

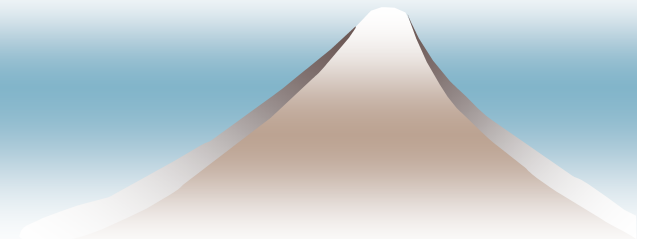
# 意思決定科学：ゲーム理論1

情報学部 堀田敬介

2011/11/10, Fri. ~

# Contents

- ケーキを仲良く！
  - アルゴリズムと解の性質
  - The Steinhaus' loan divider procedure
  - The Banach-Knaster last-dimisher procedure
- ゲーム理論とは何か？
  - ゲームの定義
- 2人非協力零和ゲーム
  - ミニマックス原理と均衡解
  - 純粋戦略と混合戦略, ミニマックス定理
  - 2人零和ゲームと線形計画



# ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた。  
2人に均等に与えたいのだが、2人は自分の分が  
相手より小さいと不満を言い、けんかになる。



どうしたら  
いいだろう？



仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

# ケーキを仲良く

## ◆ You Cut, I Choose ! (One divides, the other chooses.)

- Bobにケーキを切らせ, Carolにケーキを選ばせる

ただし, これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」!  
(Bobにどのように切らせるかの指定はない. Bobは自分の意思で切る)  
(Carolにどのように選ばせるかの指定はない. Carolは自分の意思で選ぶ)

## ◆ 解は...

- Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

# ケーキを仲良く

## ◆「解」が持ってほしい2つの性質

- proportionality (An allocation is proportional.)
  - Each thinks he or she received a portion that has size or value of **at least  $1/n$** .
- envy-freeness (An allocation is envy-free.)
  - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, **does not envy** any other player.

プレイヤーが2人の場合はこの2つの概念は等価

# ケーキを仲良く (3人いたら?)

H. Steinhaus, 1948

## ◆ The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)

1. Bob がケーキを3分割するように切る (切り方は自由であることに注意)

2-1. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘

2-2. Ted も Carol と同様のことを行う.

(CarolもTedも, 少なくとも1つは acceptable であることに注意)

3. case1: Carol (or Ted) が2個以上 acceptable cake がある場合

Ted → Carol → Bob (or Carol → Ted → Bob) の順にケーキを取る

case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個の場合

Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて, 残りのケーキについて2人で [divide-and-choose] を行う.

def.) call a piece acceptable to a player  
if he or she thinks the piece is at least  $1/3$  of the cake.

# ケーキを仲良く (3人いたら?)

## ◆ The Steinhaus' loan-divider procedure (3 plays)

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
  - Bobはちょうど $1/3$ (とBobが思う) piece に切る
  - Carol, Ted は acceptable cake を取る
- envy-free ではない
  - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが, Carol は Ted を妬む可能性がある。(Tedが, 彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので)
  - case2: Carol, Ted は誰も妬まないが, Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある。(Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合, 2人のいずれかが $1/3$ 以上(とBobが思う) cake を得るので)

# ケーキを仲良く (n人いたら?)

H.W. Kuhn, 1967

- ◆ Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 players) を n人版に拡張

- Frobenius & Konig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム)
- 4人版は Steinhaus も気づいていたらしい

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- ◆ **The Banach-Knaster last-diminisher procedure**

- Steinhaus が 1948年に2人(学生, ポーランド人)のアイデアを論文の形で発表

- ◆ .....



# ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

## ◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure

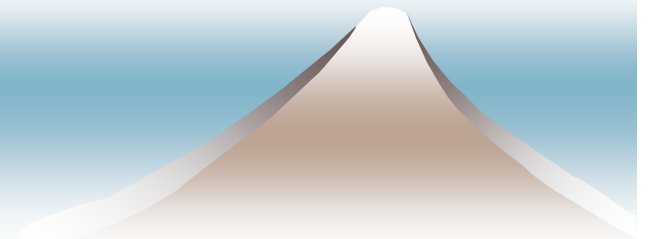
- The partners being ranged **A,B,C,...,N**.
- **A** cuts from the cake an arbitrary part.
- **B** has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off.
- Whatever he does, **C** has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice,
- and so on up to **N**.
- The rule obliges the ``last-diminisher'' to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of , the remaining  $n-1$  persons start the same game with the remainder of the cake.
- After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder.

(from ``Fair Division'', p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

# ケーキを仲良く

## ◆ The last-dimisher procedure

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
  - 切るプレイヤーがちょうど $1/n$ と考えるpiece に切ること
- envy-freeではない
  - 理由: 例えば, ゲームを先に抜けたプレイヤーAが, ある段階で切られたケーキが $1/n$ より大きい(とAが思う)ときでもそれを阻止できない. 結果として $1/n$ より大きいケーキが誰か(例えばB)に行く(とAが思う)ので, AはBを妬む.



# ゲーム理論とは何か？

## ◆ ゲーム的状况 game situations

- 複数の意思決定主体(プレイヤー)が存在し, 各々目的を持ち, その実現を目指して相互に依存しあっている状況

## ◆ ゲーム理論 game theory

- ゲーム的状况を数理モデルを用いて定式化し, プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern  
「ゲーム理論と経済行動」(1944)



John von Neumann (1903-1957)  
2004年11月9日(火)取得の情報

# ゲーム理論とは何か？

## ◆ プレイヤー player

- 意思決定し、行動する主体。(2人, 3人, ..., n人, ...,  $\infty$ )
  - 例: 個人, 複数の個人から成る組織, 政党, 国家, ...

