

統計の分析と利用

1. データとその扱い

堀田 敬介

1-1. 一次元のデータ

1変数の図化: 度数分布とヒストグラム, 幹葉プロット, 箱ひげ図

1変数の数表現: 代表値と散らばり, データの標準化

データの尺度

1-2. 二次元のデータ

2変数の関係1: 散布図, 共分散・相関係数

2変数の関係2: クロス集計, クラメルの変数相関係数

2変数の関係3: 点グラフ, 相関比

2次元のデータ

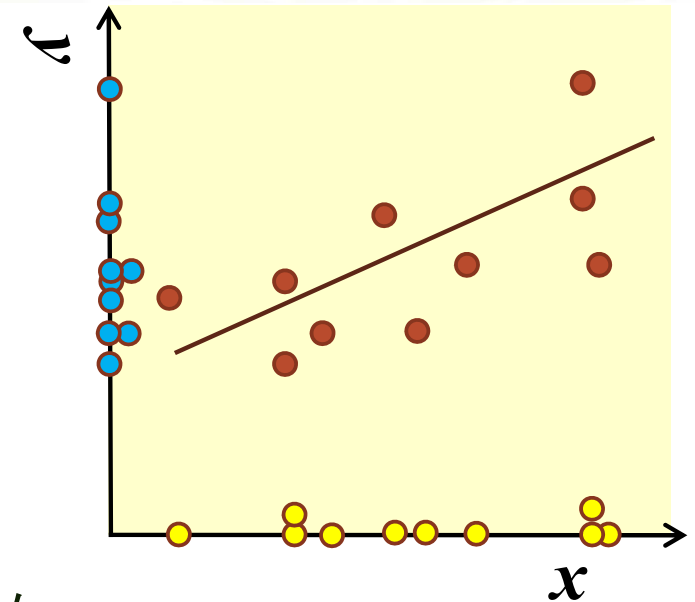
□ データが2つになるコトの意味

□ 1次元のデータ: 1変数 x

- データの分布はどうなっているかな
- 代表値は？ 散らばり具合は？

□ 2次元のデータ: 2変数 x, y

- 変数 x のデータの分布はどうなっているかな
- 変数 x の代表値は？ 散らばり具合は？
- 変数 y のデータの分布はどうなっているかな
- 変数 y の代表値は？ 散らばり具合は？
- 変数 x と y の関係(相関？因果？)はどうかな？



2次元のデータ

□ 2変数 x, y の相関関係

□ 相関 correlation

□ x と y との間に区別をつけず対等に見る見方・方法, **単なる関係**

□ 例: 数学の成績と英語の成績

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
数学 x	65	75	84	72	69	70	72	68	78
英語 y	59	68	75	72	69	65	60	68	74

□ 回帰 regression

□ x から y を見る見方・方法

□ ある一方が他方を左右する場合

□ 例: 年齢と血圧, 所得と消費,
人口と商業, 気候と住環境

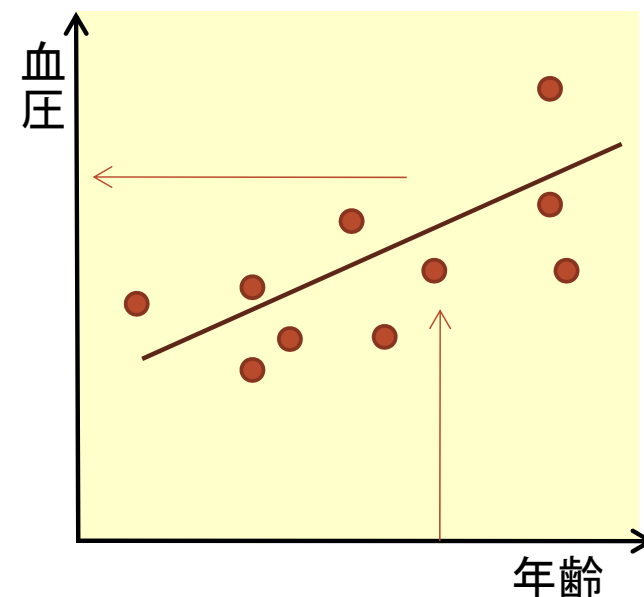
One Point:

相関関係

常に成り立つ

成り立つとは
限らない

因果関係



2次元のデータ

□ 2変数 x, y の相関関係を調べる方法(図と式)

尺度

□ 例1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
性別 x	男	男	女	男	男	男	女	女	男	女
嗜好 y	紅茶	緑茶	珈琲	珈琲	緑茶	珈琲	紅茶	珈琲	珈琲	紅茶

質的

質的

クロス集計

連関係数

□ 例2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
飲量 x	15	32	16	30	50	12	14	24	18	19
嗜好 y	紅茶	緑茶	珈琲	珈琲	緑茶	珈琲	紅茶	珈琲	珈琲	紅茶

量的

質的

点グラフ

相関比

□ 例3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
身長 x	176	170	163	173	170	171	165	170	176	156
体重 y	61	73	54	65	67	62	51	57	77	43

