意思決定科学
DEA（包絡分析法）

情報学部　堀田敬介

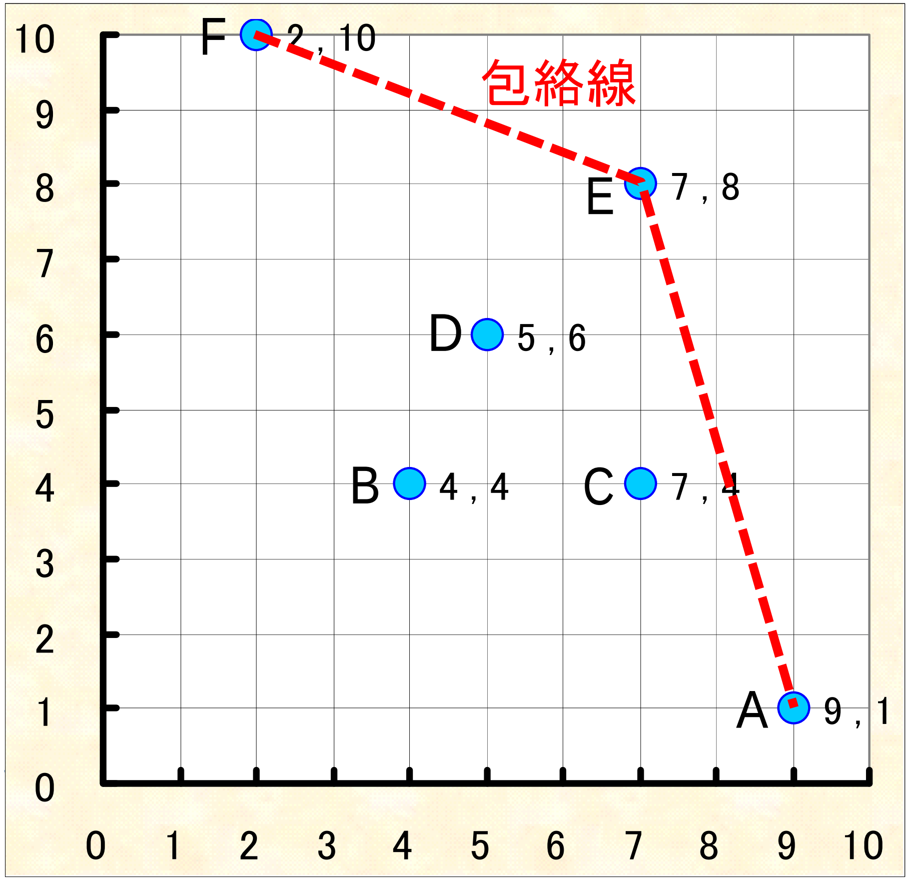
2012年1月10日（火）

考えよう

- あなたは6つの店舗をもつ社長だ．今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし，次年度も切磋琢磨させたい．さて，あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10



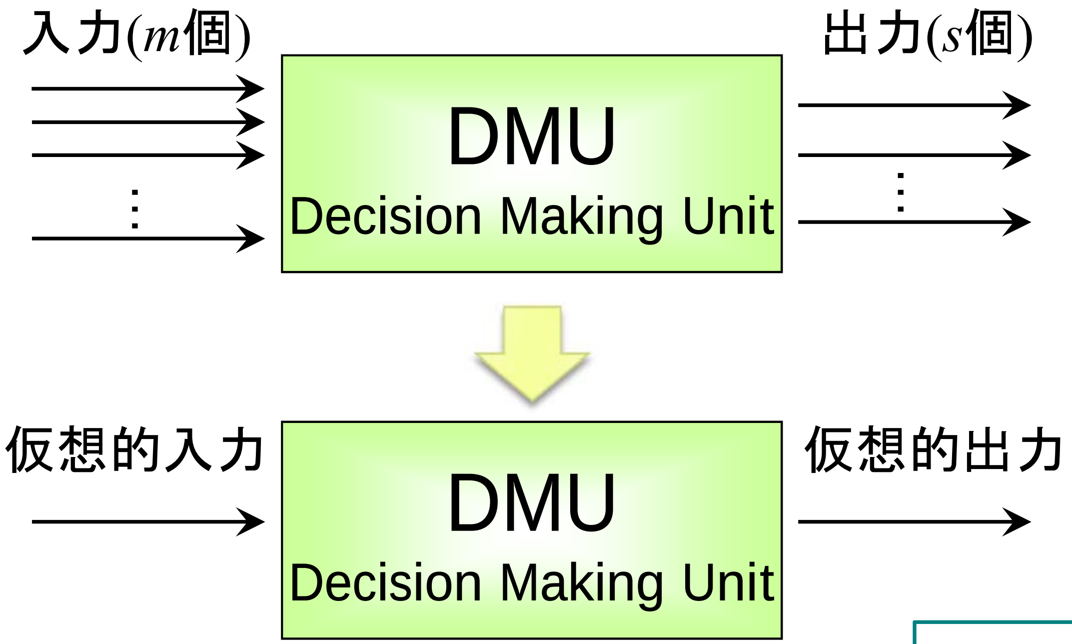
Contents

- **DEAとは？**
  - DMU（意思決定主体）
  - 効率性：DMUの入力・出力と効率値
- **DEAの基本的モデル**
  - CCRモデル
- **生産可能集合とその他のモデル**
  - 凸包モデル
  - BCCモデル
  - IRSモデル
  - DRSモデル
  - GRSモデル

DEAとは？

- DEA (Data Envelopment Analysis)

envelop＝包む
envelopment＝包むこと
c.f.) envelope＝封筒



比率尺度を効率性と見なして相対比較

$$\text{DMUの変換効率} = \frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$$

最も変換効率の良いDMUを基準として，他のDMUの非効率性を算出し，比較する．
ただし，変換効率はDMU毎に最も有利になるように計算．

DEAとは？

- 1入力・1出力
  - 営業所の営業マン人数と売上について（[2] p.1）

	営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
入力	営業マン数	2	3	3	4	5	5	6	8
出力	売上高	1	3	2	3	4	2	3	5

