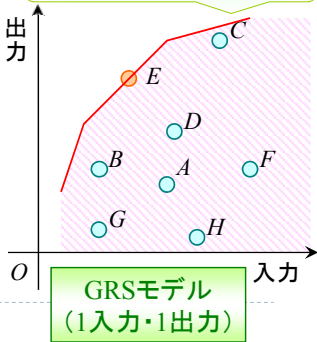
$$ex) 0.8 \leq e\lambda \leq 1.2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1.2$$



参考文献

- [1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, "Measuring the Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978
- [2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連(1993)
- [3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店(2001)
- [4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- [5] ...