プレイヤーの集合

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

## ◆ 戦略 strategy

- プレイヤーが取りうる行動。(有限, 無限)

プレイヤー*i*の戦略集合

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\} \quad (i \in N)$$

## ◆ 利得と利得関数 payoff

- 各プレイヤーの戦略決定後, ゲームは終了し, 結果が出る. 結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値. 利得 payoff, 効用 utility.

プレイヤー*i*の利得関数

$$f_i : S_1 \times S_2 \dots \times S_n \rightarrow R \quad (i \in N)$$

ゲームの定義

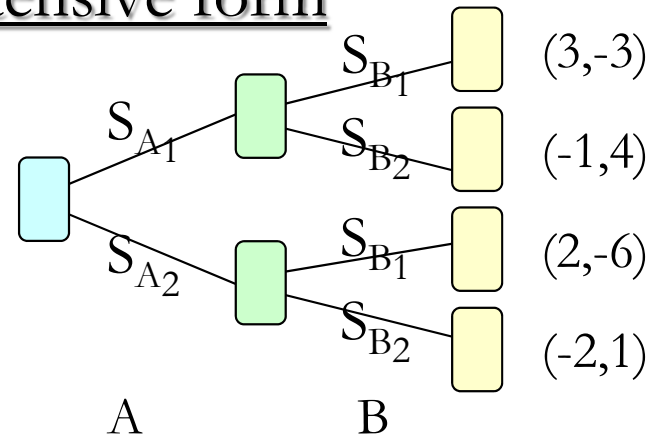
$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$$

各プレイヤーは**自己の利得最大化**を目指し,  
**G**は全てのプレイヤーの**共有知識**とする

# ゲーム理論とは何か？

## ◆ ゲームの表現形式

- 展開形 extensive form



- 戦略形 strategic form, 標準形 normal form

A \ B	$S_{B1}$	$S_{B2}$
$S_{A1}$	3	1
$S_{A2}$	-4	6

# ゲーム理論とは何か？

## ◆ 非協力ゲームと協力ゲーム

- 各プレイヤーの戦略決定における前提

1. プレイヤー間には、各プレイヤーがとるべき戦略について、強制力のある取り決めは存在しない。

拘束的合意が成立しない

非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に、とるべき戦略についての合意が成り立ち、それに基づいて戦略決定する。

拘束的合意が成立

協力ゲーム

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ Example1:

- 2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」をしている
- プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う
- 2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち, 異なるならBさんの勝ち
- 表を出して勝ったら相手から2円貰い, 裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$$N = \{1, 2\}$$

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}\}, \quad (i \in N)$$

$$S_1 = \{\text{表}, \text{裏}\}, \quad S_2 = \{\text{表}, \text{裏}\}$$

$$f_i : S_1 \times S_2 \rightarrow R, \quad (i \in N)$$

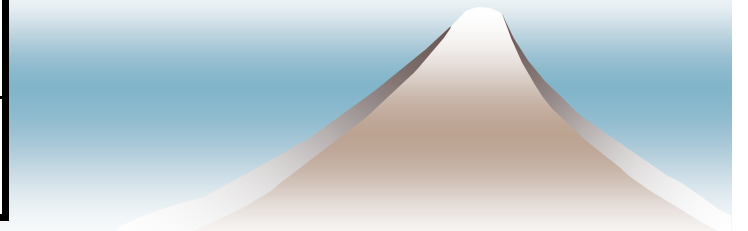
$$\begin{aligned} f_1(\text{表}, \text{表}) = 2 &+ f_2(\text{表}, \text{表}) = -2 &= 0 \\ f_1(\text{表}, \text{裏}) = -1 &+ f_2(\text{表}, \text{裏}) = 1 &= 0 \\ f_1(\text{裏}, \text{表}) = -2 &+ f_2(\text{裏}, \text{表}) = 2 &= 0 \\ f_1(\text{裏}, \text{裏}) = 1 &+ f_2(\text{裏}, \text{裏}) = -1 &= 0 \end{aligned}$$

A君の利得表

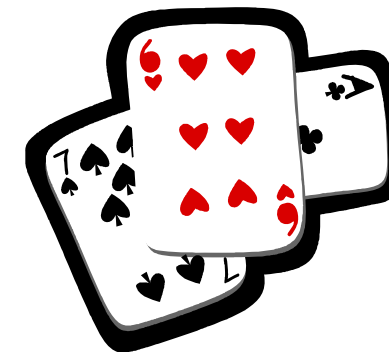
A \ B	表	裏
表	2	-1
裏	-2	1

Bさんの利得表

A \ B	表	裏
表	-2	1
裏	2	-1



# 2人非協力零和ゲーム



## ◆ Example2:

- A君とBさんがゲームをしている. それぞれ3つずつの戦略があり, A君の利得表は以下の通りである. 2人は, 各々どんな戦略をとるべきか?

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	-2	4	-1
$s_{A2}$	2	2	1
$s_{A3}$	4	-3	0



# 2人非協力零和ゲーム

$A \setminus B$	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	-2	4	-1
$s_{A2}$	2	2	1
$s_{A3}$	4	-3	0

## ◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAの思考

最大化プレイヤー

- 戦略 $s_{A1}$ を取ったときの最悪の事態は

$$\min(-2, 4, -1) = -2 \text{ (プレイヤーBが戦略 } s_{B1} \text{ を取る)}$$

- 戦略 $s_{A2}$ を取ったときの最悪の事態は

$$\min(2, 2, 1) = 1 \text{ (プレイヤーBが戦略 } s_{B3} \text{ を取る)}$$

- 戦略 $s_{A3}$ を取ったときの最悪の事態は

$$\min(4, -3, 0) = -3 \text{ (プレイヤーBが戦略 } s_{B2} \text{ を取る)}$$



戦略 $s_{A2}$ を取る (最悪でも利得1が保証される)

もっと良い利得を得ることができるのか？

# 2人非協力零和ゲーム

$A \setminus B$	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	-2	4	-1
$s_{A2}$	2	2	1
$s_{A3}$	4	-3	0

## ◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAが**Bの立場**で思考

- Bが戦略 $s_{B1}$ を取ったとき, Aである自分は戦略 $s_{A3}$ を取る

$$\max(-2, 2, 4) = 4$$

- Bが戦略 $s_{B2}$ を取ったとき, Aである自分は戦略 $s_{A1}$ を取る

$$\max(4, 2, -3) = 4$$

- Bが戦略 $s_{B3}$ を取ったとき, Aである自分は戦略 $s_{A2}$ を取る

$$\max(-1, 1, 0) = 1$$



戦略 $s_{B3}$ を取る (最悪でも損失1で済む)

Aは戦略 $s_{A2}$ を取るとき, 利得1を得られ,  
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる.

