統計の分析と利用

5. 仮説検定

堀田敬介

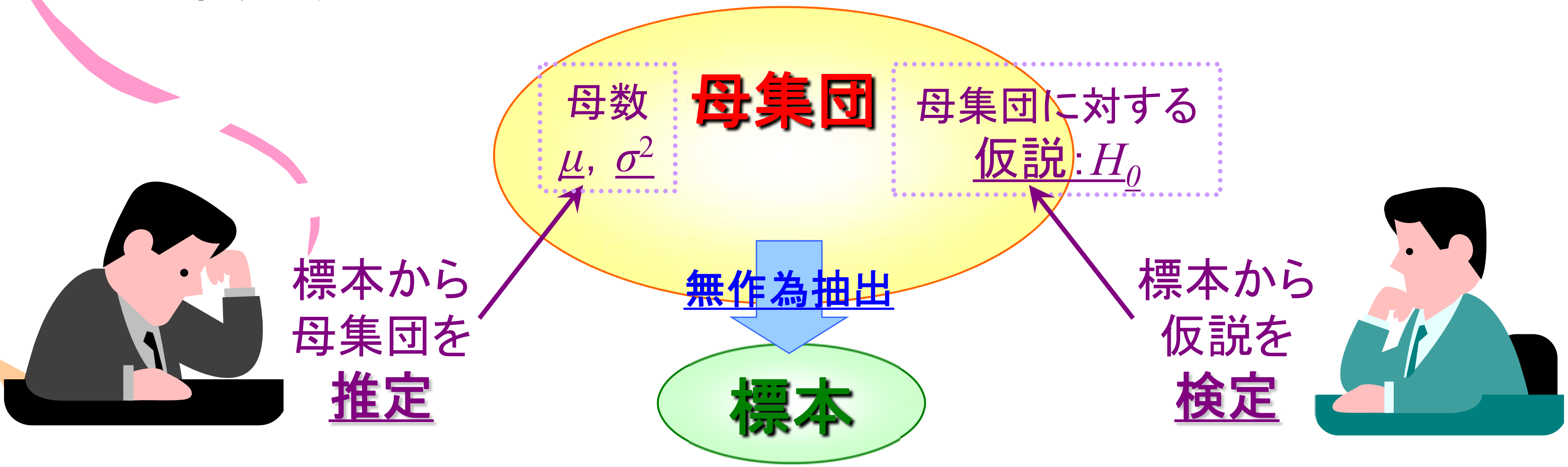
2013/1/11,Fri.

Contents

- **仮説検定**とは？
  - 仮説検定の思想
  - 仮説検定における仮説：帰無仮説と対立仮説
  - 対立仮説のたて方：片側検定と両側検定
  - 棄却域・有意水準，仮説検定における誤りと検出力
- **母集団の母数に対する仮説検定**
  - 母平均の検定（母分散が既知の場合）
  - 母平均の検定（母分散が未知の場合）
  - 母分散の検定
  - 母比率の検定
- **適合度検定**と**独立性の検定，分散分析(一元配置)**
- **2つの母集団に対する仮説検定**
  - 平均値の差の検定（母分散が既知の場合）
  - 平均値の差の検定（母分散が未知だが等しい場合）
  - 平均値の差の検定（母分散が未知で等しくない場合）
  - 分散の比の検定

仮説検定とは？

推測統計 statistical inference	仮説検定 hypothesis testing
標本データの平均値と分散（標準偏差）から，母集団の平均値と分散（標準偏差），母比率などの母数（パラメータ）を推定する	標本データの平均値と分散（標準偏差）などをもとに，母集団に対する**「ある仮説」が間違いかどうか**判定する



仮説検定とは？

- 例：日本人成人女性の平均身長

仮説 「日本人成人女性の平均身長は160cmである」

母集団
日本人 成人女性

無作為抽出
（ランダムサンプリング）

標本	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身長	150	165	155	170	150	145	175	160	165	140

標本平均の値：157.5cm

仮説は間違っているのか？　それとも正しいのか？

仮説検定とは？

標本	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身長	150	165	155	170	150	145	175	160	165	140

標本平均の値：157.5cm

- 例：日本人成人女性の平均身長

仮説　「日本人成人女性の平均身長は160cmだ」

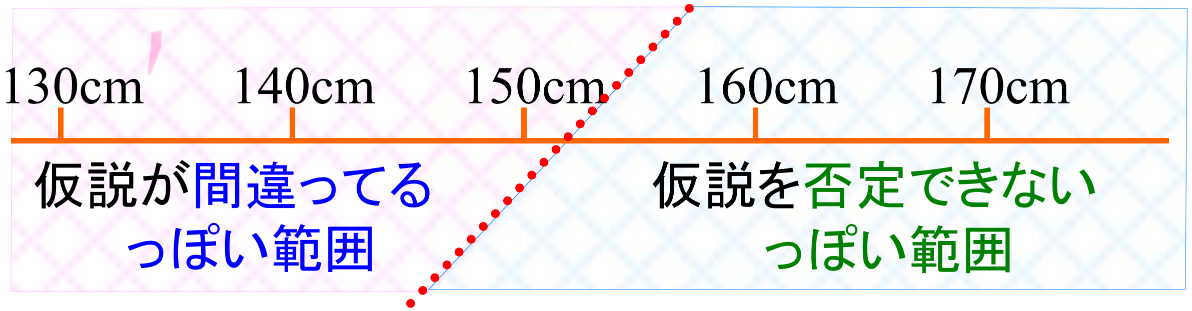
否定　「いや違うわ！160cmより低いはずよ」

たまたま測った10人の平均が160cmでないからと言って，仮説を否定はできないよ

でも無作為抽出（ランダムサンプリング）してるのだから，「仮説が正しい」なら「160cmを大幅に下回ることなんて滅多に無い」はずよ

じゃぁ，標本平均が160cmから大きく外れてなければ，仮説は間違っていないと判断することにしようよ

そうね，「仮説が間違っていると言えそうな範囲」を決めましょう



仮説検定とは？

- 例: 日本人女性の平均身長

130cm 140cm 150cm 160cm 170cm

仮説が間違ってるっぽい範囲 | 仮説を否定できないっぽい範囲

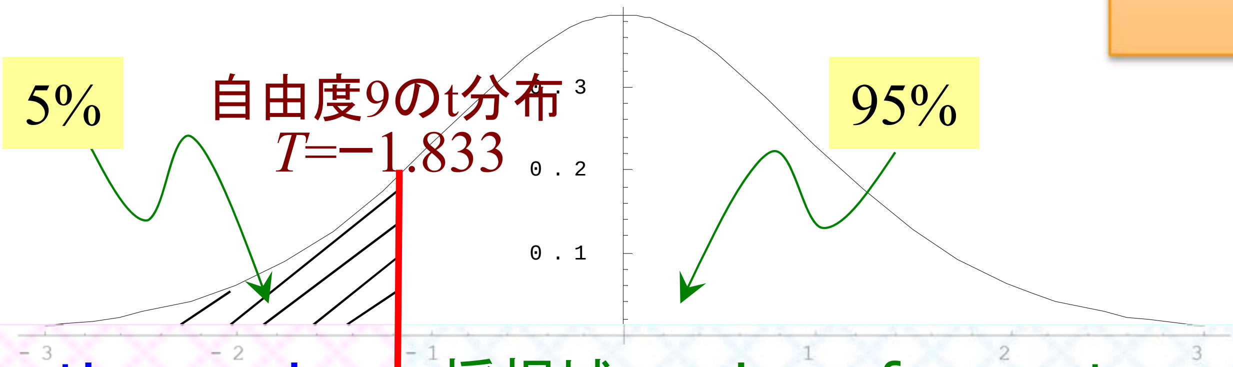
$\overline{X} \leq ???$

仮説が間違ってるっぽい範囲
↓
t分布の下側5%

$T \leq -1.833$

標本平均 $\overline{X}$,
標本分散 S^2 に対し,
確率変数 T が自由度 n-1 の t 分布に従う

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_\alpha(n-1)$$



棄却域 rejection region
（臨界域 critical region）

採択域 region of acceptance

仮説検定とは？

- 例：日本人女性の平均身長

仮説「日本人成人女性の平均身長は160cmである」

標本平均の値：$\overline{X} = 157.5cm$

標本分散の値：$S^2 = 113.3$ （標本標準偏差の値：S=10.8）

自由度9のt分布の下側5%棄却域

$$T \le -1.833$$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \le -1.833$$