量的

量的

散布図

相関係数

2変数の関係

□ 2変数の関係1: x (質的) $\times$ y (質的) 図

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
性別 x	男	男	女	男	男	男	女	女	男	女	質的
嗜好 y	紅茶	緑茶	珈琲	珈琲	緑茶	珈琲	紅茶	珈琲	珈琲	紅茶	質的

クロス集計

	紅茶	緑茶	珈琲	計	
男	1	2	3	6	周辺度数
女	2	0	2	4	
計	3	2	5	10	総度数

周辺度数

2変数の関係

□ 2変数の関係1: x (質的) $\times$ y (質的)式

	紅茶	緑茶	珈琲	計
男	1	2	3	6
女	2	0	2	4
計	3	2	5	10

連関係数

クロス集計から理論度数を求める

	紅茶	緑茶	珈琲	計
男	1.8	1.2	3.0	6
女	1.2	0.8	2.0	4
計	3	2	5	10

$$1.8 = \frac{3 \cdot 6}{10}$$

$$2.0 = \frac{5 \cdot 4}{10}$$

□ クラメルの連関係数 *Cramer's coefficient of association*

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot m}}$$

$$(0 \leq V \leq 1)$$

$$\chi^2 = \frac{(1-1.8)^2}{1.8} + \frac{(2-1.2)^2}{1.2} + \dots + \frac{(0-0.8)^2}{0.8} + \frac{(2-2.0)^2}{2.0}$$

$$n = 10$$

$$m = \min\{2-1, 3-1\}$$

ピアソンの
 χ^2 統計量

(行数-1)と(列数-1)
の小さい方

2変数の関係

□ 2変数の関係1: x (質的) $\times$ y (質的)式

□ クラメルの連関係数 *Cramer's coefficient of association*

	紅	緑	珈	計
男	0	3	9	12
女	6	0	0	6
計	6	3	9	18

	紅	緑	珈	計
男	3	1	8	12
女	3	2	1	6
計	6	3	9	18

	紅	緑	珈	計
男	4	2	6	12
女	2	1	3	6
計	6	3	9	18

$$\left\{ \begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(0-4)^2}{4} + \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(9-6)^2}{6} \\ &\quad + \frac{(6-2)^2}{2} + \frac{(0-1)^2}{1} + \frac{(0-3)^2}{3} \\ &= 18 \\ n &= 18 \\ m &= \min\{2-1, 3-1\} = 1 \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{18}{18 \cdot 1}} = 1 \quad \text{嗜好と性別は} \quad \text{完全相関}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(3-4)^2}{4} + \frac{(1-2)^2}{2} + \frac{(8-6)^2}{6} \\ &\quad + \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(2-1)^2}{1} + \frac{(1-3)^2}{3} \\ &= 17/4 \\ n &= 18 \\ m &= \min\{2-1, 3-1\} = 1 \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{17/4}{18 \cdot 1}} \approx 0.49 \quad \text{嗜好と性別} \quad \text{は} \quad \text{多少相関}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(4-4)^2}{4} + \frac{(2-2)^2}{2} + \frac{(6-6)^2}{6} \\ &\quad + \frac{(2-2)^2}{2} + \frac{(1-1)^2}{1} + \frac{(3-3)^2}{3} \\ &= 0 \\ n &= 18 \\ m &= \min\{2-1, 3-1\} = 1 \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{0}{18 \cdot 1}} = 0 \quad \text{嗜好と性別} \quad \text{は} \quad \text{無相関}$$

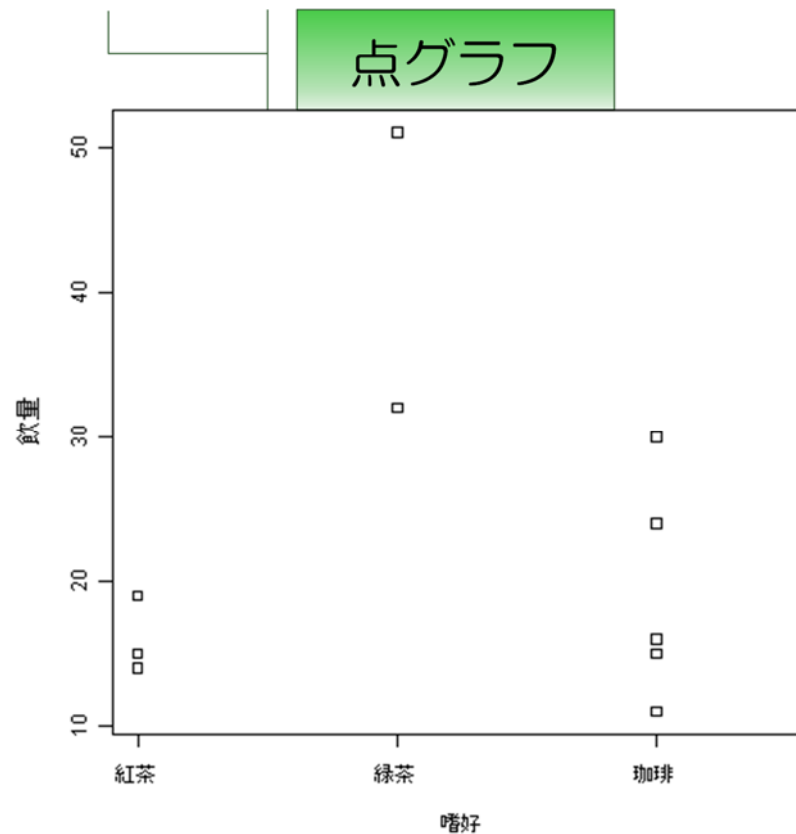
2変数の関係

□ 2変数の関係2: x (量的) $\times$ y (質的) 図

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
飲量 x	15	32	16	30	50	12	14	24	18	19
嗜好 y	紅茶	緑茶	珈琲	珈琲	緑茶	珈琲	紅茶	珈琲	珈琲	紅茶