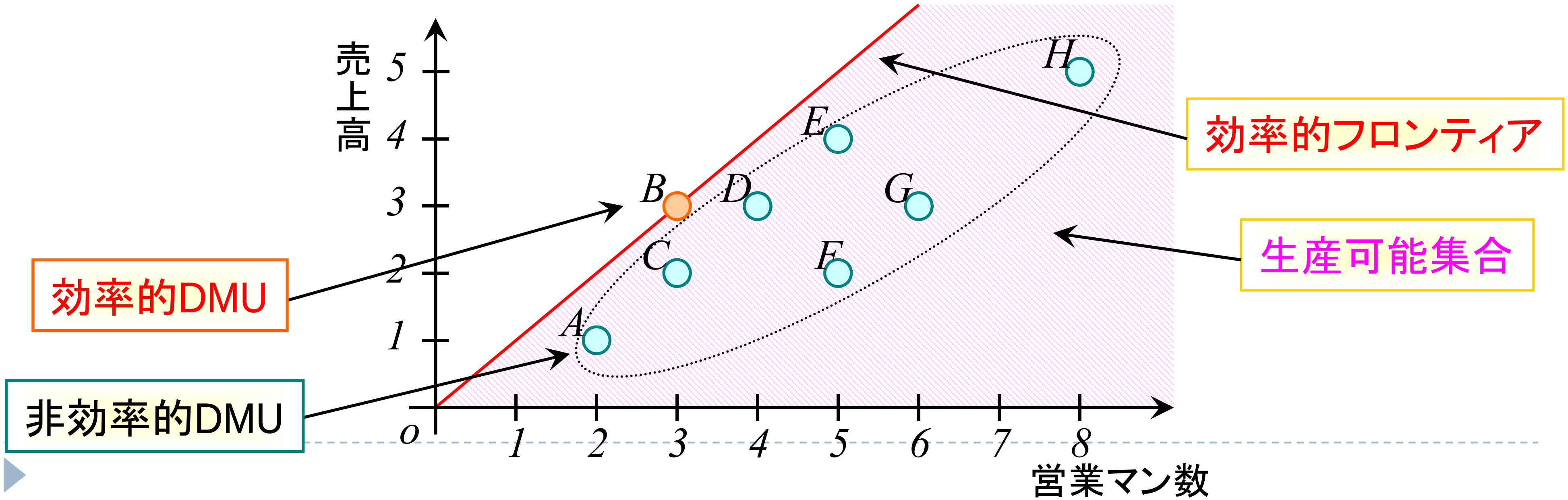
$$\text{営業マン数} \xrightarrow{\text{入力}} \boxed{\begin{array}{c}\text{DMU}\\ \text{Decision Making Unit}\end{array}} \xrightarrow{\text{出力}} \text{売上高}$$

DEAとは？

- 1入力・1出力
  - 営業所の営業マン人数と売上について（[2] p.1）

営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
売上高/営業マン数	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625
効率値	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625

出力/入力



DEAとは？

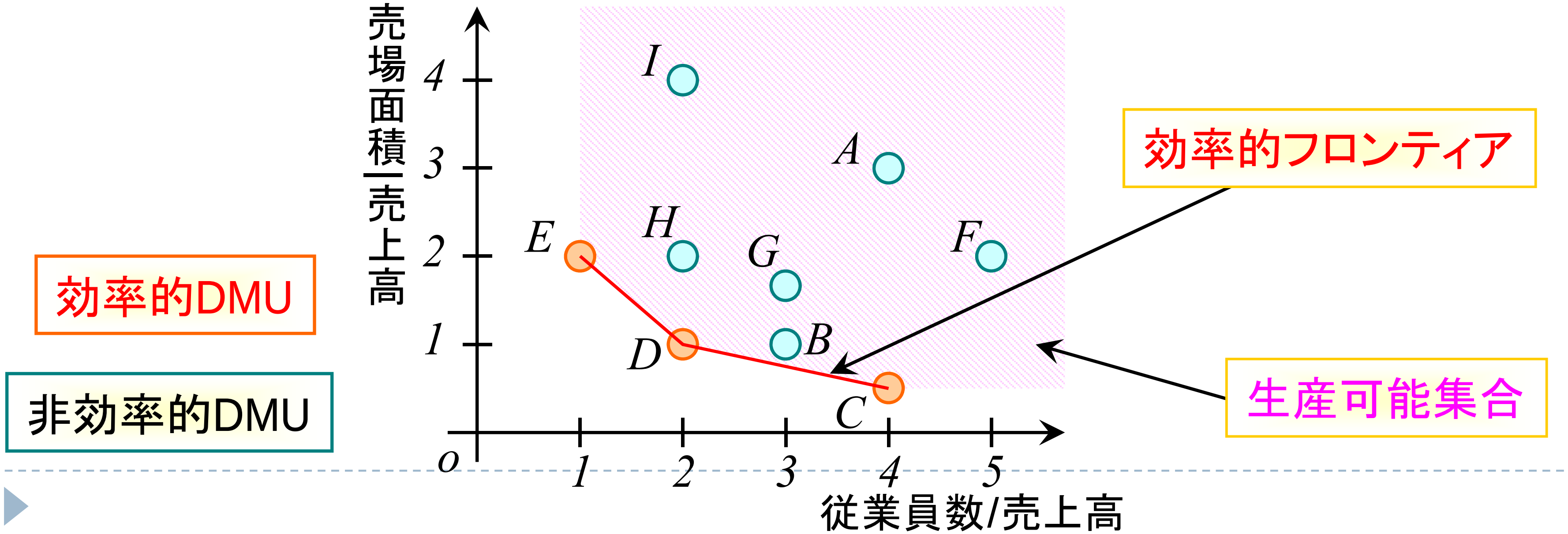
- **2入力・1出力**
  - デパートの各店舗の売上（cf. [2] p.5）

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1	従業員数	4	9	8	4	2	5	3	6	4
入力2	売場面積	3	3	1	2	4	2	6	6	8
出力	売上高	1	3	2	2	2	1	2	3	2

DEAとは?

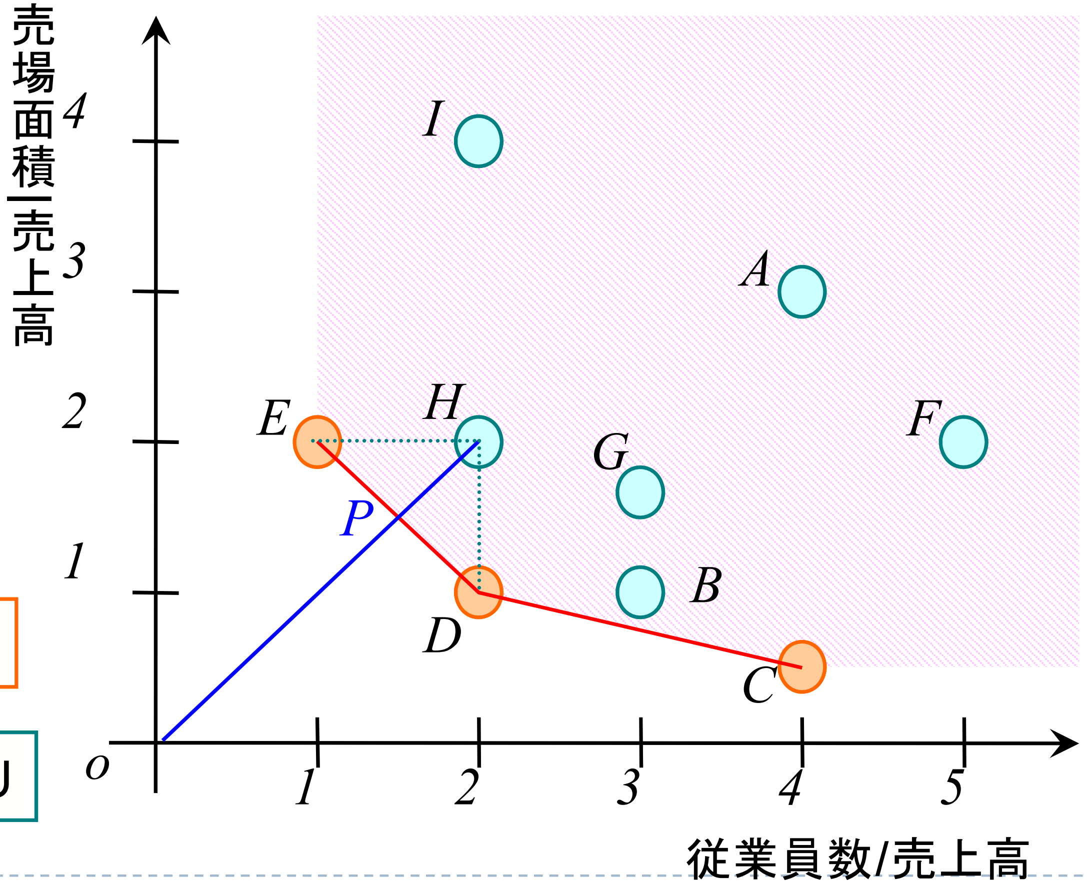
- 2入力・1出力
  - デパートの各店舗の売上(cf. [2] p.5)