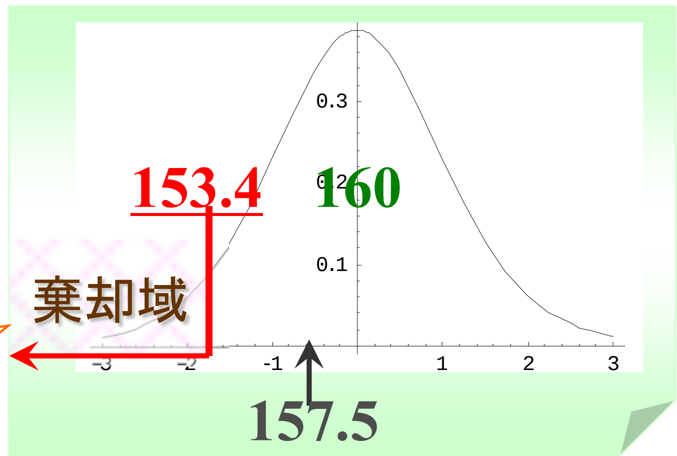
$$\Leftrightarrow \overline{X} \le \mu - 1.833 \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} \le 160 - 1.833 \frac{10.8}{\sqrt{10-1}} = 153.4$$

標本平均の棄却域

$$\overline{X} \le 153.4$$

標本平均値157.5cmで棄却域にないため，
仮説は棄却されない
つまり，仮説が間違っているとは言えない



仮説検定とは？

- 仮説検定の手順
  1. 母集団に対する「仮説」を立てる
  2. 「仮説」の棄却域を設定する

     棄却域を5%とするということは，残り95%信頼区間から外れていれば「仮説」を「棄却」するということ

  3. 結論を述べる

棄却域：小 信頼区間：広	⇔	棄却域：大 信頼区間：狭

★ 棄却域を5%と設定するということは，検定の結論が間違っている危険性が5%はあるということ

5%：**有意水準**（significance level）
〔危険率（risk）〕

仮説検定とは？

- 母集団に対する「仮説」について

〔**帰無仮説**〕日本人成人男性の平均体重は60kgである

〔**対立仮説**〕日本人成人男性の平均体重は60kgではない

⇩

★**帰無仮説**を統計的に検定したとき，その起こる確率が棄却域にあれば，この仮説が棄却される

★**帰無仮説**が棄却されない場合，**帰無仮説**が絶対正しいという結論を出せるわけではない

★**帰無仮説**は棄却されてはじめて意味を持つ

★**対立仮説**は**帰無仮説**が棄却された場合に採択される

帰無仮説 (null hypothesis)
棄却されてはじめて意味を持つ

対立仮説 (alternative hypothesis)
本当に示したいこと

統計的検定の目的は「対立仮説の正しさを示す」こと！

仮説検定とは？

- 対立仮説の立て方

〔帰無仮説〕

$\mu = 60$: 日本人男性の平均体重は60kgである

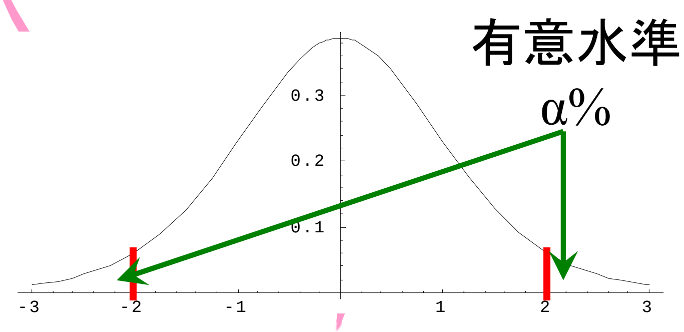
〔対立仮説〕

$\mu \neq 60$: 日本人男性の平均体重は60kgではない　両側検定 two tailed test

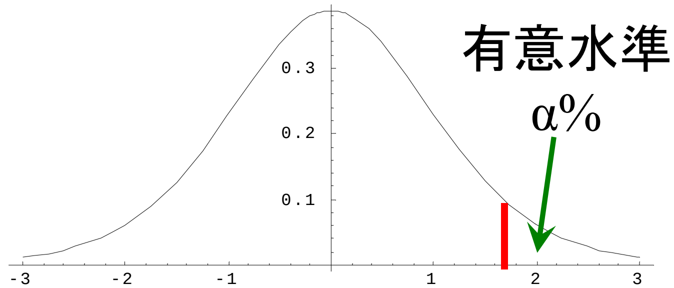
$\mu > 60$: 日本人男性の平均体重は60kgより重い　片側（右側）検定 one tailed test

$\mu < 60$: 日本人男性の平均体重は60kgより軽い　片側（左側）検定 one tailed test

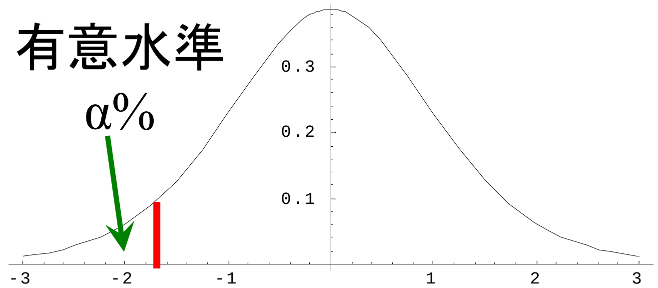
3つある対立仮説のうちのどれか1つを，検定をする人が選ぶ（実施する検定に対して最も適当と思われるものを選ぶ）



両側検定



片側検定（右側）



片側検定（左側）

仮説検定とは？

- 棄却域・有意水準，検定における誤りと検出力
  - 第1種の誤り：帰無仮説H_0が正しいのにそれを棄却してしまう
  - 第2種の誤り：帰無仮説H_0が誤っているのにそれを採択してしまう

		本当に成り立っているのは	
		帰無仮説 H_0	対立仮説 H_1
検定結果	H_0	正しい判断（その確率：$1-\alpha$）	第2種の誤り（その確率：β）
	H_1	第1種の誤り（その確率：α=有意水準）	正しい判断（確率：$1-\beta$=検出力）

α：大 ⇔ β：小
α：小 ⇔ β：大
であり両方小さくはできない

•帰無仮説が限定的なのでαは定められる
•サンプル数が多ければβは小さくなる

例）刑事事件の裁判（H_0: 被告人は有罪，H_1:被告人は無罪）

		真実は	
		H_0が正しい場合	H_1が正しい場合
判決	H_0	正しい判断	第2種の誤り：冤罪
	H_1	第1種の誤り：犯人逃す	正しい判断

Tips!
被告人：刑事訴訟で公訴提起された者
被告：民事・行政訴訟で訴えられた側当事者（⇔原告）

参考：仮説検定における誤りと検出力

- 例：『なぜ男にセクハラが多い？　（または，なぜ告白は男からが多い？）』

（出展：「週刊東洋経済 2007/12/15号　―経済学ってこんなにおもしろい！―p.66『男はなぜセクハラするのか』）

  - 帰無仮説 H_0：目の前の異性は，私のことを異性として好き
  - 対立仮説 H_1：目の前の異性は，私のことを異性として好きではない

		真実は	
		帰無仮説 H_0	対立仮説 H_1
検定結果	H_0 →告白	カップル♥（その確率：$1-\alpha$）	第2種の誤り（その確率：β） セクハラ ストーカー しゅん‥
	H_1 →諦め	第1種の誤り（その確率：α） 甲斐性無し	世にこともなし（確率：$1-\beta$=**検出力**）

男：自分の子孫を多く残したい
→　数多くの相手を見つけたい
→　女が自分の相手になっても良いと思っているのに機会を逃す（＝**第1種の誤り**）のは大いなる損失
→　気のない相手に手を出して（＝**第2種の誤り**）その結果断られても恥をかくだけで済む

女：妊娠・子育ては大きな負担
→　助ける男が必要（守って欲しい）
→　自分と子供を養育する意思と力のある男を選びたい
→　本気の男を見逃した（＝**第1種の誤り**）としても，自分に気のない相手にだまされる（＝**第2種の誤り**）より良い

間違えるならこっちがいい
（心理的負担小）

男：第1種の誤り＜＜＜第2種の誤り

女：第1種の誤り＞＞＞第2種の誤り

母数に関する仮説検定

- 母平均に関する仮説検定（母分散σ^2 既知）

Z検定

統計量 $\overline{X} \to Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ が標準正規分布$N(0,1)$に従うことを利用

- 母平均に関する仮説検定（母分散σ^2 未知）

t検定

統計量 $\overline{X} \to T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$ が自由度 n-1 の t 分布に従うことを利用

- 母分散に関する仮説検定

χ^2検定

統計量$S^2 \to \chi^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ が自由度 n-1 のχ^2分布に従うことを利用