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ ミニマックス原理

- Example2:

保証水準 security level

A \ B	$s_{B_1}$	$s_{B_2}$	$s_{B_3}$	min	max
$s_{A_1}$	-2	4	-1	-2	1
$s_{A_2}$	2	2	1	1	
$s_{A_3}$	4	-3	0	-3	
max	4	4	1		
min	1				

マキシミン値  
maximin value  
 $v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

保証水準  
security level

マキシミン原理  
maximin principle  
〔最大化プレイヤーの行動原理〕

ミニマックス値  
minimax value  
 $v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス原理  
minimax principle  
〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$v_1 = v_2$

# 2人非協力零和ゲーム

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	-2	4	-1
$s_{A2}$	2	2	1
$s_{A3}$	4	-3	0

## ◆ 均衡点とゲームの値

- 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると、どうなるのか？

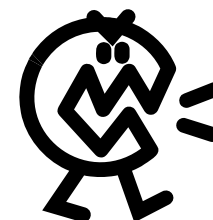
2人共に勝つことはあり得ない！



何らかの意味での**均衡**に到達

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$$

やむを  
えない...



しかた  
ない...



2人零和ゲームが  
「厳密に決定される strictly determined」  
「厳密に確定的である」

$(s_{A2}^*, s_{B3}^*)$ : ゲームの均衡点 equilibrium point

# 演習1:

- ◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうか？ (1), (2)それぞれのゲームについて考えよ

(1)

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	3	1	-1
$s_{A2}$	-1	0	2
$s_{A3}$	5	2	3

(2)

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	5	6	4
$s_{A2}$	1	8	2
$s_{A3}$	7	2	3

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

- A君とBさんがゲームをしている. それぞれ3つずつの戦略があり, A君の利得表は以下の通りである. 2人は, 各々どんな戦略をとるべきか?

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	-4	2	0
$s_{A2}$	4	3	1
$s_{A3}$	1	-3	2

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

A \ B	$s_{B_1}$	$s_{B_2}$	$s_{B_3}$	min	max
$s_{A_1}$	-4	2	0	-4	1
$s_{A_2}$	4	3	1	1	
$s_{A_3}$	1	-3	2	-3	
max	4	3	2		
min	2				

マキシミン戦略

$$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

✗

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない! ?

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

### • Proposition1

利得行列 $A=[a_{ij}]$ が与えられた時, 以下が成り立つ

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない!



いかなる場合に均衡点が存在し,  
ゲームが厳密に確定的であるか?



# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

- 鞍点 saddle point

- 行列  $A=[a_{ij}]$  において, 任意の  $i, j$  に対し,

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$$

が成り立つとき,  $(i_0, j_0)$  をこの行列の鞍点といい,  $a_{i_0j_0}$  を鞍点値という.

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

### • Theorem1

- (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は, その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること. またこのとき, 鞍点が均衡点.

### • 最適戦略 optimal strategy

- 均衡点  $(i^*, j^*)$  は鞍点なので, プレイヤーAが戦略  $i^*$  を用いると, プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも  $v(A)$  を得ることができ, また, Bが戦略  $j^*$  を取る限り, Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない.



戦略  $i^*$  がAの最適戦略

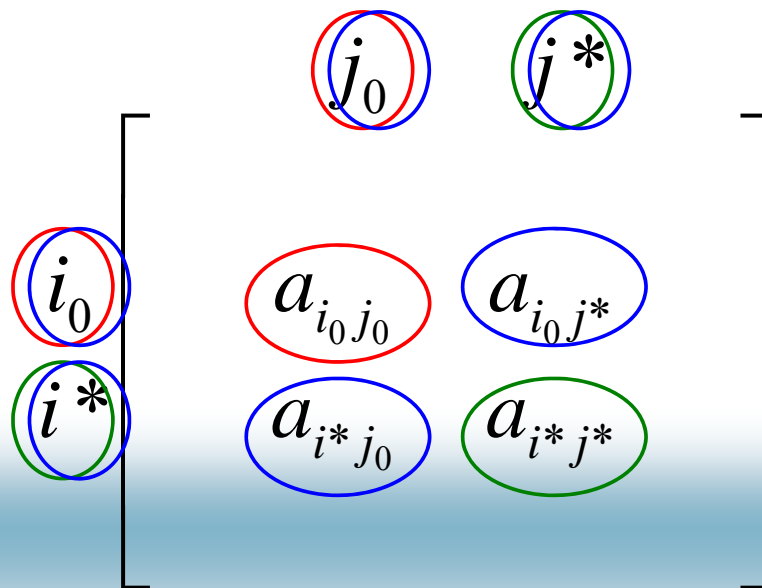
# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

### • Theorem 2

- 厳密に確定的な零和ゲームにおいて、均衡点が複数ある場合、各均衡点の値は等しい。また、 $(i^*, j^*)$ ,  $(i_0, j_0)$  が均衡点ならば、 $(i^*, j_0)$ ,  $(i_0, j^*)$  も均衡点である。

均衡戦略は **交換可能**



# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	-4	2	0
$s_{A2}$	4	3	1
$s_{A3}$	1	-3	2