量的

質的



2変数の関係

□ 2変数の関係2: x (量的) $\times$ y (質的)式

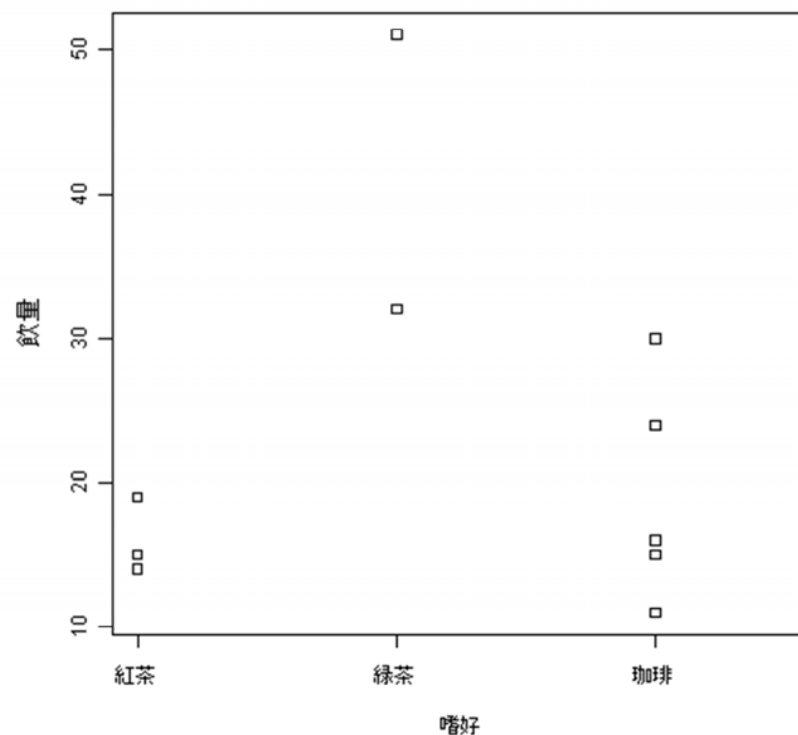
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
飲量 x	15	32	16	30	50	12	14	24	18	19	量的
嗜好 y	紅茶	緑茶	珈琲	珈琲	緑茶	珈琲	紅茶	珈琲	珈琲	紅茶	質的

相関比

□ 相関比 *correlation ratio*

$$\eta^2 = \frac{S_T}{S_B + S_T}$$

$$(0 \leq \eta^2 \leq 1)$$



2変数の関係

□ 2変数の関係2: x (量的) $\times$ y (質的)式

□ 相関比 *correlation ratio*

$$\eta^2 = \frac{S_T}{S_B + S_T} \quad (0 \leq \eta^2 \leq 1)$$

$$\eta^2 = \frac{840}{376 + 840} \approx 0.691$$

	紅茶	緑茶	珈琲
	14 15 19	32 50	12 16 18 24 30
個数	3	2	5
平均	16	41	20
偏差平方	49	324	9
			全平均 23

$$49 = (16 - 23)^2$$

$$324 = (41 - 23)^2$$

$$9 = (20 - 23)^2$$

$$S_T = \underline{840} = 49 \times 3 + 324 \times 2 + 9 \times 5$$

級間変動

= 級平均と全平均との偏差平方の加重和

偏差平方	4 1 9	81 81	64 16 4 16 100
計	14	162	200

級間変動

$$14 = (14 - 16)^2 + (15 - 16)^2 + (19 - 16)^2$$

$$162 = (32 - 41)^2 + (50 - 41)^2$$

$$200 = (12 - 20)^2 + (16 - 20)^2 + \dots + (30 - 20)^2$$

$$S_B = \underline{376} = 14 + 162 + 200$$

級内変動

= 級内データと級平均との偏差平方の和

級内変動

2変数の関係

□ 2変数の関係2: x (量的) $\times$ y (質的)式

□ 相関比 *correlation ratio*

$$\eta^2 = \frac{840}{0 + 840} = 1$$

$$\eta^2 = \frac{840}{376 + 840} \approx 0.691$$

$$\eta^2 = \frac{0}{314 + 0} = 0$$

嗜好と飲量は完全相関

	紅茶	緑茶	珈琲	
	16	41	20	
	16	41	20	
	16		20	
			20	
			20	
個数	3	2	5	全平均
平均	16	41	20	23
偏差平方和	49	324	9	840