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔Z検定〕（母分散が既知の場合）
  - 例：BMIによる肥満検査

$$\mathrm{BMI} = (\text{体重})\mathrm{kg} \div \{(\text{身長})\mathrm{m}\}^2$$

BMI値	判定
～20	やせ
～24	普通
～26.5	太気味
～∞	太過

ある会社の無作為抽出100人の社員のBMIが平均値=22.35だった．
肥満の程度に問題があるといえるか？有意水準5%で検定

〔出展：『図解雑学 統計解析』p.192〕

〔帰無仮説〕母平均 $\mu = 22$
〔対立仮説〕母平均 $\mu \neq 22$
で両側検定．ただし，母標準偏差は過去の経験から2.5とする．

$$\overline{X} \to Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

確率変数Zは
標準正規分布
$N(0,1)$に従う

母数に関する仮説検定

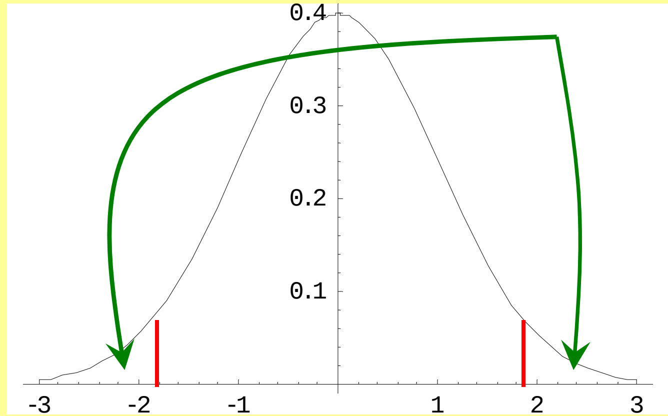
- 母平均の検定〔Z検定〕（母分散が既知の場合）
  - 例：BMIによる肥満検査

$Z \le -1.96, Z \ge 1.96$：両側5%棄却域

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le -1.96, \\ Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge 1.96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X} \le \mu - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ \bar{X} \ge \mu + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X} \le 22 - 1.96 \times \dfrac{2.5}{\sqrt{100}} = 21.51 \\ \bar{X} \ge 22 + 1.96 \times \dfrac{2.5}{\sqrt{100}} = 22.49 \end{cases}$$

標準正規分布：両側5%棄却域



$\bar{X} \le 21.51, \bar{X} \ge 22.49$：標本平均の両側5%棄却域

$\bar{X} = 22.35$だったので，棄却域にない．即ち，<u>帰無仮説を棄却できない</u>

この会社の社員について肥満の程度に問題があるとは言えない
（注：「問題がない」と積極的にいえるわけではない）

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔*t*検定〕(母分散が未知の場合)
  - 例：酒屋の不正疑惑

ある酒屋では酒の量をごまかして売っているという噂があったので実際に1合(=180cc)のお酒を5本買って調べてみた．

酒量(cc)	175	180	165	170	170

標本平均値は172.0cc であり，180ccより8ccも少ないが，果たしてこの店は不当表示で訴えられるか？　〔出展：『なるほど統計学』p.125〕

〔帰無仮説〕母平均 $\mu = 180$

〔対立仮説〕母平均 $\mu < 180$

とし，有意水準5%で片側検定(左側)．

標本平均：$\overline{X} = 172.0$

標本分散：$S^2 = 26.0$

(標本標準偏差：$S = 5.099$)

$$\overline{X} \to T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n-1}}$$

確率変数Tは
自由度n-1のt分布
$t_\alpha(n-1)$ に従う

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕(母分散が未知の場合)
  - 例:酒屋の不正疑惑

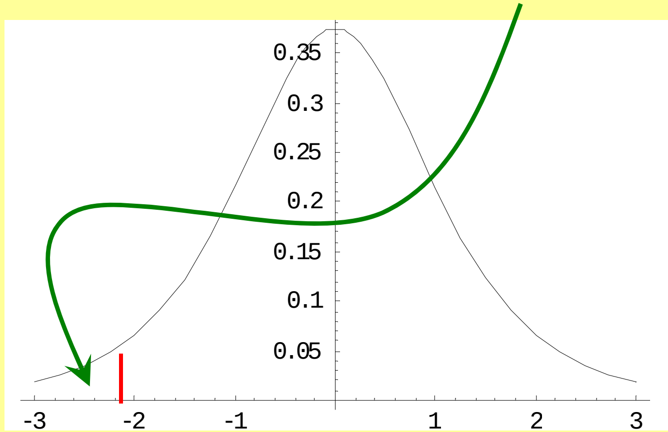
$T \leqq -2.132$:片側5%棄却域

$$\Leftrightarrow T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \le -2.132$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} \le \mu - 2.132\frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} \le 180.0 - 2.132\frac{5.099}{\sqrt{5-1}} = 174.6$$

t分布:片側(下側)5%棄却域



⇒ $\bar{X} \le 174.6$:標本平均の片側5%棄却域

⇒ $\bar{X} = 172.0$ だったので,棄却域にある.即ち,<u>帰無仮説は棄却される</u>

⇒ この酒屋は酒量をごまかしているらしい

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕(母分散が未知の場合)
  - 演習1:空調システムの作動状況検査

設定温度を25℃とし，7日間室内温度測定し，このシステムが正しく動いているかどうか5%有意水準で両側検定せよ

24.2	25.3	26.2	25.7	24.4	25.1	25.6

〔出展:『統計学入門』p.241〕

〔帰無仮説〕$\mu = 25.0$

〔対立仮説〕$\mu \neq 25.0$

標本平均: $\overline{X} = 25.21$，標本分散:S^2=0.438（標本標準偏差:S=0.662）

$t_{\pm 0.025}(6) = \pm 2.447$ より

$T \leqq -2.447, T \geqq 2.447$:両側5%棄却域

$$\Leftrightarrow T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \leq -2.447, \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \geq 2.447$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{X} \leq \mu - 2.447\dfrac{S}{\sqrt{n-1}} = 25 - 2.447\dfrac{0.662}{\sqrt{7-1}} = 24.34, \\ \overline{X} \geq \mu + 2.447\dfrac{S}{\sqrt{n-1}} = 25 + 2.447\dfrac{0.662}{\sqrt{7-1}} = 25.66 \end{cases}$$

$\overline{X} \leq 24.34, \overline{X} \geq 25.66$:標本平均の両側5%棄却域

空調システムが正しく動いていないとは言えない

有意水準5%で帰無仮説を棄却できない

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕(母分散が未知の場合)
  - 演習2:補習授業の効果測定

英語の補習を行った後の試験成績は上がったか？5%有意水準で効果を検定せよ. 10名の対象学生に対する補習前後の得点差は下表

−1	3	4	5	3	0	7	4	2	−2

〔出展:『統計学入門』p.241〕

〔帰無仮説〕$\mu=0$

〔対立仮説〕$\mu>0$

標本平均: $\bar{X}=2.50$ ，標本分散:$S^2=7.050$ (標本標準偏差:$S=2.655$)

$t_{0.025}(9)=1.833$ より

$T\geqq 1.833$:片側5%棄却域

$$\Leftrightarrow T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}\geq 1.833$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}\geq \mu+1.833\frac{S}{\sqrt{n-1}}=0+1.833\frac{2.655}{\sqrt{10-1}}=1.622$$

$\bar{X}\geq 1.622$:標本平均の片側5%棄却域

補修の効果はなかったとは言えない(あったらしい)

有意水準5%で帰無仮説は棄却される

母数に関する仮説検定

- 母平均の検定〔t検定〕(母分散が未知の場合)
  - 演習3：今年の生徒は出来がよいか？

数学の定期試験で10人の採点を終えた所，平均が71点で昨年度(65.7点)より5.3点も良い！今年の生徒は出来がよいのだろうか？有意水準5%で検定せよ.

70	62	82	73	67	75	85	71	60	65

〔出展:『図解雑学 統計解析』p.202〕

〔帰無仮説〕$\mu=65.7$

〔対立仮説〕$\mu>65.7$

標本平均: $\overline{X}=71.0$ ，標本分散:$S^2=59.20$ (標本標準偏差:$S=7.694$)

$t_{0.025}(9)=1.833$ より

$T\geqq 1.833$:片側5%棄却域

$$\Leftrightarrow T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}\geq 1.833$$

$$\Leftrightarrow \overline{X}\geq \mu+1.833\frac{S}{\sqrt{n-1}}=65.7+1.833\frac{7.694}{\sqrt{10-1}}=70.40$$

$\overline{X}\geq 70.40$:標本平均の片側5%棄却域

今年の生徒は昨年より出来が悪いとは言えない(良いらしい)

有意水準5%で帰無仮説は棄却される

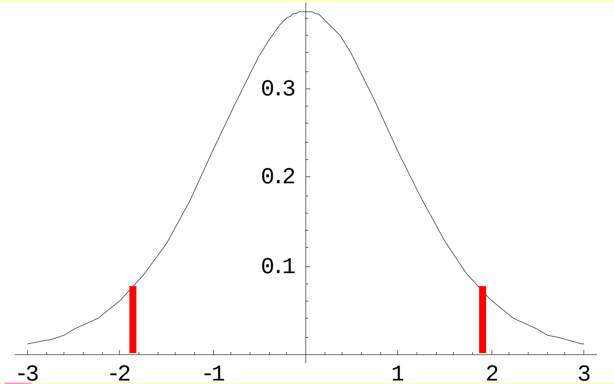
Coffee Break!