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

主体的な賭，  
最適な賭の確率

期待効用原理

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

		$q_1$	$q_2$	$q_3$
A \ B		$s_{B_1}$	$s_{B_2}$	$s_{B_3}$
$p_1$	$s_{A_1}$	-4	2	0
$p_2$	$s_{A_2}$	4	3	1
$p_3$	$s_{A_3}$	1	-3	2

$$p_i \geq 0, (i = 1, 2, 3)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$q_j \geq 0, (j = 1, 2, 3)$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

プレイヤーBが各戦略をとったときの、プレイヤーAの期待効用

$$\begin{cases} E_1(\mathbf{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 \\ E_1(\mathbf{p}, s_{B_2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 \\ E_1(\mathbf{p}, s_{B_3}) = p_2 + 2p_3 \end{cases}$$

よって、Bが各戦略を $(q_1, q_2, q_3)$ の確率でとったときの、Aの期待効用

$$E_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_1(\mathbf{p}, s_{B_1})q_1 + E_1(\mathbf{p}, s_{B_2})q_2 + E_1(\mathbf{p}, s_{B_3})q_3$$

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example 3:

プレイヤーAが各戦略をとったときの、プレイヤーBの期待効用

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \mathbf{q}) = -4q_1 + 2q_2 \\ E_2(s_{A_2}, \mathbf{q}) = 4q_1 + 3q_2 + q_3 \\ E_2(s_{A_3}, \mathbf{q}) = q_1 - 3q_2 + 2q_3 \end{cases}$$

Aが各戦略を $(p_1, p_2, p_3)$ の確率でとったときの、Bの期待効用

$$E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_2(s_{A_1}, \mathbf{q})p_1 + E_2(s_{A_2}, \mathbf{q})p_2 + E_2(s_{A_3}, \mathbf{q})p_3$$

まとめると、プレイヤーA, Bがそれぞれ確率 $(p_1, p_2, p_3)$ ,  $(q_1, q_2, q_3)$ で各戦略をとったとき、各プレイヤーの期待効用は以下ようになる。

$$\begin{cases} E_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E(\mathbf{p}, s_{B_1})q_1 + E(\mathbf{p}, s_{B_2})q_2 + E(\mathbf{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E(s_{A_1}, \mathbf{q})p_1 + E(s_{A_2}, \mathbf{q})p_2 + E(s_{A_3}, \mathbf{q})p_3 \end{cases}$$

また、このとき明らかに、以下が成り立つ。

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := E_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
A \ B	$s_{B_1}$	$s_{B_2}$	$s_{B_3}$
$p_1$	$s_{A_1}$ -4	2	0
$p_2$	$s_{A_2}$ 4	3	1
$p_3$	$s_{A_3}$ 1	-3	2

純粋戦略  
pure strategy

混合戦略  
mixed strategy

プレイヤーAは期待効用最大化！  
プレイヤーBは期待損失最小化！

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 支配戦略

- Example3:

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
被支配戦略 $s_{A1}$	-4	2	0
支配戦略 $s_{A2}$	4	3	1
$s_{A3}$	1	-3	2

戦略の支配 domination of strategies

プレイヤー  $i$  の戦略  $h, k$  について、  
 戦略  $h$  が戦略  $k$  を支配するとは、  
 任意の  $s_{-i} \in S_{-i}$  に対して、

$$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$$

が成立すること。

• =だと「同等」

•  $\geq$ かつ $\neq$

だと「弱支配」

補足)通常は、被弱支配戦略は  
 除去しない→ 共有地の悲劇

支配する  
dominate

被支配戦略除去の原理  
 「支配される戦略は用いない」

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A2}$	4 >	3	1
$s_{A3}$	1 >	-3	2

A \ B	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A2}$	3	1
$s_{A3}$	-3	2

補足:被支配戦略除去の原理による均衡点が存在  
 → ゲームは支配可解 dominance solvable

# 2人非協力零和ゲーム

	$q_2$	$q_3$
$A \setminus B$	$s_{B_2}$	$s_{B_3}$
$p_2$	3	1
$p_3$	-3	2

## ◆ 最適混合戦略

- Example 3:

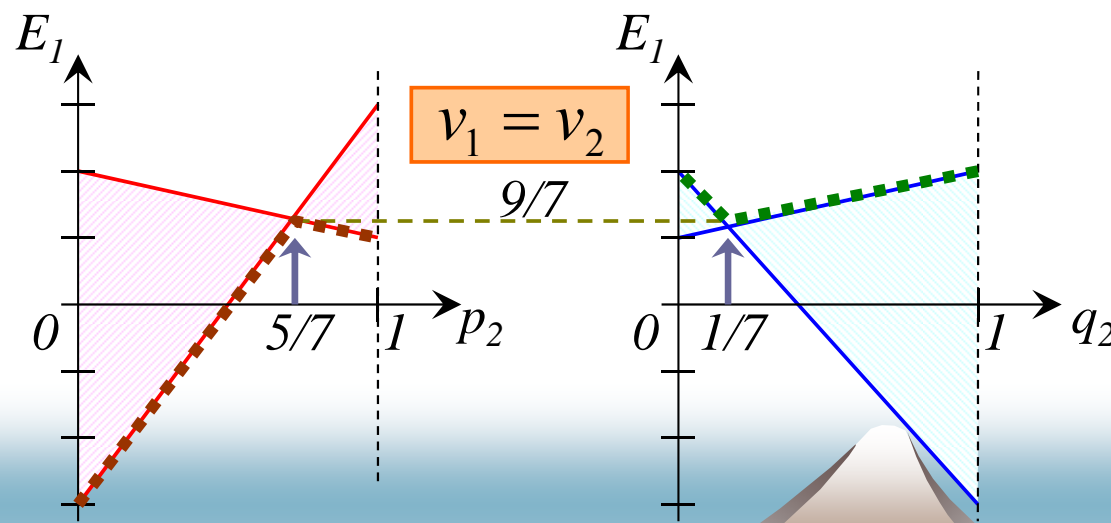
$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= E(\mathbf{p}, s_{B_2})q_2 + E(\mathbf{p}, s_{B_3})q_3 \\
 &= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\
 &= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2) \\
 &= \begin{bmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} E(\mathbf{p}, (1,0)) = 6p_2 - 3 \\ E(\mathbf{p}, (0,1)) = -p_2 + 2 \end{cases}$$