級間変動

偏差平方和	0	0	0	
	0	0	0	
	0		0	
			0	
			0	
			0	合計
計	0	0	0	0

級内変動

嗜好と飲量は多少相関

	紅茶	緑茶	珈琲	
	14	32	12	
	15	50	16	
	19		18	
			24	
			30	
個数	3	2	5	全平均
平均	16	41	20	23
偏差平方和	49	324	9	840

級間変動

偏差平方和	4	81	64	
	1	81	16	
	9		4	
			16	
			100	合計
計	14	162	200	376

級内変動

嗜好と飲量は無相関

	紅茶	緑茶	珈琲	
	19	15	15	
	21	31	20	
	29		25	
			25	
			30	
個数	3	2	5	全平均
平均	23	23	23	23
偏差平方和	0	0	0	0

級間変動

偏差平方和	16	64	64	
	4	64	9	
	36		4	
			4	
			49	合計
計	56	128	130	314

級内変動

2変数の関係

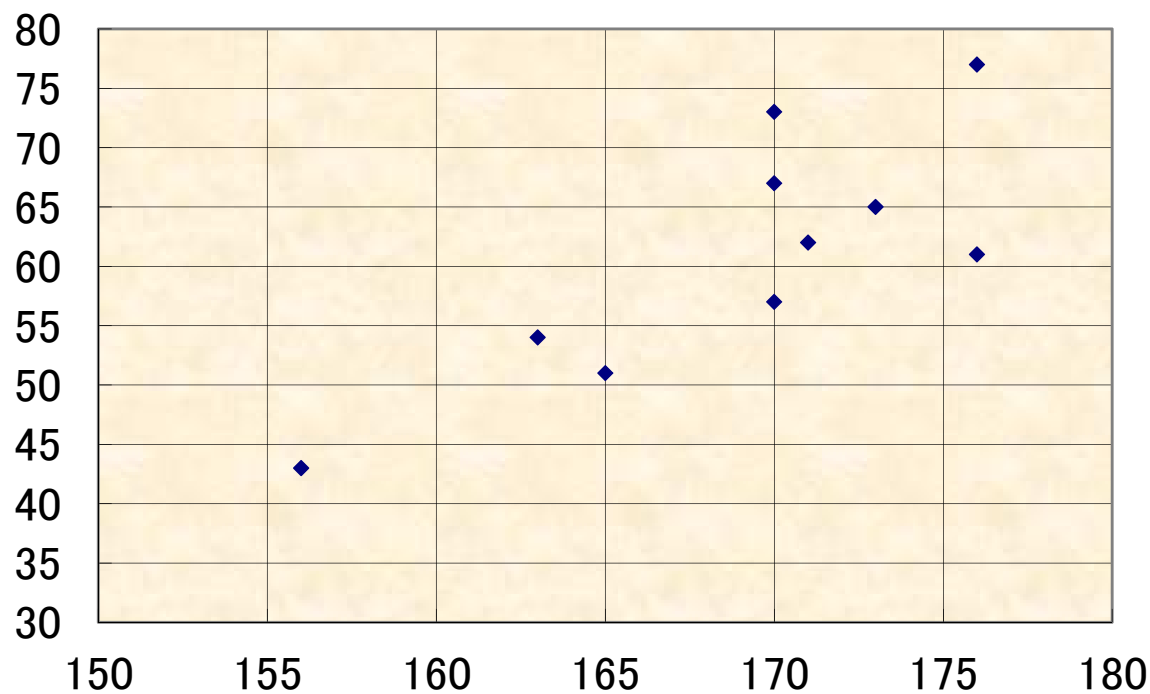
□ 2変数の関係3: x (量的) $\times$ y (量的) 図

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
身長 x	176	170	163	173	170	171	165	170	176	156
体重 y	61	73	54	65	67	62	51	57	77	43

量的

量的

散布図



2変数の関係

□ 2変数の関係3: x (量的) $\times$ y (量的)式

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	平均
身長 x	176	170	163	173	170	171	165	170	176	156	169
体重 y	61	73	54	65	67	62	51	57	77	43	61

相関係数

□ ピアソンの積率相関係数 *Pearson's product-moment correlation coefficient*

$$r_{xy} = \frac{\text{COV}_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

$$\approx \frac{46}{5.848 \cdot 9.706}$$

$$\approx 0.81$$

$$(-1 \leq r_{xy} \leq 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{COV}_{xy} = \frac{(176-169)(61-61) + \dots + (156-169)(43-61)}{10} = 46 \quad (x, y \text{の共分散}) \\ S_x = \sqrt{\frac{(176-169)^2 + \dots + (156-169)^2}{10}} \approx 5.848 \quad (x \text{の標準偏差}) \\ S_y = \sqrt{\frac{(61-61)^2 + \dots + (43-61)^2}{10}} \approx 9.706 \quad (y \text{の標準偏差}) \end{array} \right.$$