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1/出力	従業員数/売上高	4	3	4	2	1	5	3/2	2	2
入力2/出力	売場面積/売上高	3	1	1/2	1	2	2	3	2	4



DEAとは？

- 2入力・1出力
  - デパートの各店舗の売上（cf. [2] p.5）



効率的DMU

非効率的DMU

効率的DMU C,D,E の
効率値は1

非効率的DMU H の
非効率値は…

$$\frac{OP}{OH}=\frac{{}^{3}\!/\!{}_{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

DMU D,E が H の
有位集合（or参照集合）

DEAとは？

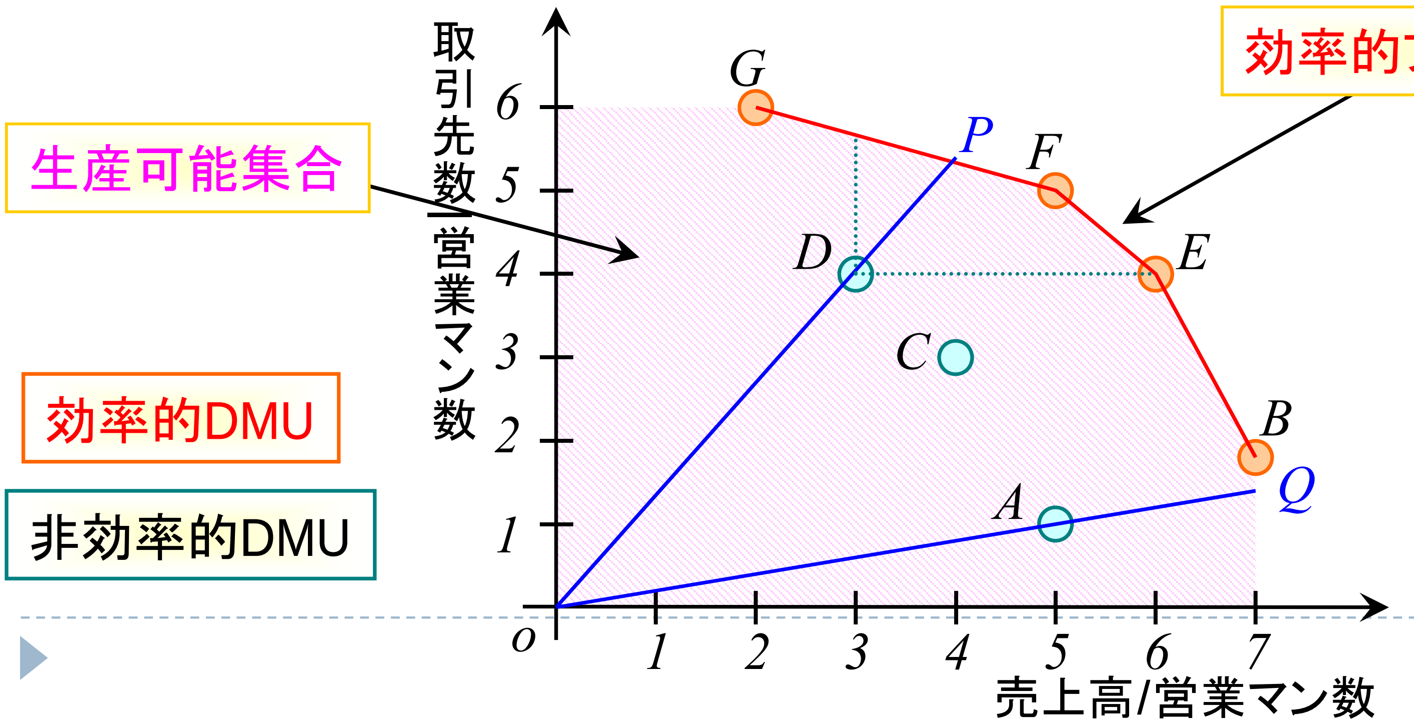
- 1入力・2出力
  - 各営業所の取引先と売上（cf. [2] p.7）

	営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G
入力	営業マン数	2	1	3	1	2	2	4
出力1	売上高	10	7	12	3	12	10	8
出力2	取引先数	2	2	9	4	8	10	24

DEAとは？

- 1入力・2出力
  - 各営業所の取引先と売上（cf. [2] p.7）

	営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G
出力1/入力	売上高/営業マン数	5	7	4	3	6	5	2
出力2/入力	取引先数/営業マン数	1	2	3	4	4	5	6



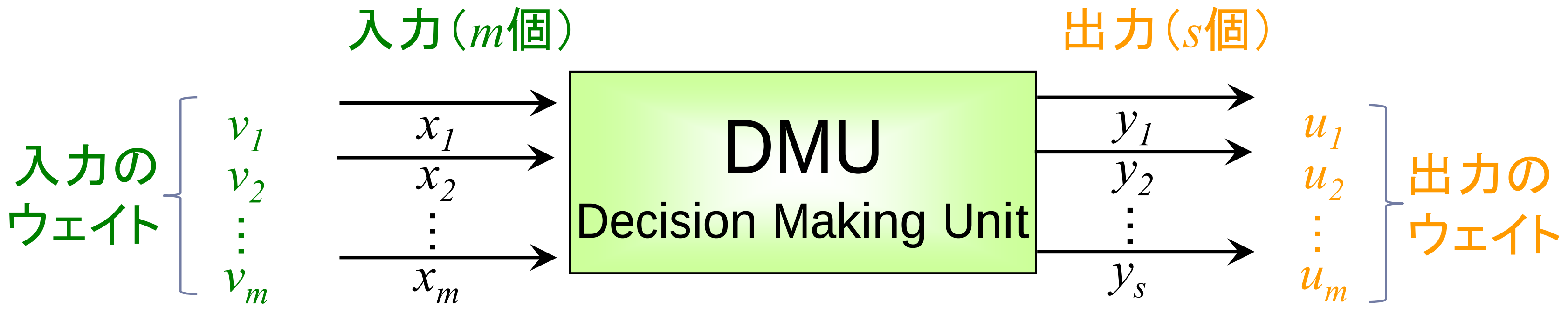
非効率的DMU D の
非効率値は，OD/OP
優位集合は，G, F

非効率的DMU A の
非効率値は，OA/OQ
優位集合は，B

※）Qは非効率なのでBを目指す！

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力



仮想的入力 $:= v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \ldots + v_m \times x_m$