- 両側検定と片側検定の使い分け
  - 例：母平均の両側検定

    〔帰無仮説〕$\mu = \mu_0$

    〔対立仮説〕$\mu \neq \mu_0$

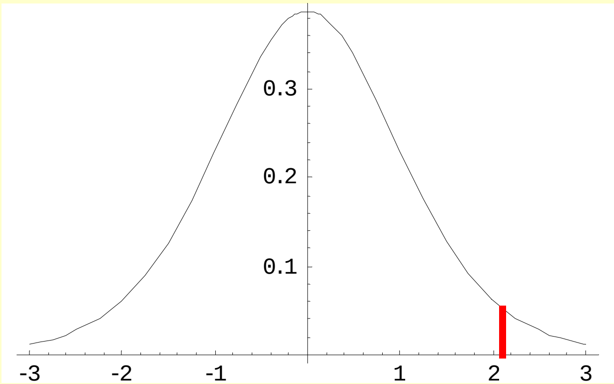
    《μ_0は既知の値》



  - 例：母平均の片側検定（右側）

    〔帰無仮説〕$\mu = \mu_0$

    〔対立仮説〕$\mu > \mu_0$



＜両側検定を実施する理由＞

母数の値がある目標値と等しいかどうかを調べたい

例：生産ラインの機械が正しく動いているか？

＜片側検定を実施する理由＞

1. $\mu<\mu_0$が起こり得ない
2. $\mu>\mu_0$を積極的に見いだせればそれでよい
3. 母数の大きさが理論的・経験的に予測される

例：補習後の成績は上がった？（上がったと積極的に知りたい）

例：今年の夏は寒い気がする．本当か？

（「寒い」という経験から平均気温が低いことを予測）

母数に関する仮説検定

- 母分散の検定〔χ^2検定〕
  - 例：製品のばらつき検査

目標重量25kgの製品の重量のばらつきが大きいことがわかり修理した．修理後の製品を無作為抽出した結果が以下．修理前の分散が9kg^{2}のとき，この製品は性能が向上したといえるか？

24　　26　　27　　22　　26

〔出展：『なるほど統計学』p.132〕

修理後は性能が向上したと考えられる

⇒　分散は小さくなったはず

⇒　片側検定（左側）

〔帰無仮説〕$\sigma^2 = 9$

〔対立仮説〕$\sigma^2 < 9$

標本平均：$\overline{X} = 25.0$

標本分散：$S^2=3.20$

（標本標準偏差：$S=1.789$）

$$S^2 \rightarrow \chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$$

確率変数χ^2は
自由度n-1の
χ^2分布に従う

母数に関する仮説検定

- 母分散の検定〔χ^2検定〕
  - 例：製品のばらつき検査

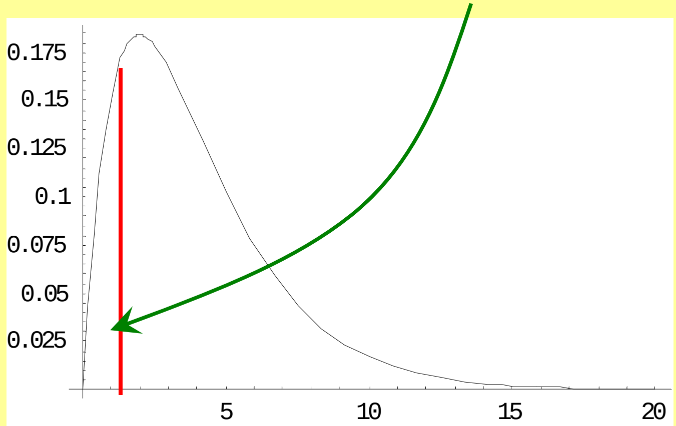
$\chi^2 \leqq 0.7107$：片側5%棄却域

$$\Leftrightarrow \chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} \leq 0.7107$$

$$\Leftrightarrow S^2 \leq 0.7107\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow S^2 \leq 0.7107\frac{9}{5} = 1.279$$

χ^2分布：片側(下側)5%棄却域



⇒ $S^2 \leqq 1.279$：標本分散の片側5%棄却域

⇒ S^2=3.20だったので，棄却域にない．即ち，<u>帰無仮説は棄却されない</u>

⇒ 修理後に性能があがったとは言えない

母数に関する仮説検定

- 母分散の検定〔χ^2検定〕
  - 演習：小学校の知能テスト

　ある小学校の入学時知能テストの結果は平均50，分散36だった．
本年度入学児25名を無作為抽出したところ平均53，分散48だった．
本年度入学児の揃い方は例年と違うか？ 有意水準5%で検定せよ

〔出展：『統計学入門』p.242〕

〔帰無仮説〕$\sigma^2=36$

〔対立仮説〕$\sigma^2\neq36$

標本分散：$S^2=48$

$\chi^2_{0.975}(24)=12.4012$, $\chi^2_{0.025}(24)=39.3641$　より

$\chi^2\leqq12.4012$, $\chi^2\geqq39.3641$：両側5%棄却域

$$\Leftrightarrow \chi^2=\frac{nS^2}{\sigma^2}\le 12.4012,\ \chi^2=\frac{nS^2}{\sigma^2}\ge 39.3641$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2\le 12.4012\dfrac{\sigma^2}{n}=12.4012\dfrac{36}{25}=17.8578, \\ S^2\ge 39.3641\dfrac{\sigma^2}{n}=39.3641\dfrac{36}{25}=56.6843 \end{cases}$$

$S^2\leqq17.86$ $S^2\geqq56.68$ ：標本分散の両側5%棄却域

本年度入学児は揃い方が例年と違うとは言えない

有意水準5%で帰無仮説は棄却されない

Coffee Break!

- 仮説検定をすべきかどうか
  - 仮説検定はサンプル数 n が小さいときに行う
  - サンプル数 n が十分大きい場合，大数の法則より，平均値を推定量として比較すればよい

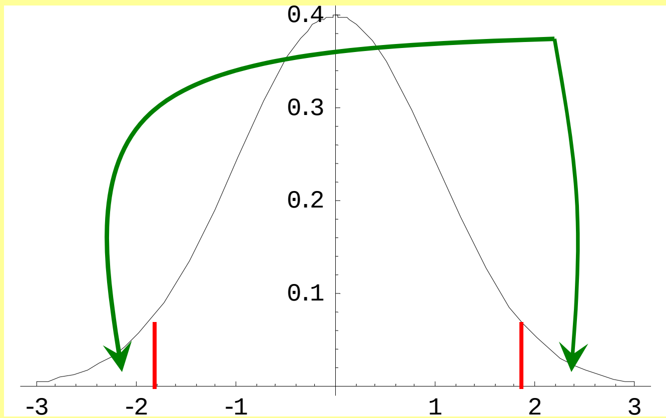
母数に関する仮説検定

- 母比率に関する仮説検定

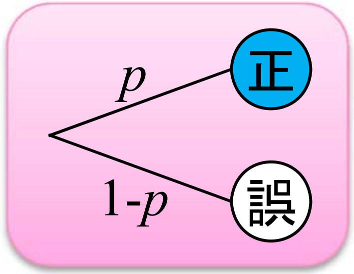
Z検定

統計量 $P \rightarrow Z = \dfrac{p-P}{\sqrt{P(1-P)/n}}$ が標準正規分布$N(0,1)$に従うことを利用

標準正規分布：両側5%棄却域

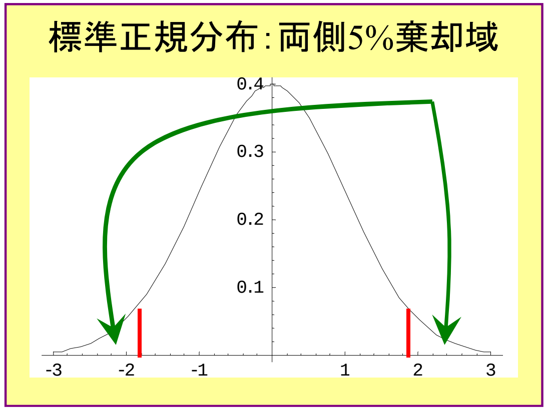


母数に関する仮説検定



- 母比率の検定〔Z検定〕
  - 例：頭のいい？チンパンジー

チンパンジーに言葉を覚えさせた．次に，言葉を書いたカードを見せ，そのカードと同じ物を指摘させる実験を行ったところ，30回中18回正解だった．このチンパンジーの行動が当てずっぽうではないと言いたい．有意水準5%で検定せよ