2変数の関係

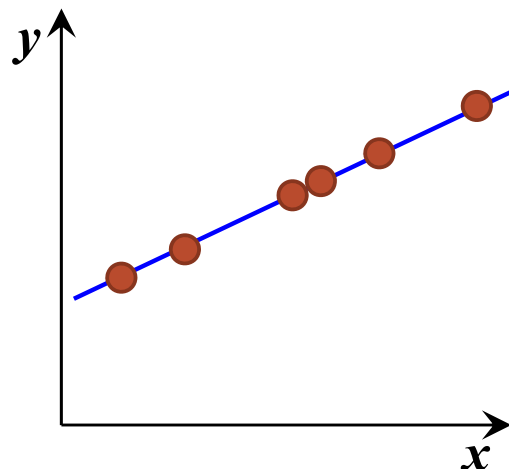
□ 2変数の関係3: x (量的) $\times$ y (量的) 式

□ ピアソンの積率相関係数 *Pearson's product-moment correlation coefficient*

$$r_{xy} = \frac{\text{COV}_{xy}}{S_x \cdot S_y} \quad (-1 \leq r_{xy} \leq 1)$$

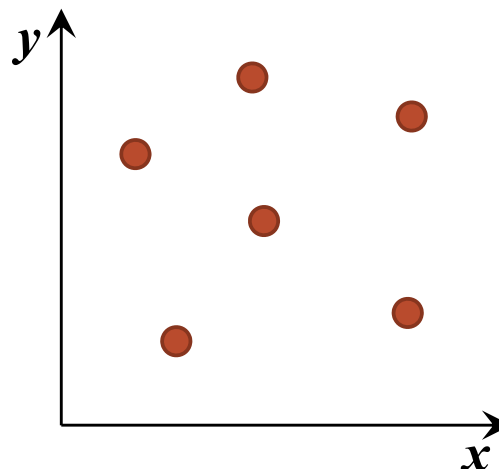
$$r_{xy} = \frac{\text{COV}_{xy}}{S_x \cdot S_y} = 1$$

嗜好と飲量は正の相関



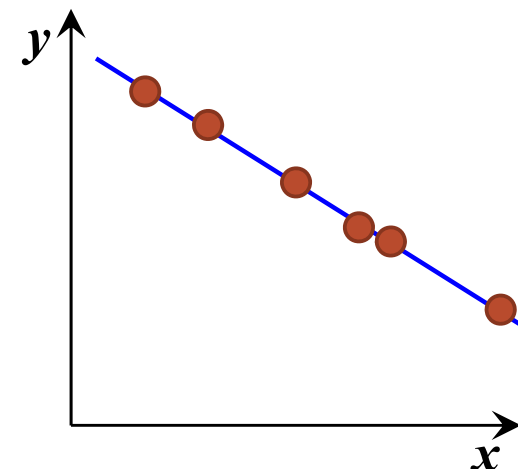
$$r_{xy} = \frac{\text{COV}_{xy}}{S_x \cdot S_y} = 0$$

嗜好と飲量は無相関



$$r_{xy} = \frac{\text{COV}_{xy}}{S_x \cdot S_y} = -1$$

嗜好と飲量は負の相関



2変数の相関 x (量的) $\times$ y (量的) についての補足
ピアソンの積率相関係数に関する補足と注意点

2変数の相関に関する補足

2変数の相関

□ 共分散 *covariance*

$$\text{COV}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

(2次元データ $\{x_1, \dots, x_n\}, \{y_1, \dots, y_n\}$ について)

ある i 番目のデータについて, x_i と平均 $\bar{x}$ との差と, y_i と平均 $\bar{y}$ との差が**共に大きい**とき, 共分散の値は**大きくなり**, **そうではない**とき共分散の値は**小さくなる**. すなわち, 2種類のデータの**関係の強さ**を表している.

□ 例: 文教太郎君と湘南花子さんの昼食に掛けた費用

	月	火	水	木	金
太郎	¥400	¥300	¥100	¥200	¥200
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200

太郎君がリッチな食事をとるとき, 花子さんは貧乏な食事でご慢しているの?

2変数の相関

$$\text{cov}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

□ 共分散 *covariance*

□ 例：文教太郎君と湘南花子さんの昼食に掛けた費用

	月	火	水	木	金
太郎	¥400	¥300	¥100	¥200	¥200
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200

太郎君がリッチな食事をとるとき、花子さんは貧乏な食事で我慢してるの？

	月	火	水	木	金	
太郎	¥400	¥300	¥100	¥200	¥200	¥240
偏差	160	60	-140	-40	-40	
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200	¥240
偏差	-140	-40	60	160	-40	
積	-22,400	-2,400	-8,400	-6,400	1,600	-7,600