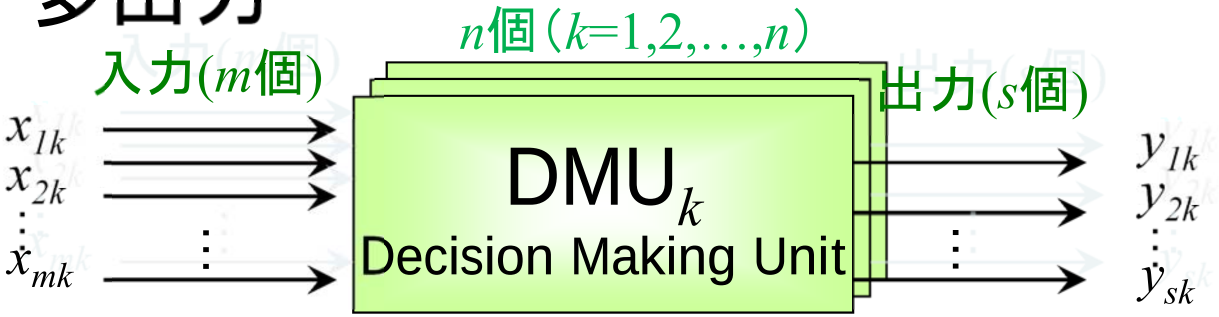
仮想的出力 $:= u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \ldots + u_s \times y_s$

効率性（生産性） $:= \dfrac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \ldots + u_s \times y_s}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \ldots + v_m \times x_m}$

入力・出力のウェイトは可変 ⇔ 固定ウェイト

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力



入力データ行列

$$X = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}}^{\text{DMU数}(n\text{個})} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}}\right\} \text{入力数}(m)$$

出力データ行列

$$Y = \overbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}}^{\text{DMU数}(n\text{個})} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix}}\right\} \text{出力数}(s)$$

入力データ用ウェイトベクトル

$$\boldsymbol{v} = (v_1 \quad \cdots \quad v_m)^T$$

出力データ用ウェイトベクトル

$$\boldsymbol{u} = (u_1 \quad \cdots \quad u_s)^T$$

DMU$_k$の仮想入力

DMU$_k$の仮想出力

- $$q_k := \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} \quad (k = 1, \cdots, n) \qquad r_k := \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - 測定対象DMU$_o$(o=1,…,n)のウェイトを計算する

<FP_o>

分数計画問題

$$\max.\theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}}$$

$$s.t. \quad \frac{u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k = 1, \cdots, n)$$

$$v_1, \cdots, v_m \geq 0$$

$$u_1, \cdots, u_s \geq 0$$

対象のDMUの効率性を最大化

全てのDMUの効率性は1以下

入出力用可変ウェイトの変数は非負

同値 ([1])

<LP_o>

線形計画問題

$$\max.\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}$$

$$s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1$$

$$u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

$$v_1, \cdots, v_m \geq 0$$

$$u_1, \cdots, u_s \geq 0$$

<FP_o>の目的関数について分母を1にし，分子を最大化

<FP_o>の制約の分母を払う

注）全部でn個のLPを解く！

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - 効率性について

$$\langle LP_o \rangle \left| \begin{array}{lrl} \max .\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} & & \\ s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} & = 1 & \\ u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} & \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} & (k = 1, \cdots, n) \\ v_1, \cdots, v_m & \ge 0 & \\ u_1, \cdots, u_s & \ge 0 & \end{array} \right.$$

Def： DMU$_o$ がD効率的 ⇔ $\theta_o^* = 1$
DMU$_o$ がD非効率的 ⇔ $\theta_o^* < 1$

注）D効率的だからといって効率的とは言えない

Lem： DMU$_o$がD非効率的，即ち $\theta_o^* < 1$ なら
$\exists k \in \{1, \cdots, n\},\ u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk}$

E$_o$に属するDMUはD効率的

この等号を満たすkの集合をDMU$_o$の優位集合（or 参照集合）という

Def： DMU$_o$ の優位集合（or 参照集合）
$$E_o := \left\{ k \in \{1, \cdots, n\} \middle| u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk} \right\}$$

効率的フロンティアの一部を形成

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - <LP_o>の双対問題と最適解について

CCRモデル

$$\langle LP_o \rangle \left|\begin{array}{ll} \max .\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} & \\ s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1 & \\ u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} & (k = 1, \cdots, n) \\ v_1, \cdots, v_m \ge 0 & \\ u_1, \cdots, u_s \ge 0 & \end{array}\right.$$

双対問題

DMU$_o$の入力i　入力i の重み和

$$\langle D_o \rangle \left|\begin{array}{lll} \min .\theta & & \\ s.t. \quad \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) & \ge 0 & (i = 1, \cdots, m) \\ (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} & \ge 0 & (j = 1, \cdots, s) \\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n & \ge 0 & \end{array}\right.$$

出力j の重み和　DMU$_o$の出力j

$$\begin{cases} d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) & (i = 1, \cdots, m) \\ d_j^y := (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} & (j = 1, \cdots, s) \end{cases}$$

入力の余剰

出力の不足

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - 入力の余剰と出力の不足を求める

入力の余剰の和

出力の不足の和

$$
\begin{aligned}
&\max.(d_1^x+\cdots+d_m^x)+(d_1^y+\cdots+d_s^y)\\
&s.t.\quad d_i^x=\theta^* x_{io}-(x_{i1}\lambda_1+\cdots+x_{in}\lambda_n)\ \ (i=1,\cdots,m)\\
&\qquad\ \ d_j^y=(y_{j1}\lambda_1+\cdots+y_{jn}\lambda_n)-y_{io}\quad (j=1,\cdots,s)\\
&\qquad\qquad\qquad \lambda_1,\cdots,\lambda_n\geq 0\\
&\qquad\qquad\qquad d_1^x,\cdots,d_m^x\geq 0\\
&\qquad\qquad\qquad d_1^y,\cdots,d_s^y\geq 0
\end{aligned}
$$

$<LP_o>$の最適値

DEAの実行手順

$<D_o>$を解いて最適解 $(\theta^*,\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*)$ を得た後，
このLPを解いて最適解 $(d_1^{x*},\cdots,d_m^{x*},d_1^{y*},\cdots,d_s^{y*})$ を得る．

Def：DEA効率性の定義

$\theta^*=1,(d_1^{x*},\cdots,d_m^{x*},d_1^{y*},\cdots,d_s^{y*})=\boldsymbol{0}$ となるDMUはDEA効率的

それ以外のDMUはDEA非効率的

DEA：CCRモデル

- 例題
  - 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

$$\text{効率性(生産性)} := \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + v_3 \times x_3}$$

DEA：CCRモデル

- 学生A（DMU_A）の効率性を求める

学生（DMU）	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

分数計画問題 <FP_A>

$$\max.\ \theta := \frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3}$$

$$s.t.\quad \frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3}\le 1$$
$$\frac{60u_1+90u_2}{20v_1+0.2v_2+0.9v_3}\le 1$$
$$\frac{30u_1+55u_2}{15v_1+v_2+0.8v_3}\le 1$$
$$\frac{20u_1+70u_2}{30v_1+0.5v_2+0.9v_3}\le 1$$
$$\frac{70u_1+24u_2}{20v_1+0.9v_2+v_3}\le 1$$
$$\frac{50u_1+60u_2}{16v_1+v_2+v_3}\le 1$$
$$v_1,v_2,v_3\ge 0,u_1,u_2\ge 0$$