〔帰無仮説〕$p=1/2$　（←でたらめで当たる確率）
〔対立仮説〕$p\neq 1/2$

標本比率：$P=18/30=3/5=0.6$

両側5%棄却域：$Z<-1.96,\ Z>1.96$

検定統計量：$Z=\dfrac{p-P}{\sqrt{P(1-P)/n}}=\dfrac{1/2-3/5}{\sqrt{3/5(1-3/5)/30}}=\dfrac{-1/10}{1/5\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}=-1.118$

⇒ 統計量 $Z=-1.118$ が 棄却域 $Z<-1.96,\ Z>1.96$ にないので，
<u>帰無仮説を棄却できない</u>

⇒ このチンパンジーは言葉がわかって答えているとは言えない

適合度検定 goodness-of-fit test

- 適合度のχ^2検定〔Chi-square goodness-of-fit test〕

仮定された理論上の確率分布に対し，標本から求められた度数が適合するか否かを検証する．

例：さいころ投げ

さいころを300回投げると理論上は1～6の目が50回ずつ出る (さいころの目は一様分布となる）．実際に300回投げると…

賽の目	1	2	3	4	5	6	合計
観測度数	47	52	46	53	47	55	300

〔帰無仮説〕 さいころの目の出方に偏りがない(一様分布に従う)

〔対立仮説〕 さいころの目の出方に偏りがある(一様分布に従わない)

適合度検定：

母集団分布の従う確率分布について立てた帰無仮説を検証する

適合度検定 goodness-of-fit test

観測度数と理論度数の差（ずれ）のばらつきが許容できる以上に多き過ぎる場合，それは変だよね → 変な範囲を決めよう

- 適合度の測定

例：さいころ投げ

〔帰無仮説〕 さいころの目の出方に偏りがない(一様分布に従う)

〔対立仮説〕 さいころの目の出方に偏りがある(一様分布に従わない)

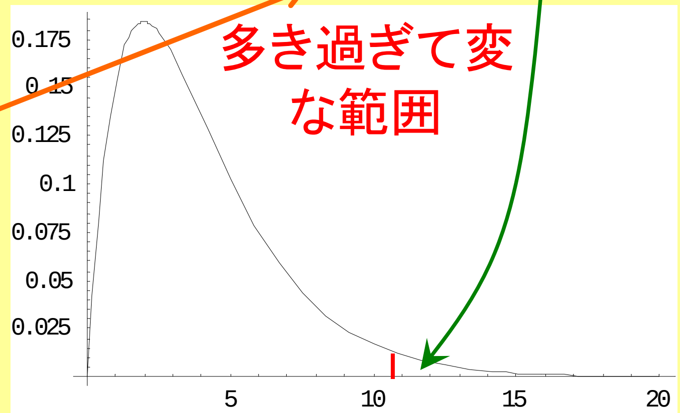
	賽の目	1	2	3	4	5	6 ← k	合計
f_i →	観測度数	47	52	46	53	47	55	300 ← n
p_i →	理論確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
np_i →	理論度数	50	50	50	50	50	50	300

K.Pearsonの適合度基準

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$$

（十分大きいn で）
自由度 k-1 の χ^2分布に従う

χ^2分布：上側5%棄却域



注）$f_1, f_2, \ldots, f_k$は k個の確率変数だが，
$f_1+f_2+\ldots+f_k=n$ より，自由度は1減る

適合度検定 goodness-of-fit test

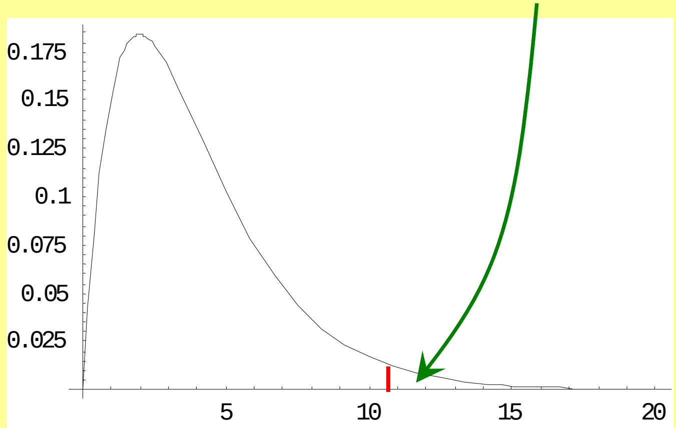
- 適合度の測定

例：さいころ投げ

自由度5のχ^2分布の片側5%棄却域（右側）

$$\chi^2 \geq 11.0705 = \chi^2_{0.05}(5)$$

χ^2分布：上側5%棄却域



K.Pearsonの適合度基準

$$\chi^2 = \frac{(47-50)^2}{50} + \frac{(52-50)^2}{50} + \cdots + \frac{(55-50)^2}{50} = 1.44$$

〔参考：p値=0.92 > 0.05=有意水準〕

→ Pearsonの適合度基準値（1.44）が棄却域（$\chi^2 \geqq 11.0705$）にない

→ 帰無仮説は棄却できない

このさいころは、目の出方に偏りがあるとは言えない

適合度検定 goodness-of-fit test

- 適合度のχ^2検定〔Chi-square goodness-of-fit test〕

例：さいころ投げ その2

帰無仮説は棄却されたけど，ほんとにこのさいころはいかさまじゃない？　奇数の目が出にくく，偶数の目が多く出ている気がするけど…

賽の目	1	2	3	4	5	6	合計
観測度数	47	52	46	53	47	55	300

〔帰無仮説〕 さいころの偶奇の出方に偏りがない(一様分布に従う)
〔対立仮説〕 さいころの偶奇の出方に偏りがある(一様分布に従わない)

賽の目	奇数目	偶数目	
観測度数	140	160	300
理論確率	1/2	1/2	1
理論度数	150	150	300
差	−10	10	
自乗	100	100	200
χ^2値	0.667	0.667	1.333

1.333 ＞？ 3.841

参考：p値= 0.248213 ＜？ 0.05

よって，帰無仮説は棄却されない

適合度検定 goodness-of-fit test

- 適合度のχ^2検定

演習：メンデルの法則〔えんどう豆の形質遺伝〕

表現型	黄色・丸い	黄色・しわ	緑色・丸い	緑色・しわ	計
観測度数	315	101	108	32	556
理論確率	9/16	3/16	3/16	1/16	1
理論度数	312.75	104.25	104.25	34.75	556
度数差	2.25	−3.25	3.75	−2.75	