Aの最適戦略  $\mathbf{p}^* = (0, 5/7, 2/7)$

$$\begin{cases} E((1,0), \mathbf{q}) = 2q_2 + 1 \\ E((0,1), \mathbf{q}) = -5q_2 + 2 \end{cases}$$

Bの最適戦略  $\mathbf{q}^* = (0, 1/7, 6/7)$



$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ : 均衡解

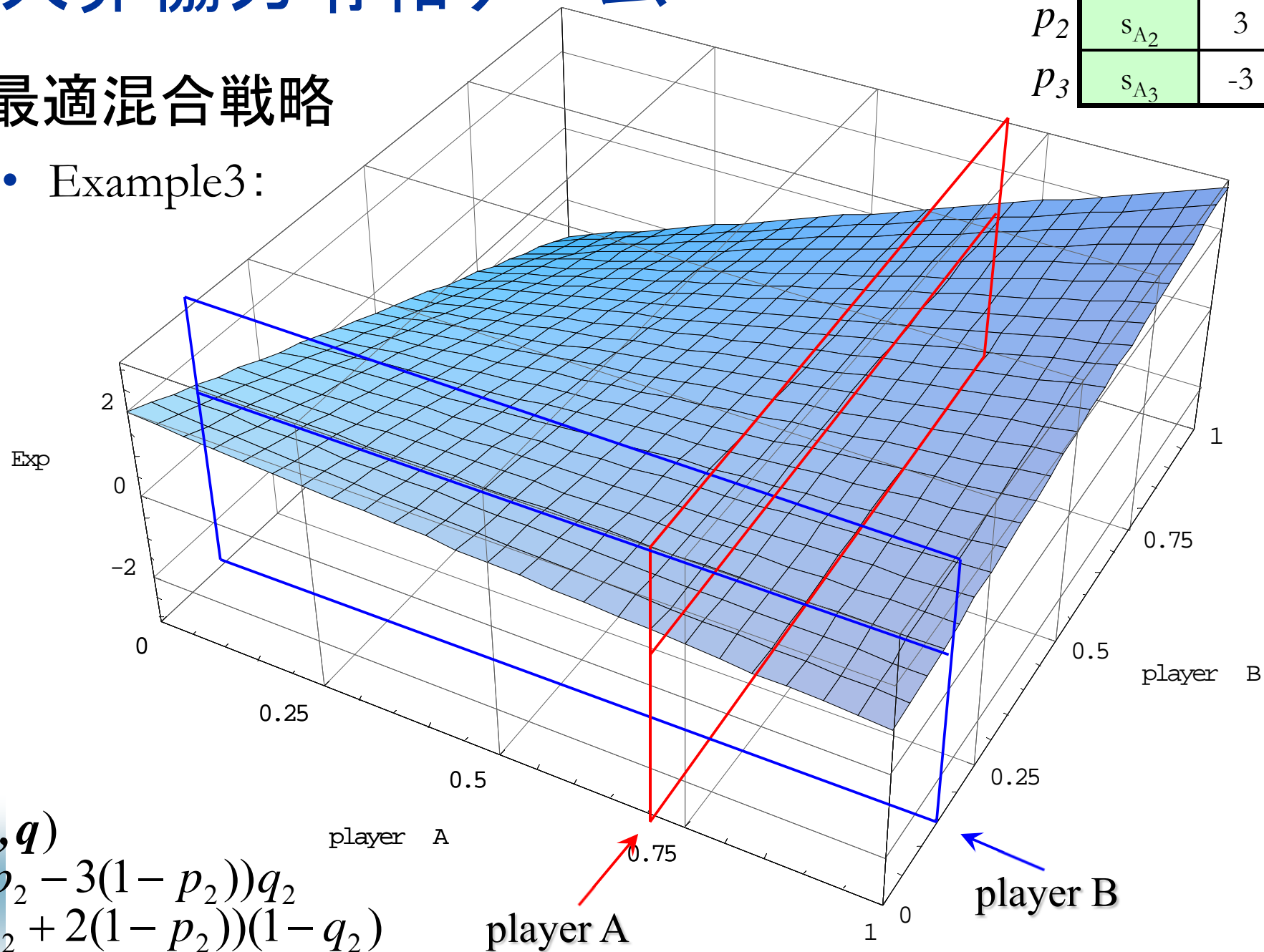


# 2人非協力零和ゲーム

	$q_2$	$q_3$
$A \setminus B$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$p_2$	3	1
$p_3$	-3	2

## ◆ 最適混合戦略

- Example 3:



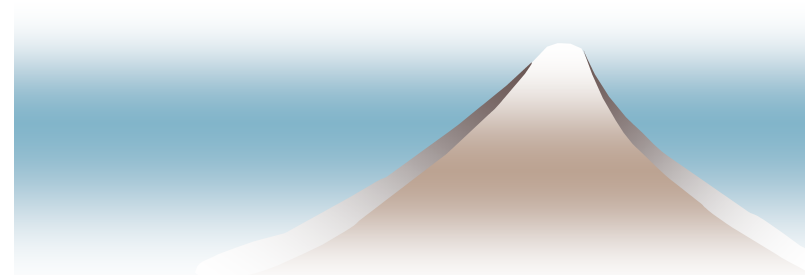
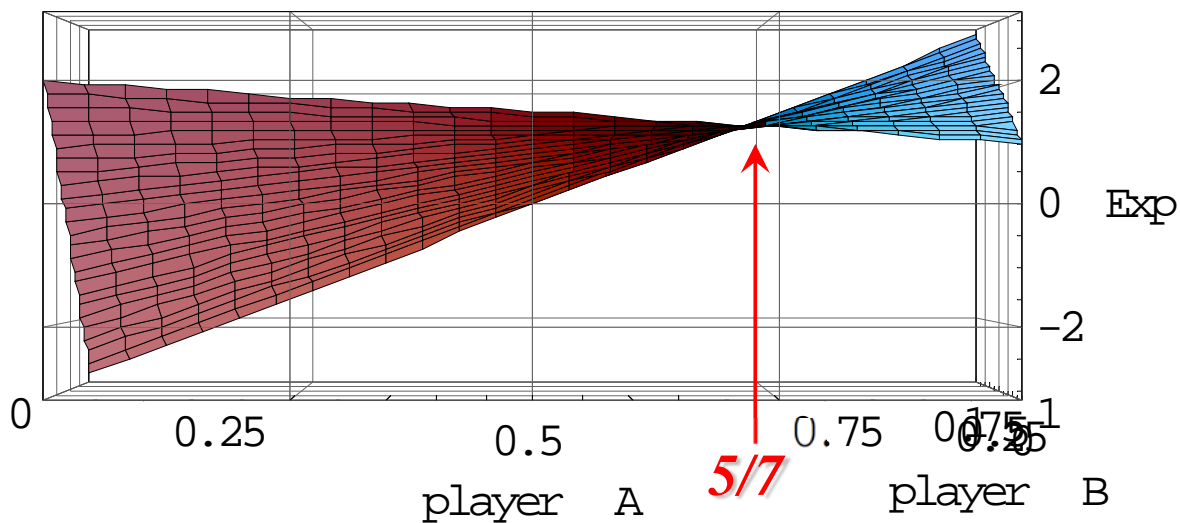
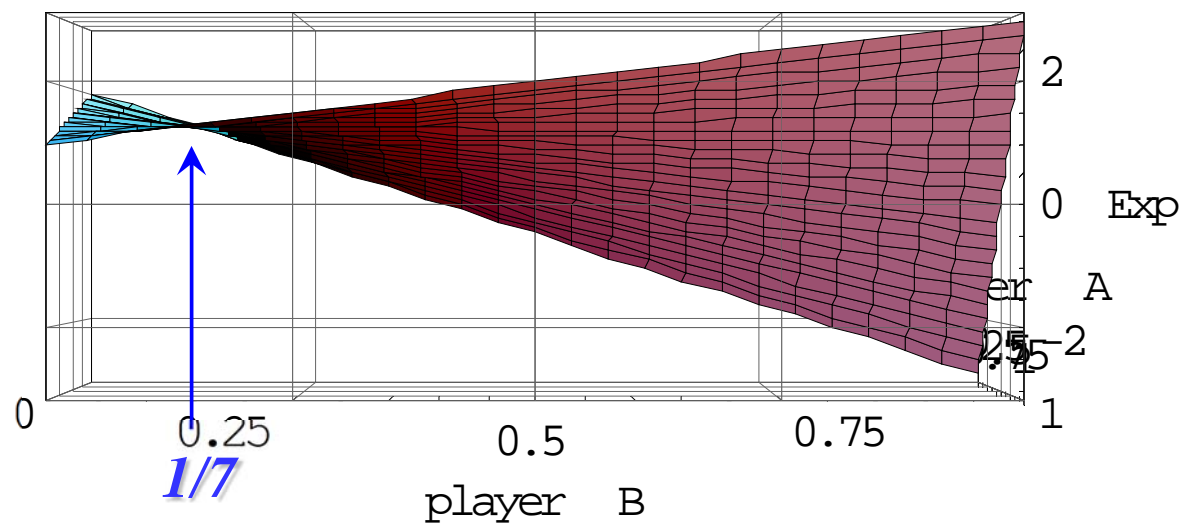
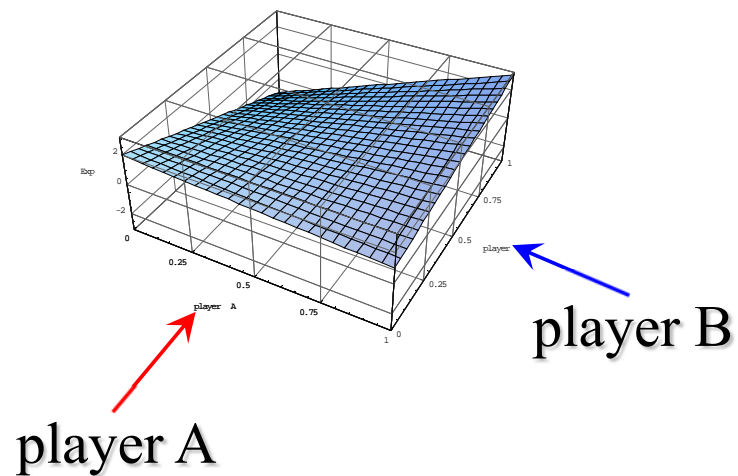
$$\begin{aligned}
 E(p, q) &= (3p_2 - 3(1 - p_2))q_2 \\
 &\quad + (p_2 + 2(1 - p_2))(1 - q_2)
 \end{aligned}$$

# 2人非協力零和ゲーム

	$q_2$	$q_3$
$A \setminus B$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$p_2$	3	1
$p_3$	-3	2

## ◆ 最適混合戦略

- Example 3:



# 2人非協力零和ゲーム

	$q_2$	$q_3$
$A \setminus B$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$p_2$	3	1
$p_3$	-3	2