線形計画問題 <LP_A>

（P）主問題

$$\max.\ 40u_1+30u_2$$
$$s.t.\quad 40v_1+0.8v_2+v_3=1$$
$$40u_1+30u_2\le 40v_1+0.8v_2+v_3$$
$$60u_1+90u_2\le 20v_1+0.2v_2+0.9v_3$$
$$30u_1+55u_2\le 15v_1+v_2+0.8v_3$$
$$20u_1+70u_2\le 30v_1+0.5v_2+0.9v_3$$
$$70u_1+24u_2\le 20v_1+0.9v_2+v_3$$
$$50u_1+60u_2\le 16v_1+v_2+v_3$$
$$v_1,v_2,v_3\ge 0,u_1,u_2\ge 0$$

（D）双対問題

$$\min.\ \theta$$
$$s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\ge 0$$
$$0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\ge 0$$
$$\theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\ge 0$$
$$(40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\ge 0$$
$$(30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\ge 0$$
$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0$$

DEA：CCRモデル

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

- 学生A(DMU$_A$)の効率性を求める

線形計画問題 $<LP_A>$

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta \\
&s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\geq 0 \\
&\quad 0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\geq 0 \\
&\quad \theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\geq 0 \\
&\quad (40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\geq 0 \\
&\quad (30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\geq 0 \\
&\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}
$$

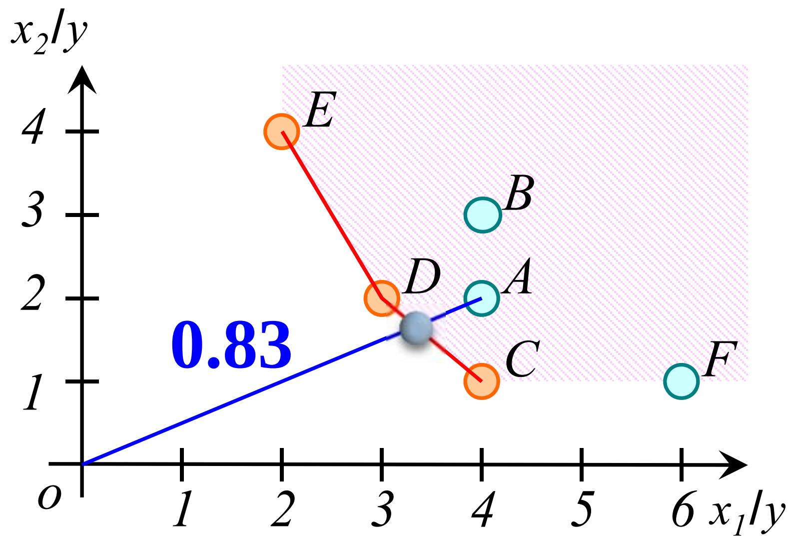
$<LP_A>$の最適値 $\theta^*=1$なら 次のLPも解く

$$
\begin{aligned}
&\max.\ (d_1^x+d_2^x+d_3^x)+(d_1^y+d_2^y) \\
&s.t.\ d_1^x=40\cdot\theta^*-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6) \\
&\quad d_2^x=0.8\cdot\theta^*-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6) \\
&\quad d_3^x=\theta^*-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6) \\
&\quad d_1^y=(40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40 \\
&\quad d_2^y=(30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30 \\
&\quad d_1^x,d_2^x,d_3^x,d_1^y,d_2^y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}
$$

DEA：CCRモデル

- 例題2（[3] p.15）

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1



DMU A についての問題

$$
\begin{aligned}
&\min .\theta \\
&s.t.\quad 4\theta-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6) \geq 0 \\
&\qquad\; 2\theta-(2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+4\lambda_5+\lambda_6) \geq 0 \\
&\qquad\; (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1 \geq 0 \\
&\qquad\; \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

最適解 : $\theta^*=0.83$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 0.33, 0.67, 0, 0)$

$$
\begin{cases}
\text{入力）} & 0.83 \times \mathrm{A} = 0.33 \times \mathrm{C} + 0.67 \times \mathrm{D} \\
\text{出力）} & \mathrm{A} = 0.33 \times \mathrm{C} + 0.67 \times \mathrm{D}
\end{cases}
$$

DMU A はDEA非効率的で，
優位集合は C と D

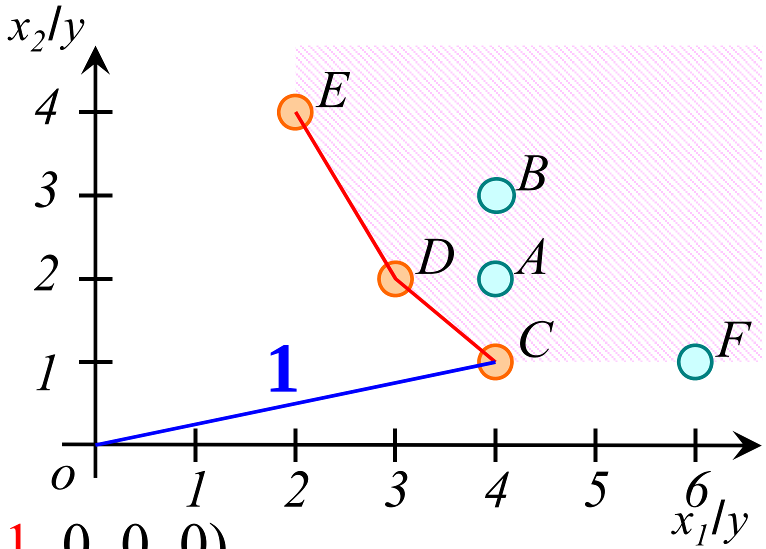
DEA：CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

- **例題2**

DMU C についての問題

$$
\begin{aligned}
&\min .\theta \\
&s.t.\quad 4\theta-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6) \geq 0 \\
&\qquad \theta-(2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+4\lambda_5+\lambda_6) \geq 0 \\
&\qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1 \geq 0 \\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6 \geq 0
\end{aligned}
$$



⇒ 最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

C自身の値が1

$$
\begin{aligned}
&\max .(d_1^x+d_2^x)+(d_1^y) \\
&s.t.\quad d_1^x = 1\cdot 4-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6) \\
&\qquad d_2^x = 1\cdot 1-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6) \\
&\qquad d_1^y = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1 \\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6 \geq 0,\quad d_1^x, d_2^x \geq 0,\quad d_1^y \geq 0
\end{aligned}
$$

⇒ 最適解：$(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (0, 0, 0)$ ⇒ 入力余剰も出力不足もないので DMU C はDEA効率的