平均

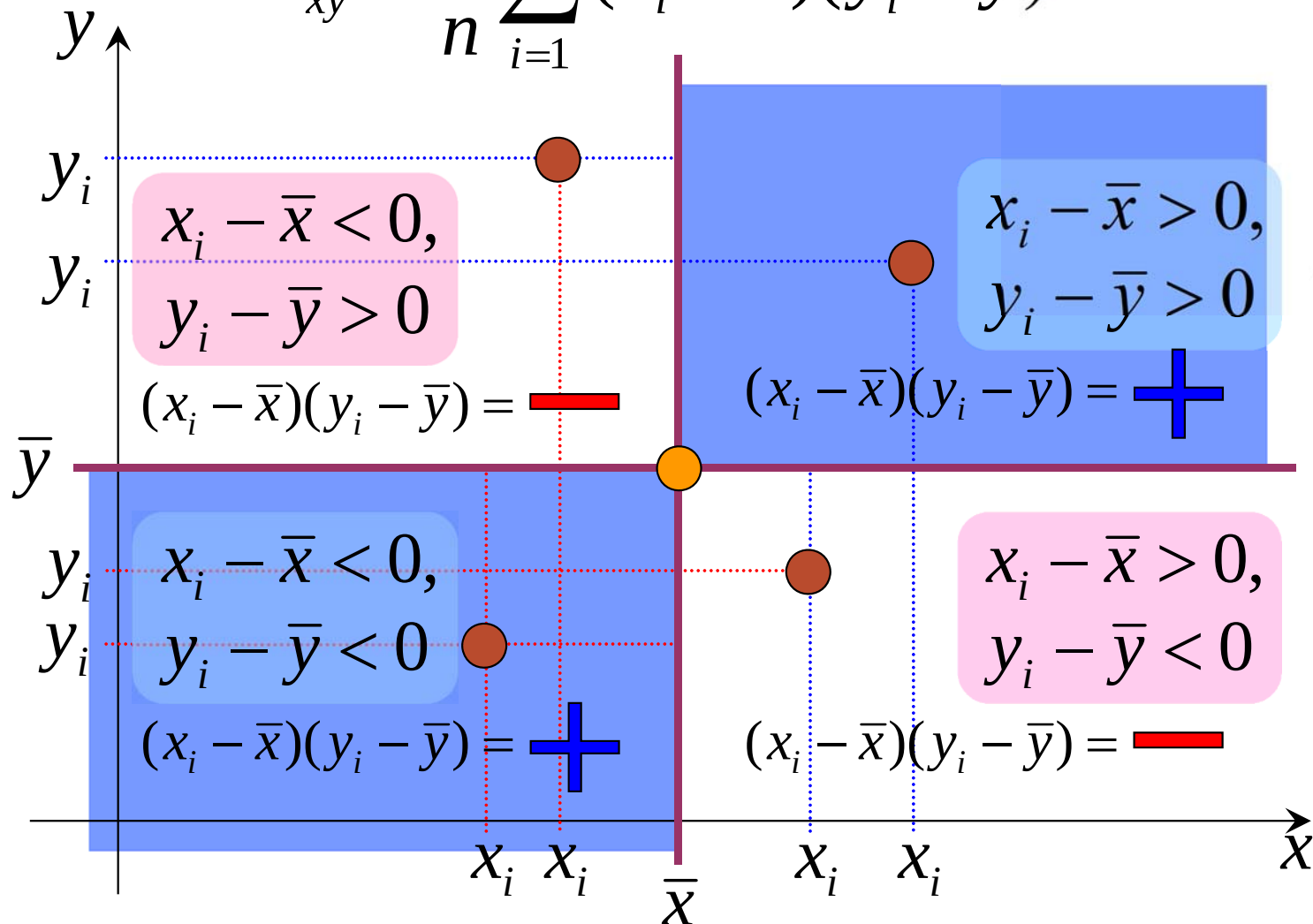
共分散

2変数の相関

共分散って、
一体何を
測ってるの？

□ 共分散 *covariance*

$$\text{COV}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$



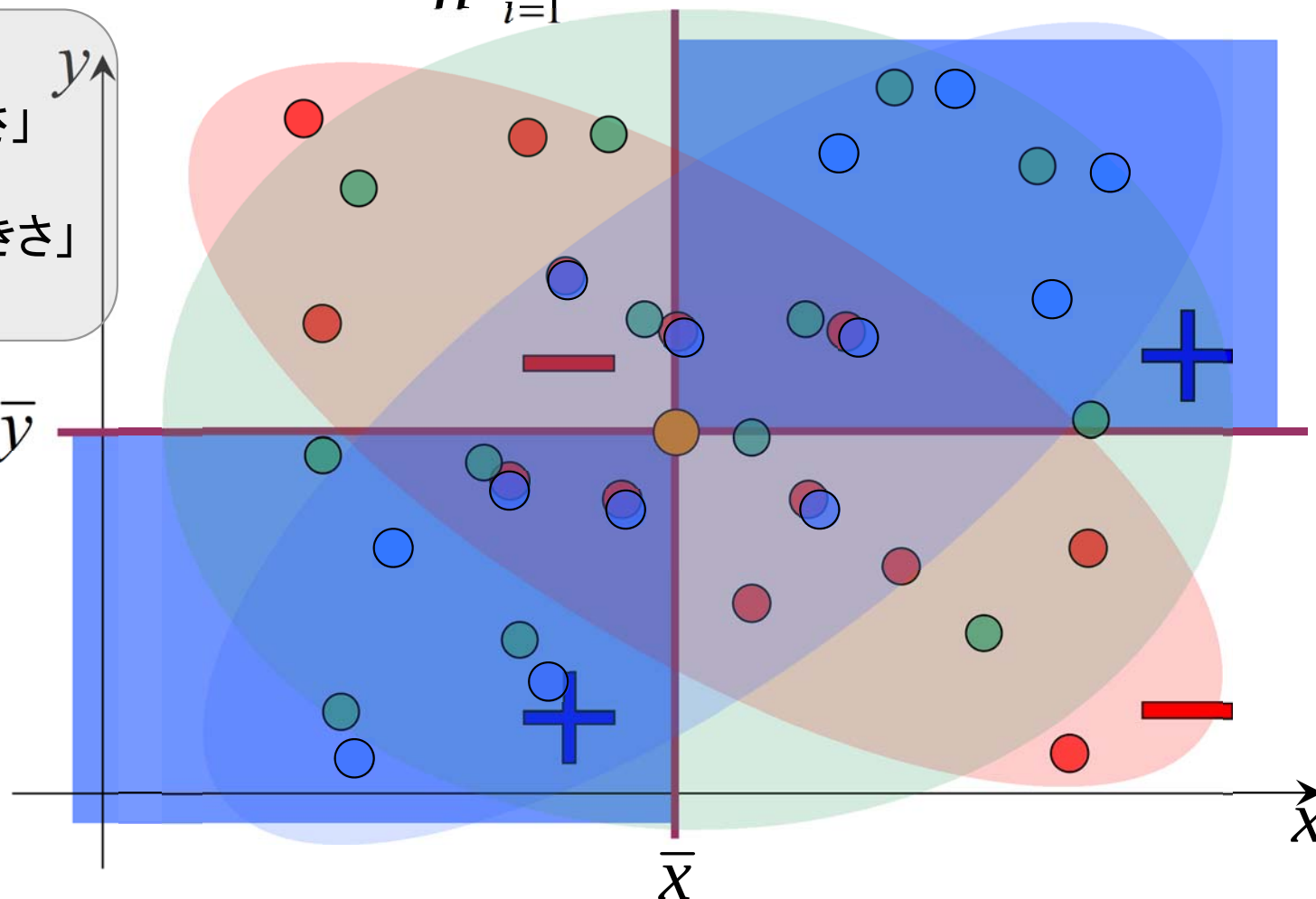
2変数の相関

$$\text{COV}_{xy} = \begin{cases} + \rightarrow \text{正の相関} \\ 0 \rightarrow \text{無相関} \\ - \rightarrow \text{負の相関} \end{cases}$$

□ 共分散 *covariance*

$$\text{COV}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

じゃあ、
「相関の強さ」
を
「共分散の大きさ」
で表せる？



2変数の相関

$$\text{cov}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

□ 共分散 *covariance*

□ 例：文教太郎君と湘南花子さんの昼食費

	月	火	水	木	金
太郎	¥400	¥300	¥100	¥200	¥200
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200

太郎君がリッチな食事をとるとき、花子さんは貧乏な食事で我慢してるの？

□ 例：文教次郎君と湘南花子さんの昼食費

	月	火	水	木	金
次郎	¥40万	¥30万	¥10万	¥20万	¥20万
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200

超リッチな食事をする次郎君と比べたら、花子さんの食事ってどうなの？

2変数の相関

測定単位が変わると、相関の度合いが**変わってしまう**！

□ 共分散 *covariance*

	月	火	水	木	金	
太郎	¥400	¥300	¥100	¥200	¥200	¥240
偏差	160	60	-140	-40	-40	
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200	¥240
偏差	-140	-40	60	160	-40	
積	-22,400	-2,400	-8,400	-6,400	1,600	-7,600

平均

共分散

	月	火	水	木	金	
次郎	¥40万	¥30万	¥10万	¥20万	¥20万	¥24万