## ◆ 混合戦略の意味

- $p^*, q^*$  の確率のくじをつくって、引いていずれかに決する方法が、なぜ合理的な決定方法なのか？

Aの最適戦略  $p^* = (0, 5/7, 2/7)$

Bの最適戦略  $q^* = (0, 1/7, 6/7)$

- player A は  $s_{A2}$  なら 3,  $s_{A3}$  なら 2 が望ましいが、  
 $p_2^* q_3^* + p_3^* q_2^* = 32/49$  の確率で望ましくない結果になる。

しかし、これは事後的



しまった！

- このような状況も全て考慮に入れた上で、最適戦略が決定された！

## 演習2:

- ◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうか？

(1)

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$
$s_{A1}$	4	-2
$s_{A2}$	-3	3

(2)

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$
$s_{A1}$	3	1
$s_{A2}$	-1	5

(3)

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$	$s_{B4}$
$s_{A1}$	3	1	3	4
$s_{A2}$	4	4	2	3
$s_{A3}$	2	3	1	2

(4)

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	3	2	4
$s_{A2}$	-1	3	0
$s_{A3}$	2	1	-2

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ ミニマックス定理

- プレイヤーA, Bの純粋戦略

$$S_A = \{s_{A_i} \mid i = 1, \dots, m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j = 1, \dots, n\}$$

- プレイヤーAの利得行列 (Bの損失行列)

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

利得関数

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^T A \mathbf{q} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

- プレイヤーA, Bの混合戦略

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \longrightarrow s_{A_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$
$$\begin{cases} p_1 + \dots + p_m = 1 \\ p_1, \dots, p_m \geq 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \longrightarrow s_{B_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$
$$\begin{cases} q_1 + \dots + q_n = 1 \\ q_1, \dots, q_n \geq 0 \end{cases}$$

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ ミニマックス定理

- プレイヤーAの保証水準

$$\min_q E(p, q) \longrightarrow v_1 = \max_p \min_q E(p, q)$$

$p$  を操作して期待利得最大

- プレイヤーBの保証水準

$$\max_p E(p, q) \longrightarrow v_2 = \min_q \max_p E(p, q)$$

$q$  を操作して期待損失最小

- Proposition2

$$\max_p \min_q E(p, q) \leq \min_q \max_p E(p, q)$$

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

### • Theorem3

$$\max_p \min_q E(p, q) = \min_q \max_p E(p, q)$$

また, これを成立させる戦略の組  $(p^*, q^*)$  を **均衡点** といい, 均衡点における利得  $v(A)$  をゲームの値という.

$$v(A) := p^{*T} A q^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における  
戦略が **最適戦略**

### • Theorem4

戦略の組  $(p^*, q^*)$  が均衡点であるための必要十分条件は,  $(p^*, q^*)$  が関数  $E(p, q)$  の **鞍点** であること. 即ち,

$$\forall p, q, \quad \underline{E(p, q^*)} \leq \underline{E(p^*, q^*)} \leq \underline{E(p^*, q)}$$

が成立すること.

Bが $q^*$ の時, Aは $p^*$ にするのが**利得最大**

Aが $p^*$ の時, Bは $q^*$ にするのが**損失最小**

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ ミニマックス定理

### • Theorem5

$v(A)$  がゲームの値,  $(p^*, q^*)$  が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j, \quad \underline{E(s_{A_i}, q^*)} \leq \underline{E(p^*, q^*)} \leq \underline{E(p^*, s_{B_j})}$$

が成立すること.

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq E(p^*, q^*)$$

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad E(p^*, q^*) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^*$$



# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ ミニマックス定理

### • Example4

		$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
A \ B		$s_{B_1}$	$s_{B_2}$	$s_{B_3}$	$s_{B_4}$	$s_{B_5}$
$p_1$	$s_{A_1}$	-2	-1 < 2	2	3 ≤ 3	3
$p_2$	$s_{A_2}$	5	2 < 4	4	-1 ≤ 0	0
	$s_{A_3}$	4	1	3	-2	-1

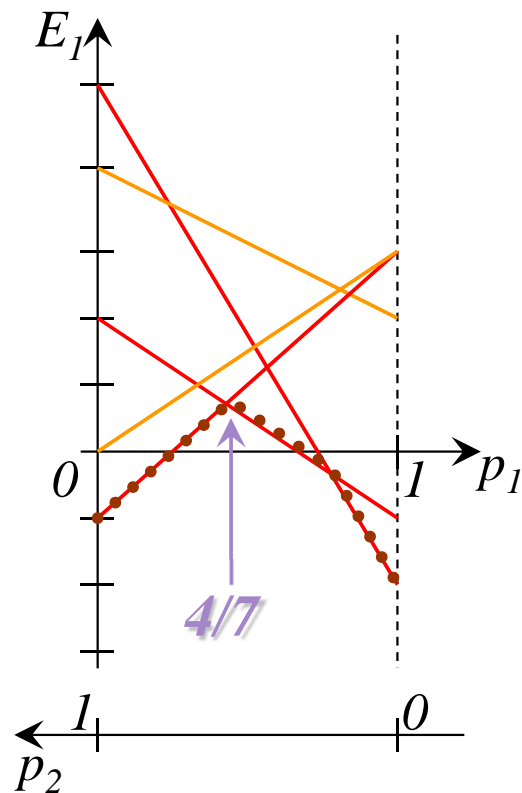
$$E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$$

~~$$E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2$$~~

$$E(\mathbf{p}, s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$$

$$E(\mathbf{p}, s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$$

~~$$E(\mathbf{p}, s_{B_5}) = 3p_1$$~~



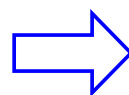
$$\mathbf{p}^* = \left( \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0 \right)$$

# 2人非協力零和ゲーム

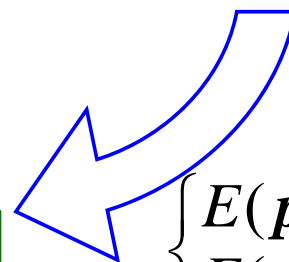
## ◆ ミニマックス定理

- Example5: 一般の $2 \times 2$ ゲーム

		$q$	
		$q_1$	$q_2$
$p$	$A \setminus B$	$s_{B1}$	$s_{B2}$
	$s_{A1}$	$a_{11}$	$a_{12}$
$p_2$	$s_{A2}$	$a_{21}$	$a_{22}$



鞍点が存在すればそれが均衡点.  
なければ, 混合戦略を考えるが,  
このとき, 必ず  $E(p, s_{B1})$  と  $E(p, s_{B2})$  及  
び  $E(s_{A1}, q)$  と  $E(s_{A2}, q)$  は交点を持つ.



$$\begin{cases} E(p, s_{B1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(p, s_{B2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \\ E(s_{A1}, q) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A2}, q) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

### 均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left( \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left( \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}} \right)$$

## 演習3:

- ◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える. プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると, ゲームの解はどうか?