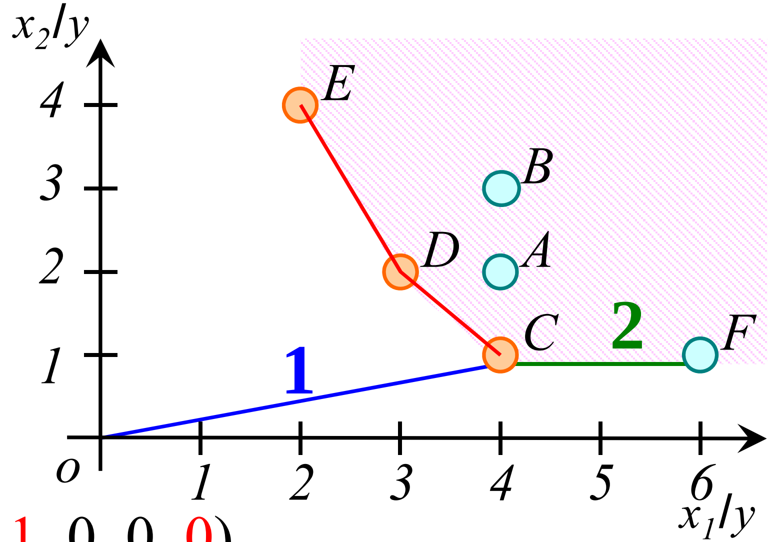
DEA：CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

例題2

DMU F についての問題

$$
\begin{aligned}
&\min.\theta \\
&s.t.\quad 6\theta-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\geq 0 \\
&\qquad \theta-(2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+4\lambda_5+\lambda_6)\geq 0 \\
&\qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1\geq 0 \\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}
$$



最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

Fの値は0で
Cの値が1

$$
\begin{aligned}
&\max.(d_1^x+d_2^x)+(d_1^y) \\
&s.t.\quad d_1^x=1\cdot 6-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6) \\
&\qquad d_2^x=1\cdot 1-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6) \\
&\qquad d_1^y=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1 \\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0,\quad d_1^x,d_2^x\geq 0,\quad d_1^y\geq 0
\end{aligned}
$$

最適解：$(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (2, 0, 0)$

入力余剰がありDMU F はDEA非効率的
優位集合はC（Cに比較して入力余剰2だけ非効率）

DEAの特徴

- 特徴（長所・短所）
  - 他と異なった特徴を持つDMUは，DEA効率的と判断されやすい
    → 他と異なることが良いことの場合は，DEAは良い指標
  - 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
  - DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

例題（DEAを用いた野球打者評価）
CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価

注：三振は少ない方がよいので入力に…

		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6
:	:	:	:	:	:	:	:	:

データ（一部加工）
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題（DEAを用いた野球打者評価）
CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価
  - 結果例：2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗（横）

    <D_o>を解いた結果：θ=0.8007，λ_3=0.1638，λ_5=0.2670，λ_8=0.1765，λ_{37}=0.3476

    各入力） 0.8007×石井琢郎 = 0.1638×金本知憲（阪）+ 0.2670×井端弘和（中）+ 0.1765×赤星憲広（阪）+ 0.3476×城島健司（ソ）

    各出力） 石井琢郎 = 0.1638×金本知憲（阪）+ 0.2670×井端弘和（中）+ 0.1765×赤星憲広（阪）+ 0.3476×城島健司（ソ）

  - 結果例：2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏（巨）

    <D_o>を解いた結果：θ=0.9053，λ_1=0.3890，λ_3=0.1581，λ_4=0.0225，λ_7=0.2917

    各入力） 0.9053×二岡智宏 = 0.3890×青木宣親（ヤ）+ 0.1581×金本知憲（阪）+ 0.0225×金城龍彦（横）+ 0.2917×前田智徳（広）

    各出力） 二岡智宏 = 0.3890×青木宣親（ヤ）+ 0.1581×金本知憲（阪）+ 0.0225×金城龍彦（横）+ 0.2917×前田智徳（広）

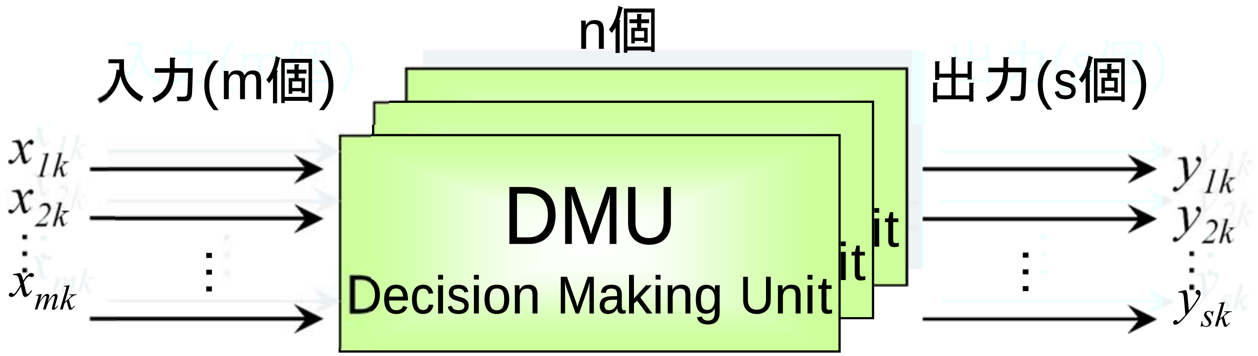
注：<D_o>のモデル化，解は cplex9.0 による

演習：やってみよう
（DEAを用いた野球打者評価） CCRモデルによる

- 昨シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価

生産可能集合

- 生産可能集合 P



入力データ行列

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

出力データ行列

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{1\bullet} \\ \vdots \\ x_{m\bullet} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_{1\bullet} \\ \vdots \\ y_{s\bullet} \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$: 活動（＝入力と出力の対）