偏差	16万	6万	-14万	-4万	-4万	
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200	¥240
偏差	-140	-40	60	160	-40	
積	-2,240万	-240万	-840万	-640万	160万	-760万

平均

共分散

2変数の相関

□ 相関係数 *correlation*

$$r_{xy} = \frac{\text{COV}_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$
$$(-1 \leq r_{xy} \leq 1)$$

ピアソンの積率相関係数
Pearson's product-moment correlation coefficient

$$r_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{正の相関} \\ 0 & \text{無相関} \\ -1 & \text{負の相関} \end{cases}$$

共分散をそれぞれのデータ x_i, y_i の標準偏差で割ることにより、測定単位を気にせずに、2種類のデータの関係の強さを表せる。

■ 注意

- 相関係数は、2つの変数の直線的関係を見るためのもの。曲線関係が認められる場合等には向かない
- 相関係数は、因果関係を保証するものではない。

2変数の相関

□ 相関係数 *correlation*

測定単位が変わっても、相関の度合いは**変わらない**

	月	火	水	木	金	Ave.	St.Dev.
太郎	¥400	¥300	¥100	¥200	¥200	¥240	101.98
偏差	160	60	−140	−40	−40	Ave.	St.Dev.
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200	¥240	101.98
偏差	−140	−40	60	160	−40	Cov.	Corr.
積	−22,400	−2,400	−8,400	−6,400	1,600	−7,600	−0.731

	月	火	水	木	金	Ave.	St.Dev.
次郎	¥40万	¥30万	¥10万	¥20万	¥20万	¥24万	101,980
偏差	16万	6万	−14万	−4万	−4万	Ave.	St.Dev.
花子	¥100	¥200	¥300	¥400	¥200	¥240	101.98
偏差	−140	−40	60	160	−40	Cov.	Corr.
積	−2,240万	−240万	−840万	−640万	160万	−760万	−0.731