〔出展：『統計学入門』p.245〕

〔帰無仮説〕 えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合している

〔対立仮説〕 えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合していない

$$\chi^2 = 0.470 \cancel{>} 7.815 = \chi^2_{0.05}(3)$$

〔p値=0.93 > 0.05=有意水準〕

より，適合度基準値が片側5%棄却域にないので，帰無仮説は棄却できない

えんどう豆の表現型はメンデルの法則に適合しているようだ

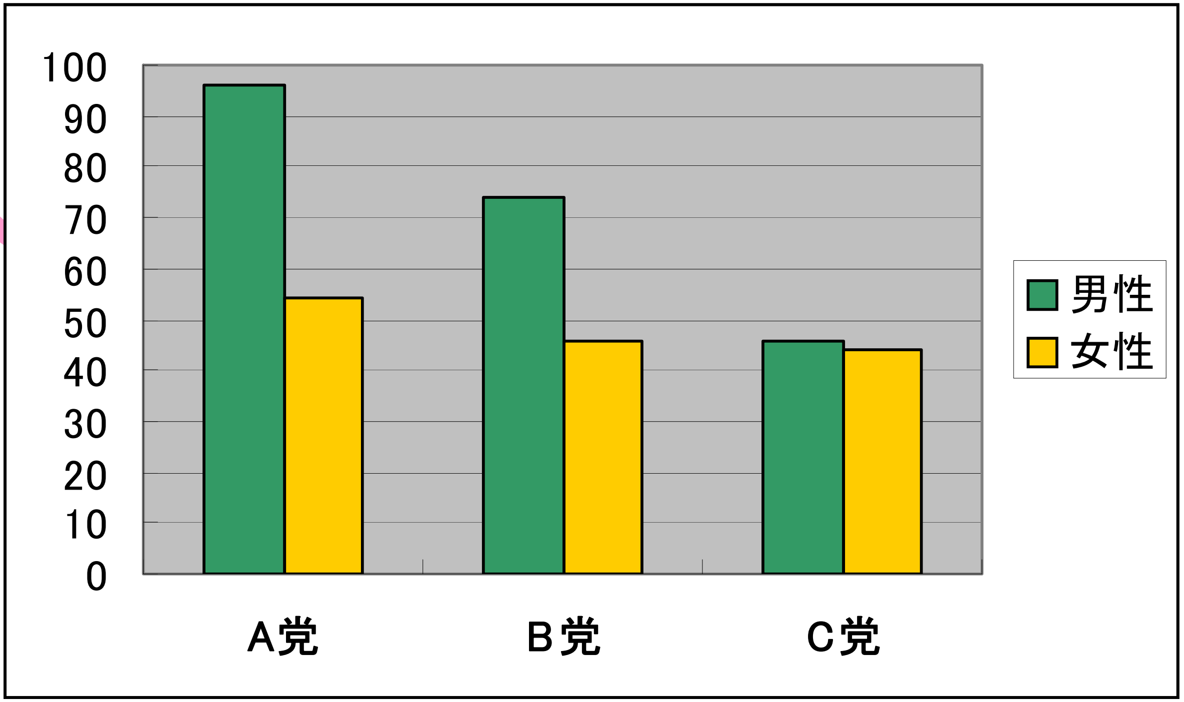
独立性の検定 test of independence

- 独立性のχ^2検定〔Chi-square test of independence〕

  2つの属性の間に関係があるかどうかを検証する

例：支持政党に男女差があるか？　〔出展：『図解雑学 統計解析』p.224〕

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	96	74	46	216
女性	54	46	44	144
合計	150	120	90	360



支持政党に男女差があるか？

それとも，差がない（支持政党は男女差に独立）？

独立性の検定 test of independence

観測度数と理論度数との差が非常に大きいなら，
2つの間には差がある（独立でない）ってコトだよね

- 独立性の測定

例：支持政党に男女差があるか？

〔帰無仮説〕支持政党に男女差がない → 男女共全体比率に等しい

〔対立仮説〕支持政党に男女差がある

観測度数

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	96	74	46	216
女性	54	46	44	144
合計	150	120	90	360

f_{ij}, w_{i}, t, v_{j}, g_{ij}

理論度数

支持政党	A党	B党	C党	合計
男性	90	72	54	216
女性	60	48	36	144
合計	150	120	90	360

$$g_{ij} = w_i \cdot \frac{v_j}{t}$$

例）男性合計の216を
合計の党支持率の比
150:120:90で分配し，
90:72:54 となる

$$\begin{cases} 90 = 216 \times \dfrac{150}{360} \\ 72 = 216 \times \dfrac{120}{360} \\ 54 = 216 \times \dfrac{90}{360} \end{cases}$$

（nが十分大きければ）
自由度(r-1)(c-1)の
χ^2分布に従う

独立性の基準

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(f_{ij} - g_{ij})^2}{g_{ij}}$$

r：行の数
c：列の数

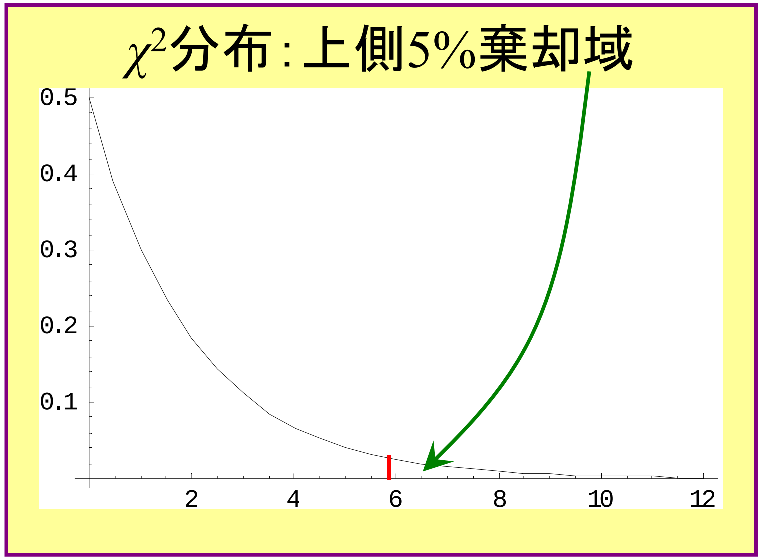
独立性の検定 test of independence

- 独立性のχ^2検定

例：支持政党に男女差があるか？

自由度2のχ^2分布の片側5%棄却域（右側）
=(3-1)(2-1)

$$\chi^2 \geq 5.99146 = \chi^2_{0.05}(2)$$



独立性の基準

$$\chi^2 = \frac{(96-90)^2}{90} + \frac{(74-72)^2}{72} + \frac{(46-54)^2}{54} + \frac{(54-60)^2}{60} + \frac{(46-48)^2}{48} + \frac{(44-36)^2}{36}$$
$$= 4.102$$

〔参考：p値=0.13 > 0.05=有意水準〕

⇒ 独立性の基準値（4.102）が棄却域（$\chi^2 \geqq 5.99146$）にない

⇒ 帰無仮説は棄却できない

支持政党に男女間で差があるとはいえない

独立性の検定 test of independence

• 独立性のχ^2検定

演習：期末試験成績：代数と解析の成績に関係があるか？

〔出展：『統計学入門』p.248〕

観測度数

代数＼解析	A	B	C	合計
A	4	2	3	9
B	8	4	6	18
C	6	3	6	15
合計	18	9	15	42

理論度数

代数＼解析	A	B	C	合計
A	3.86	1.93	3.21	9
B	7.71	3.86	6.43	18
C	6.43	3.21	5.36	15
合計	18	9	15	42

〔帰無仮説〕 代数と解析の成績に関係がない

〔対立仮説〕 代数と解析の成績に関係がある

$$\chi^2 = 0.19 \times 9.488 = \chi^2_{0.05}(4)$$

〔p値$=0.996 > 0.05=$有意水準〕

より，独立性基準値が片側5%棄却域にないので，帰無仮説は棄却できない

代数と解析の成績には関係があるとはいえない

独立性の検定 test of independence

- 独立性のχ^2検定
  - 例題：男性・女性各看護師に対する恋愛についてのアンケート
    （結果に男女差があるか？） 〔出展：『マンガでわかるナースの統計学』p.111〕

観測度数

好きな異性を前にすると緊張する？	否定	肯定	計
男性看護師	20	34	54
女性看護師	35	121	156
計	55	155	210

男	37.0%	63.0%	100.0%
女	22.4%	77.6%	100.0%

理論度数

好きな異性を前にすると緊張する？	否定	肯定	計
男性看護師	14.14	39.86	54
女性看護師	40.86	115.14	156
計	55	155	210

p値：0.035 < 0.05 有意水準

$$\chi^2 = 4.42 > 3.84 = \chi^2_{0.05}(1)$$

χ^2値が棄却域にあるので，帰無仮説は棄却される
（男女間に差がある→女性の方がより緊張する）

観測度数

異性に対しては自分から話しかける方？	否定	肯定	計
男性看護師	25	29	54
女性看護師	109	47	156
計	134	76	210

男	46.3%	53.7%	100.0%
女	69.9%	30.1%	100.0%

異性に対しては自分から話しかける方？	否定	肯定	計
男性看護師	34.46	19.54	54
女性看護師	99.54	56.46	156
計	134	76	210

p値：0.002 < 0.05 有意水準

$$\chi^2 = 9.65 > 3.84 = \chi^2_{0.05}(1)$$

χ^2値が棄却域にあるので，帰無仮説は棄却される
（男女間に差がある→女性の方が異性に話し掛けない）

適合度検定・独立性の検定

- 演習1:サイコロの目の出方に偏りがあるか？　有意水準5%で検定せよ.

賽の目	⚀ ⚁	⚂ ⚃	⚄ ⚅
観測度数	40	65	45

- 演習2:コーヒーの嗜好に違いがあるか？　有意水準5%で検定せよ.