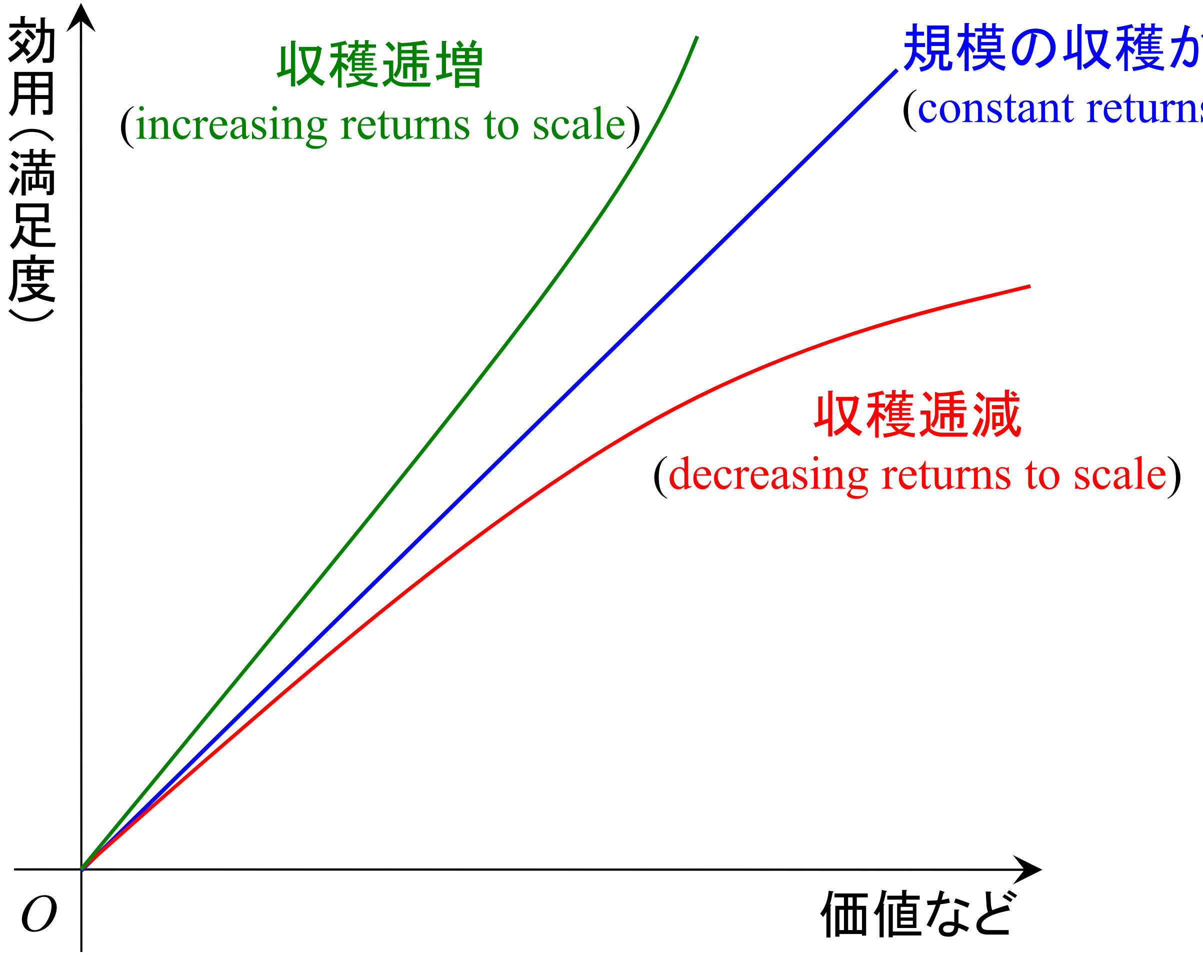
$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$: 生産可能集合（＝活動の集合）

- 生産可能集合 P に対する仮定（**CCRモデル**）
  - （1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する
  - （2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する
  - （3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$ を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
  - （4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

生産可能集合

- 「規模の収穫が一定」とは？



注：一般には価値が大きくなるほど，
効用の増加量は減る場合が多い．

生産可能集合

Charnes-Cooper-Rhodes

- 生産可能集合 P に対する仮定（CCRモデル）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

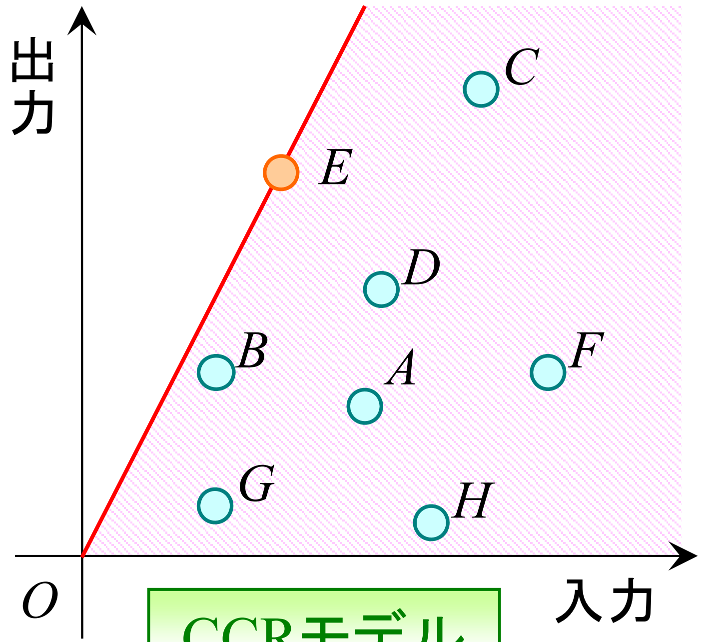
（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\middle|\, \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \right\}$$

実際の問題は
$\theta \boldsymbol{x}_o$ と $\boldsymbol{y}_o$ を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \quad \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \quad \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$$



CCRモデル
（1入力・1出力）

注：CCRモデルは，凸包モデルの $L=0$, $U=\infty$ の場合とみなせる

生産可能集合

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル）
  （1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する
  （2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する
  （3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
  （4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

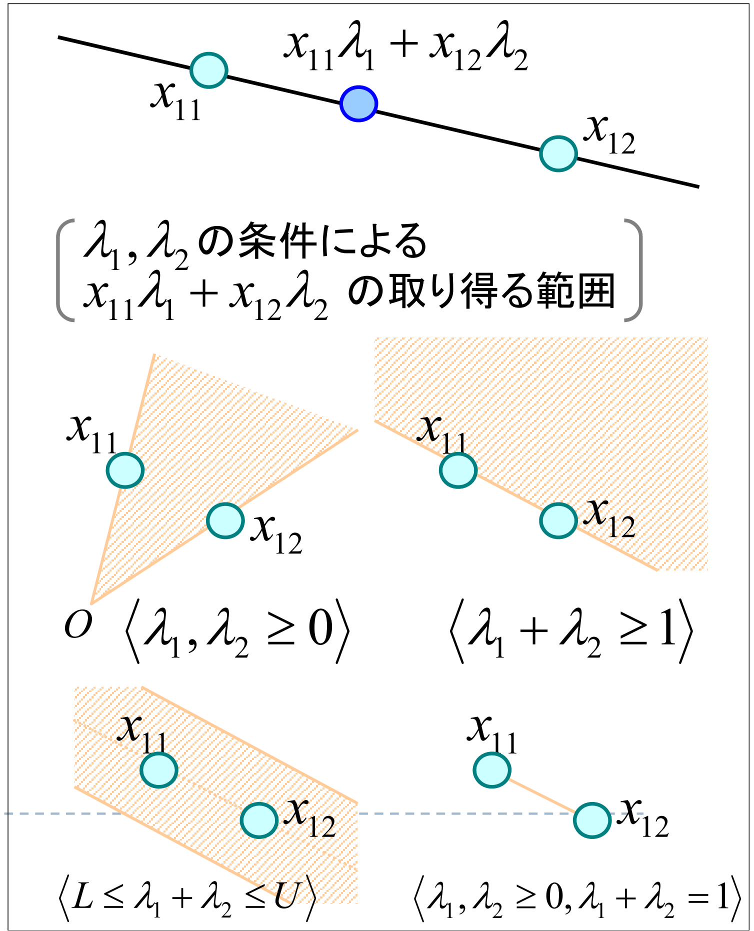
L,Uの取り方により変わる

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

実際の問題は
$\theta\boldsymbol{x}_o$ と $\boldsymbol{y}_o$ を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq U$$



生産可能集合

Banker-Charnes-Cooper

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル1：BCCモデル[L=U=1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$$P = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\right\}$$