2変数の相関

A	$R_1, R_2, \dots, R_n$	$(R_i : A \text{ が } i \text{ を好きな順番})$
B	$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$	$(Q_j : B \text{ が } j \text{ を好きな順番})$

□ 順序尺度に対する相関係数

□ スピアマンの順位相関係数 *Spearman rank correlation coefficient*

$$r_S = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n (R_i - Q_i)^2 \quad (-1 \leq r_S \leq 1)$$

順位が完全に一致しているとき $r_S = +1$
順位が完全に逆のとき $r_S = -1$

□ ケンドールの順位相関係数 *Kendall tau rank correlation coefficient*

$$r_K = \frac{G - H}{G + H} \quad (-1 \leq r_K \leq 1)$$

順位が完全に一致しているとき $r_K = +1$
順位が完全に逆のとき $r_K = -1$

相関関係

参考: その他の相関係数

例題: 男女それぞれが好きな花の順番

	桜	菊	薔薇	梅	百合	鬱金香	カーネーション	椿
男	1	2	3	4	5	6	7	8
女	3	1	2	5	4	7	6	8

出展:
『統計学入門』p.55)

☆ (スピアマンの) 順位相関係数

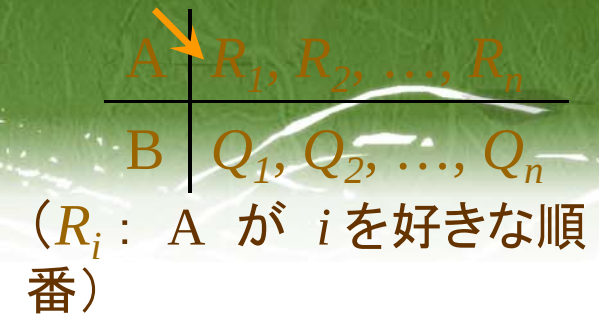
$$\begin{aligned}
 r_s &= 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n (R_i - Q_i)^2 \\
 &= 1 - \frac{6}{8^3 - 8} \{(1-3)^2 + (2-1)^2 + \dots + (8-8)^2\} \\
 &= 1 - \frac{1}{84} \cdot 10 = \frac{37}{42} \approx 0.881
 \end{aligned}$$

ピアソンの積率相関係数を順序尺度に素直にあてはめたもの

全対 ($n(n-1)/2$ 個) について, 正順と逆順の個数の差を比較したもの

★ 順位相関係数を使うときとは?

データが選好順位 (順序尺度) で与えられている場合



☆ (ケンドールの) 順位相関係数

	菊	薔	梅	百	鬱	カ	椿
桜	×	×	○	○	○	○	○
菊		○	○	○	○	○	○
薔			○	○	○	○	○
梅				×	○	○	○
百					○	○	○
鬱						×	○
カ							○

桜 v.s. 椿

★ 男: $1 < 8$
★ 女: $3 < 8$ } 正順

鬱 v.s. カ

★ 男: $6 < 7$
★ 女: $7 > 6$ } 逆順

G: 正順の数=24
H: 逆順の数=4

$$r_K = \frac{G - H}{n(n-1)/2} = \frac{24 - 4}{8(8-1)/2} = \frac{5}{7} \approx 0.714$$

演習5

□ 相関係数を計算しよう

□ 右のデータ x, y について,

- それぞれの分散 S_x^2, S_y^2 を計算せよ.
- 共分散 cov_{xy} を計算せよ.
- (ピアソンの積率)相関係数 r_{xy} を計算せよ.

x	1	3	5	7	9
y	4	6	2	0	3

□ 右のA君, Bさんの色の好みに関する選好順位データについて,

- (スピアマンの)順位相関係数 r_S を計算せよ.
- (ケンドールの)順位相関係数 r_K を計算せよ.

	赤	青	橙	緑	紫
A	1	2	3	4	5
B	4	5	2	1	3

最後に...

□ 統計解析・予測手法

記述統計学
descriptive statistics

度数分布, 代表値,
散らばり, 相関関係,
etc.

推測統計学
inferential statistics

確率分布,
母集団・標本,
推定, 検定, etc.

多変量解析
multivariate analysis

重回帰分析, 主成分分析,
判別分析, 数量化理論,
etc.

参考文献

- ✓ 東大教養統計教室編「統計学入門」東大出版会(1991)
- ✓ 村上雅人「なるほど統計学」海鳴社(2002)
- ✓ 金子治平ほか「よくわかる統計学 I」ミネルヴァ書房(2007)
- ✓ 大村平「改訂版 統計解析のはなし」日科技連(2006,1980)
- ✓ 高橋信「マンガでわかる統計学」オーム社(2004)
- ✓ 田栗正章ほか「やさしい統計入門」講談社(2007)

- 大村平「QC数学のはなし」日科技連(2003)
- 桑田秀夫「経営・経済系のための統計学」日科技連(1992)
- J.アルバート&J.ベネット「メジャーリーグの数理科学」シュプリンガー(2004)
- 間瀬茂他「工学のためのデータサイエンス入門」数理工学社(2004)
- 荒木勉他「Excelで学ぶ統計解析」実教出版(2000)