モカ＼キリマンジャロ	大好き	好き	嫌い	大嫌い	計
大好き	8	5	6	9	28
好き	8	5	9	5	27
嫌い	2	8	1	2	13
大嫌い	2	7	3	0	12
計	20	25	19	16	80

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定
  - 2つの正規母集団について母平均の差の検定
    - 母分散が既知の場合 ← Z 検定
    - 母分散が未知だが等しい場合 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$ ← t 検定
    - 母分散が未知で等しくない場合 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ← ウェルチの検定
- 母分散の比の検定
  - 2つの正規母集団について母分散の比の検定 ← F 検定

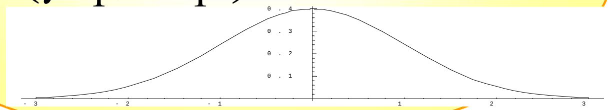
2標本検定 two-sample test

2つの母平均に
「差がある」か「ない」か
の検定

- 母平均の差の検定
  - 2つの正規母集団について母平均の差の検定

母集団1

$N(\mu_1, \sigma_1^2)$



m個 無作為抽出

$X_1, X_2 \cdots, X_m$

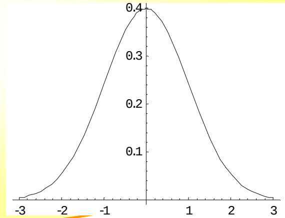
標本1

標本平均：$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m})$

標本分散：S_X^2

母集団2

$N(\mu_2, \sigma_2^2)$



n個 無作為抽出

$Y_1, Y_2 \cdots, Y_n$

標本2

標本平均：$\overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n})$

標本分散：S_Y^2

両側検定の場合
〔帰無仮説〕$\mu_1 = \mu_2$ ←2つの正規母集団の母平均に差がない
〔対立仮説〕$\mu_1 \neq \mu_2$ ←2つの正規母集団の母平均に差がある

片側検定の場合
〔帰無仮説〕$\mu_1 = \mu_2$ ←2つの正規母集団の母平均に差がない
〔対立仮説〕$\mu_1 > \mu_2$ $(or\ \mu_1 < \mu_2)$ ←2つの正規母集団の母平均に差がある

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定
  - 2標本の標本平均の差の標本分布

$$\begin{cases} \overline{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/m) \\ \overline{Y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(\overline{X}-\overline{Y}) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2 \\ V(\overline{X}-\overline{Y}) = V(\overline{X}) + (-1)^2 V(\overline{Y}) = V(\overline{X}) + V(\overline{Y}) = \dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$$

  - この検定の例：医薬の効果の検証
    - 患者を新薬を使った治療を行うグループ（処理群）とそれ以外（対照群）に分け，グループで結果に差があるかどうか（新薬の効果があるかどうか）を検定する．

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が既知のとき）
  - 標本平均の差の標本分布

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / m + \sigma_2^2 / n}} \sim N(0,1)$$

Z検定

平均値の差 $\overline{X} - \overline{Y}$
を標準化した値が標準
正規分布$N(0,1)$に従う

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が未知だが等しい $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$）
  - 標本平均の差の標本分布

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$$

← 平均値の差 $\bar{X}-\bar{Y}$ が正規分布 $N(\cdot,\cdot)$ に従う

  - 合併分散 *pooled variance*

$$s^2=\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

ただし，s_1^2, s_2^2 は不偏推定量

$$\begin{cases} s_1^2=\dfrac{1}{m-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(X-\bar{X})^2, \\ s_2^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(Y-\bar{Y})^2 \end{cases}$$

  - 補足:『合併分散は不偏推定量である』

$$\left(\because) E(s^2)=E\left(\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}\right)=\frac{(m-1)E(s_1^2)+(n-1)E(s_2^2)}{m+n-2}=\frac{(m-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2}{m+n-2}=\sigma^2\right)$$

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が未知だが等しい $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$）

$$\begin{cases} Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/m+1/n}}\sim N(0,1), \\ \chi^2=\dfrac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2) \end{cases}$$

- Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う
- χ^2は自由度$m+n-2$のχ^2分布に従う
- ただし，Z と χ^2 は独立とする

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\chi^2/m+n-2}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/m+1/n}}\Bigg/\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$$

- 上記 Z と χ^2 から自由度 $m+n$-2 の t分布に従う統計量 T をつくる
- この統計量 T を用いて，母平均の差のt検定を行う

t検定

注）t分布の作り方を思いだそう！（資料3参照）

$$T:=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

確率変数 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$のとき，
確率変数 T は自由度nのt 分布に従う

2標本検定 two-sample test

- **母平均の差の検定**（母分散が未知だが等しい $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$）
  - 例：苗木の生長における2社の肥料の違い

    ある苗木の生長について2社の肥料に違いがあるか？

A社の肥料	24.3	25.2	20.4	26.1	22.1	23.4	24.2	20.9	24.7	23.7	21.6	23.4	20.2
B社の肥料	21.3	19.4	22.3	17.2	18.3	20.3	21.4	23.6	21.1	21.3	20.3	19.5	

標本平均値＝ A社の肥料 23.092 / B社の肥料 20.500　不偏分散値＝ A社の肥料 3.579 / B社の肥料 3.029

有意水準5%で両側検定（〔帰無仮説〕$\mu_1 = \mu_2$,〔対立仮説〕$\mu_1 \neq \mu_2$）

合併分散：$$s^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2} = \frac{12 \times 3.579 + 11 \times 3.029}{13+12-2} = 3.316$$

$$s = \sqrt{3.316} = 1.821$$

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{s\sqrt{1/m + 1/n}} = \frac{23.092 - 20.500}{1.821\sqrt{1/13 + 1/12}} = 3.556$$

*t*検定

$T = 3.556 > 2.069 = t_{0.025}(23)$ より，仮説を棄却

注：棄却域
$T < -t_{0.025}(23)$,
$T > t_{0.025}(23)$

2標本検定 two-sample test

- <u>母平均の差</u>の検定（母分散が未知だが等しい $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$）
  - 例（再掲）：苗木の生長における2社の肥料の違い

A社の肥料	24.3	25.2	20.4	26.1	22.1	23.4	24.2	20.9	24.7	23.7	21.6	23.4	20.2
B社の肥料	21.3	19.4	22.3	17.2	18.3	20.3	21.4	23.6	21.1	21.3	20.3	19.5	

標本平均値＝ A社の肥料 23.092 / B社の肥料 20.500　不偏分散値＝ A社の肥料 3.579 / B社の肥料 3.029

＜Excelのデータ分析ツールを使用した検定＞

t-検定: 等分散を仮定した2標本による検定

	A社の肥料	B社の肥料
平均	23.092	20.500
分散	3.579	3.029
観測数	13	12
プールされた分散	3.316	
仮説平均との差異	0	
自由度	23	
t	3.556	
~~P(T<=t) 片側~~	~~0.001~~	
~~t 境界値 片側~~	~~1.714~~	
P(T<=t) 両側	0.002	
t 境界値 両側	2.069	

Excelのデータ分析ツールの結果
「t-検定：等分散を仮定した2標本による検定」

合併分散 *pooled variance*

$m+n-2 = 13+12-2$

Tの値

$t_{0.05}(23)$の値

p値[＝$P(t \geqq 3.556)$], 有意水準0.05と比較するための値

$t_{0.025}(23)$の値

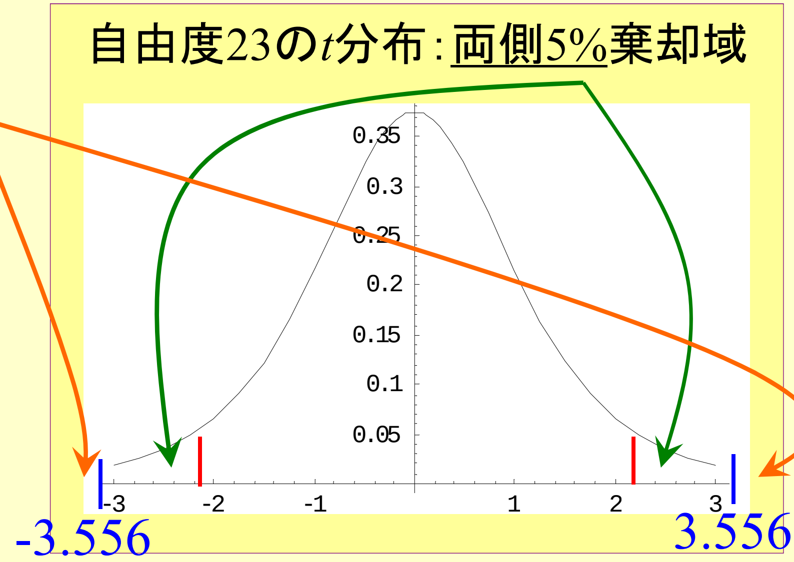
p値<有意水準なら棄却

Coffee Break!