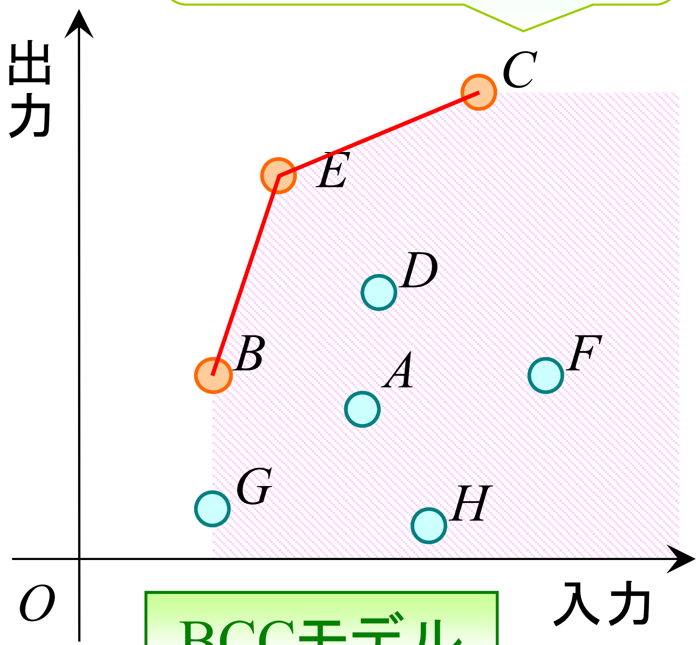
$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{e\lambda} = 1$$

実際の問題は $\theta \boldsymbol{x}_o$ と $\boldsymbol{y}_o$ を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$$



BCCモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合

Increasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル2：IRSモデル[L=1,U=∞]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\dots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \le \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

収穫逓増

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\middle|\, \boldsymbol{x} \ge X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \le Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, L \le \boldsymbol{e\lambda} \le U \right\}$$

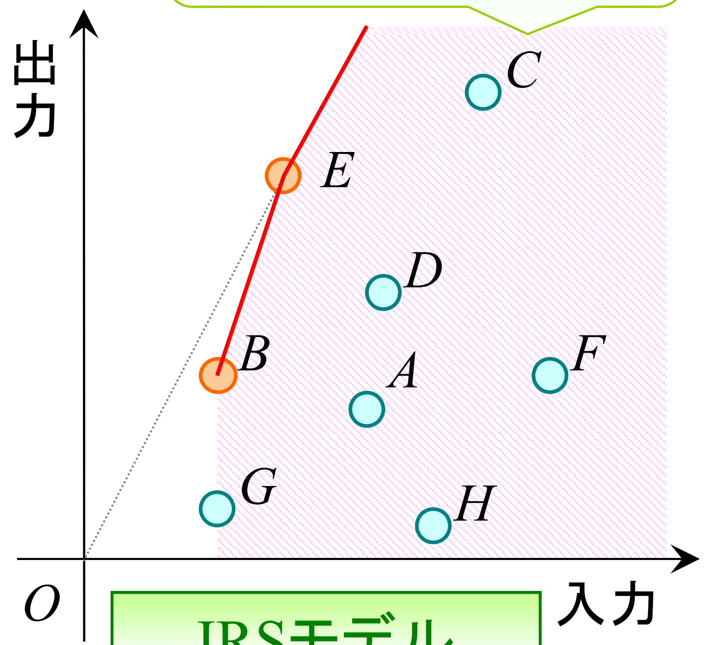
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{e\lambda} \ge 1}$$

実際の問題は θxo と yo を使う

$$\begin{cases} x_1 \ge x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \ge x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \quad \vdots \\ x_m \ge x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 \le y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \le y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \quad \vdots \\ y_s \le y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ge 0 \qquad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \ge 1}$$



IRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合

Decreasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル3：DRSモデル[L=0,U=1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$ を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \right\}$$

$$\Updownarrow$$

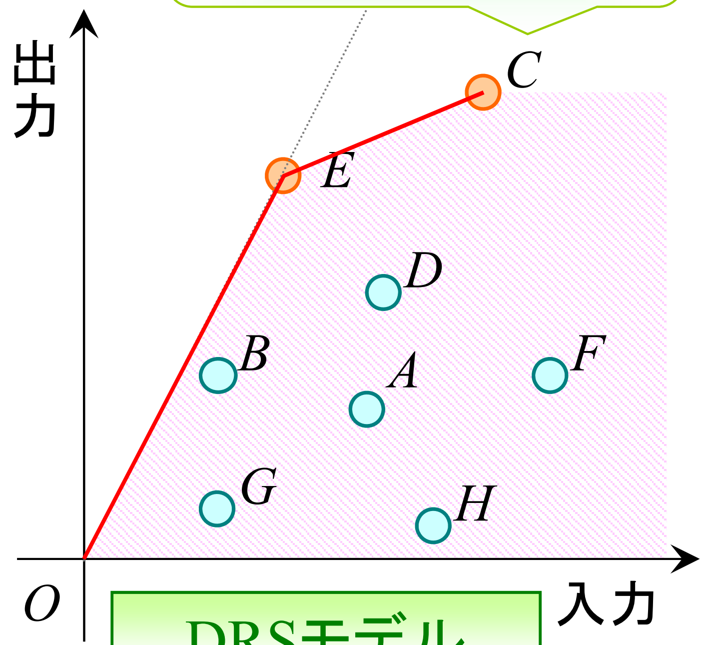
$$\boldsymbol{e\lambda} \leq 1$$

実際の問題は
θxo と yo を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1$$

比較的規模の大きい
活動の効率性を重視



DRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合

General Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル4：GRSモデル[L≦1,U≧1]）

（1）現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 (x, y) に対し，k倍した活動 (kx, ky) も P に属する

（3）P に属す活動 (x, y) に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

現存の活動の規模をある程度縮小拡大したものまで認める立場

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \right\}$$

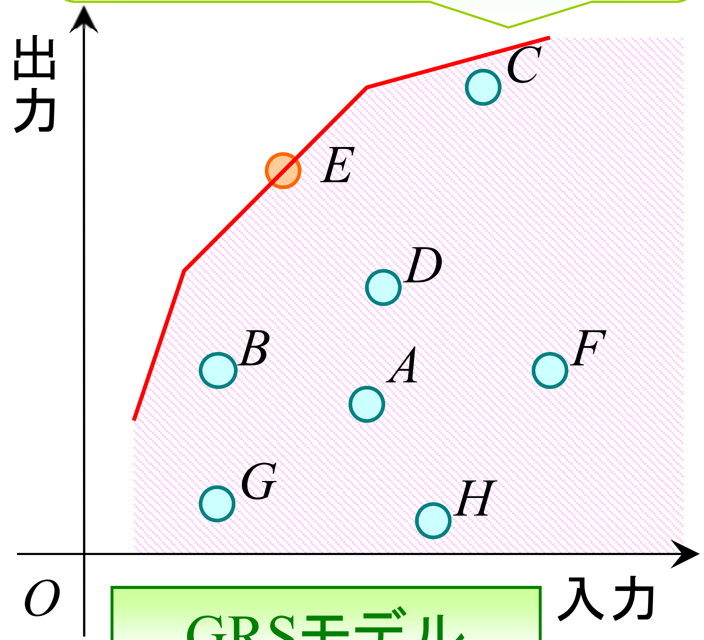
$$\Updownarrow$$

$$ex)0.8 \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq 1.2$$

実際の問題は
θxo と yo を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad 0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1.2$$



GRSモデル
（1入力・1出力）

参考文献

[1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, *Vol.2, pp.429-444*, 1978

[2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連（1993）

[3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店（2001）

[4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店（2004）

[5] …