(1)

$A \setminus B$	$s_{B1}$	$s_{B2}$
$s_{A1}$	4	-2
$s_{A2}$	-3	3

(2)

$A \setminus B$	$s_{B1}$	$s_{B2}$
$s_{A1}$	3	1
$s_{A2}$	-1	5

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- プレイヤーAの利得行列と混合戦略  $p$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

まとめると...

$$\begin{array}{l} \max. u \\ \text{s.t. } a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ \cdots \\ a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \vdots \\ E(\mathbf{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

$$\max_p \min \{ E(\mathbf{p}, s_{B_1}), E(\mathbf{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\mathbf{p}, s_{B_n}) \}$$

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- プレイヤーBの損失行列 (Aの利得行列) と混合戦略  $q$

$$\begin{array}{cccc} q_1 & q_m & \cdots & q_n \\ \begin{array}{|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \end{array} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{array}{|c|} \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \mathbf{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ E(s_{A_2}, \mathbf{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \vdots \\ E(s_{A_m}, \mathbf{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \end{cases}$$

まとめると...

$$\begin{array}{|l} \min. w \\ s.t. \quad a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ \quad \quad a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ \quad \quad \cdots \\ \quad \quad a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ \quad \quad q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ \quad \quad q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{array}$$

$$\min_q \max \{E(s_{A_1}, \mathbf{q}), E(s_{A_2}, \mathbf{q}), \cdots, E(s_{A_m}, \mathbf{q})\}$$

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題  
(LPの主問題: **P**)



プレイヤーBの最適化問題  
(LPの双対問題: **D**)

$$\begin{array}{l} \max . u \\ s.t. \quad a_{11} p_1 + \cdots + a_{m1} p_m \geq u \\ \quad \quad a_{12} p_1 + \cdots + a_{m2} p_m \geq u \\ \quad \quad \cdots \\ \quad \quad a_{1n} p_1 + \cdots + a_{mn} p_m \geq u \\ \quad \quad p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ \quad \quad p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min . w \\ s.t. \quad a_{11} q_1 + \cdots + a_{1n} q_n \leq w \\ \quad \quad a_{21} q_1 + \cdots + a_{2n} q_n \leq w \\ \quad \quad \cdots \\ \quad \quad a_{m1} q_1 + \cdots + a_{mn} q_n \leq w \\ \quad \quad q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ \quad \quad q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{array}$$

注) (**P**) (**D**)ともに自明解 ( $p=(1,0,\dots,0)$ ,  $q=(1,0,\dots,0)$ )があるので実行可能。  
→双対定理より, 最適解が存在し, 最適値は一致する


### Theorem6

(**P**), (**D**)の最適解が  $(p^*, u^*)$ ,  $(q^*, w^*)$  のとき,  $(p^*, q^*)$  がゲームの均衡点であり,  $v := u^* = w^*$  がゲームの値である

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- Example6:じゃんけん

A \ B	 Good			min	max
 Good	0	2	-7	-7	-2
	-2	0	4	-2	
	7	-4	0	-4	
max	7	2	4		
min	2				

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

✗

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$







ミニマックス戦略

- ◆ 両プレイヤーとも、支配戦略は存在しない。
- ◆ 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない。

# 2人非協力零和ゲーム

## ◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- Example6:じゃんけん

		$q_1$	$q_2$	$q_3$
A \ B				
$p_1$		0	2	-7
$p_2$		-2	0	4
$p_3$		7	-4	0

$$\begin{array}{l}
 \max. u \\
 \text{s.t.} \quad -2p_2 + 7p_3 \geq u \\
 \quad \quad 2p_1 \quad \quad -4p_3 \geq u \\
 \quad \quad -7p_1 + 4p_2 \quad \geq u \\
 \quad \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
 \quad \quad p_1, p_2, p_3 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \min. w \\
 \text{s.t.} \quad 2q_2 - 7q_3 \leq w \\
 \quad \quad -2q_1 \quad \quad + 4q_3 \leq w \\
 \quad \quad 7q_1 - 4q_2 \quad \quad \leq w \\
 \quad \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\
 \quad \quad q_1, q_2, q_3 \geq 0
 \end{array}$$

自己双対線形計画問題  
self-dual LP

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692), \quad u^* = 0$$

$$(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692), \quad w^* = 0$$



## 演習4:

### ◆ LPによる均衡解の求解

- 2人のプレイヤーA, Bは, プレイヤーAの利得行列(Bの損失行列)が以下で与えられるゲームをする. 各プレイヤーの問題をLPで表し, 均衡解とゲームの値を求めよ.

A \ B	$s_{B1}$	$s_{B2}$	$s_{B3}$
$s_{A1}$	1	5	-2
$s_{A2}$	4	1	3
$s_{A3}$	-2	3	6

# 参考文献

- ◆ S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division'', Cambridge Univ. Press (1996)
- ◆ 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- ◆ 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- ◆ 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
- ◆ 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2008)
  
- ◆ 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- ◆ 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣(2000)
- ◆ 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2001)
- ◆ 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版(2003)
- ◆ 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房(2005)
- ◆ R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)