- *p*値とは何か？
  - 統計解析をするソフトウェアでは，結果に*p*値が提示されることが多い
  - 例（再掲）：苗木の生長における2社の肥料

両側5%棄却域： $T < -2.069,\ T > 2.069$ $[t_{0.025}(23)=2.069]$
検定統計量： $T=3.556$
*p*値（両側）： $p=P(t<-3.556,\ t>3.556)=0.002$ $[t_{0.002}(23)=3.556]$

*p*値（両側）
$= 0.002$



有意水準5% $= 0.05 > 0.002 = p$値

有意水準より*p*値の方が小さいので，
帰無仮説が棄却される

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が未知で等しくない $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$）
  - 標本平均の差の標本分布
    - どのように工夫しても，2つの母分散に拠らない統計量を作れない

      ↓
    - 標本平均の差の正確な分布を求められない

      ↓
    - 近似的に分布を求める〔ウェルチの近似法〕

ウェルチの検定

$$\hat{T} = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}} \sim t_\alpha(\nu^*)$$

自由度ν^*のt分布に従う

ただし，ν^*は次のνに最も近い整数 $\nu = \dfrac{\left(s_1^2/m + s_2^2/n\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/m\right)^2}{m-1} + \dfrac{\left(s_2^2/n\right)^2}{n-1}}$

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が未知で等しくない $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$）
  - 例：2つの鉱山から採れる鉱石に含まれる物質の含有量
    各鉱山から採れる鉱石の物質含有量に差があるか？

〔出展：『パソコンによるデータマイニング』p.132〕

第1鉱区	4.9	3.9	4.7	4.3	5.8	4.2	4.4	3.3	5.5	4.0
第2鉱区	5.2	5.0	5.3	6.9	5.0	4.9	4.4	6.5	5.3	

標本平均値＝ 第1鉱区 4.500 第2鉱区 5.389　　不偏分散値＝ 第1鉱区 0.564 第2鉱区 0.636

⇒ 有意水準5%で両側検定

ウェルチの検定

（〔帰無仮説〕$\mu_1 = \mu_2$,〔対立仮説〕$\mu_1 \neq \mu_2$）

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}} = \frac{4.500 - 5.389}{\sqrt{0.564/10 + 0.636/9}} = -2.493$$

$$\nu = \frac{\left(s_1^2/m + s_2^2/n\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/m\right)^2}{m-1} + \dfrac{\left(s_2^2/n\right)^2}{n-1}} = 16.517$$ より，自由度17のt分布を考える

$T = -2.493 < -2.110 = -t_{0.025}(17)$ より，仮説を棄却

2標本検定 two-sample test

- 母平均の差の検定（母分散が未知で等しくない $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$）
  - 例（再掲）：2鉱山から採れる鉱石に含まれる物質の含有量

第1鉱区	4.9	3.9	4.7	4.3	5.8	4.2	4.4	3.3	5.5	4.0
第2鉱区	5.2	5.0	5.3	6.9	5.0	4.9	4.4	6.5	5.3	

標本平均値＝ 第1鉱区 4.500, 第2鉱区 5.389　不偏分散値＝ 第1鉱区 0.564, 第2鉱区 0.636

＜Excelのデータ分析ツールを使用した検定＞

t-検定: 分散が等しくないと仮定した2標本による検定

	第1鉱区	第2鉱区
平均	4.500	5.389
分散	0.564	0.636
観測数	10	9
仮説平均との差異	0	
自由度	17	
t	-2.493	
P(T<=t) 片側	0.012	
t 境界値 片側	1.740	
P(T<=t) 両側	0.023	
t 境界値 両側	2.110	

Excelのデータ分析ツールの結果
「t-検定：分散が等しくないと仮定した2標本による検定」

$\nu=16.517$

Tの値

$t_{0.05}(17)$の値

p値[＝$P(t \leqq -2.493)$], 有意水準0.05と比較するための値

$t_{0.025}(17)$の値

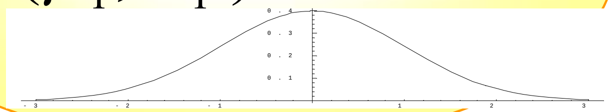
p値<有意水準なら棄却

2標本検定 two-sample test

- <u>母分散の比</u>の検定〔F検定〕
  - 2つの正規母集団について母分散の比の検定

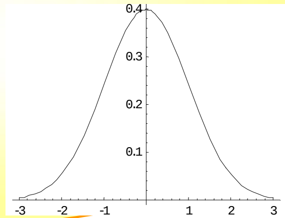
母集団1

$N(\mu_1, \sigma_1^2)$



母集団2

$N(\mu_2, \sigma_2^2)$



m個 無作為抽出 $X_1, X_2, \cdots, X_m$

n個 無作為抽出 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$

標本1

$$\chi_1^2 = \frac{mS_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1)$$

標本2

$$\chi_2^2 = \frac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

両側検定の場合
〔帰無仮説〕$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がない
〔対立仮説〕$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がある

片側検定の場合
〔帰無仮説〕$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がない
〔対立仮説〕$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ←2つの正規母集団の母分散に差がある
$(or\ \ \sigma_1^2 < \sigma_2^2)$

2標本検定 two-sample test

- 母分散の比の検定〔F検定〕
  - F分布とフィッシャーの分散比

$$\begin{cases} \chi_1^2 = \dfrac{mS_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1), \\ \chi_2^2 = \dfrac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1) \end{cases}$$

(ただしχ_1^2とχ_2^2は独立)

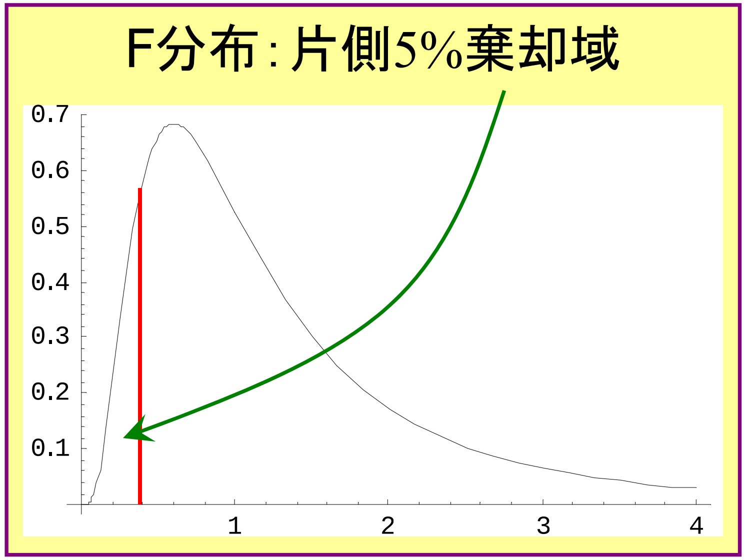
$$F = \frac{\chi_1^2 / m-1}{\chi_2^2 / n-1} = \frac{\dfrac{mS_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ m-1}{\dfrac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ n-1} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(m-1, n-1)$$

フィッシャーの分散比

自由度(m-1, n-1)のF分布に従う

注$\begin{cases} S_1^2, S_2^2 : \text{標本分散} \\ s_1^2, s_2^2 : \text{不偏分散} \end{cases}$

$s_1^2 < s_2^2$ の場合



2標本検定 two-sample test

- 母分散の比の検定〔F検定〕
  - 例題:2つの工作機械の製品バラツキ検査

機械Ⅰ	100.46	100.35	100.36	100.48	100.39	100.72	100.42	100.68	100.86
	100.57	100.59	100.46	100.32	100.46	100.72	100.62		
機械Ⅱ	100.33	100.12	100.35	100.89	100.90	100.31	100.46	100.12	100.43
	100.88	100.28	100.08	100.42	100.11	100.16	100.71	100.26	100.18

不偏分散の値　機械Ⅰ :$s_1^2 = 0.0248$
機械Ⅱ :$s_2^2 = 0.0775$

有意水準5%で片側検定(〔帰無仮説〕$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,〔対立仮説〕$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$)

フィッシャーの分散比

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1 \cdot \frac{0.0247}{0.0775} = 0.319$$

$\wedge$

$$F_{0.95}(15,17) = \frac{1}{F_{0.05}(17,15)} = \frac{1}{2.308} = 0.433$$ より，仮説は棄却

注:棄却域
$F < F_{0.95}(15,17)$

2標本検定 two-sample test

- 母分散の比の検定〔*F*検定〕
  - 例(再掲):2つの工作機械の製品バラツキ検査

機械 I	100.46	100.35	100.36	100.48	100.39	100.72	100.42	100.68	100.86
	100.57	100.59	100.46	100.32	100.46	100.72	100.62		
機械 II	100.33	100.12	100.35	100.89	100.90	100.31	100.46	100.12	100.43
	100.88	100.28	100.08	100.42	100.11	100.16	100.71	100.26	100.18

不偏分散の値　機械 I :$s_1^2 = 0.0248$

機械 II :$s_2^2 = 0.0775$

F-検定: 2 標本を使った分散の検定

Excelのデータ分析ツールの結果
「t-検定:分散が等しくないと仮定した2標本による検定」

	機械 I	機械 II
平均	100.529	100.388
分散	0.02475	0.07752
観測数	16	18
自由度	15	17
観測された分散比	0.319	
P(F<=f) 片側	0.016	
F 境界値 片側	0.422	

*p*値<有意水準なら棄却

*F*の値

*p*値[$=P(t \leqq -2.493)$], 有意水準0.05と比較するための値

$F_{0.95}(17,15)$の値

Coffee Break!

- F分布表で下側F値の求め方

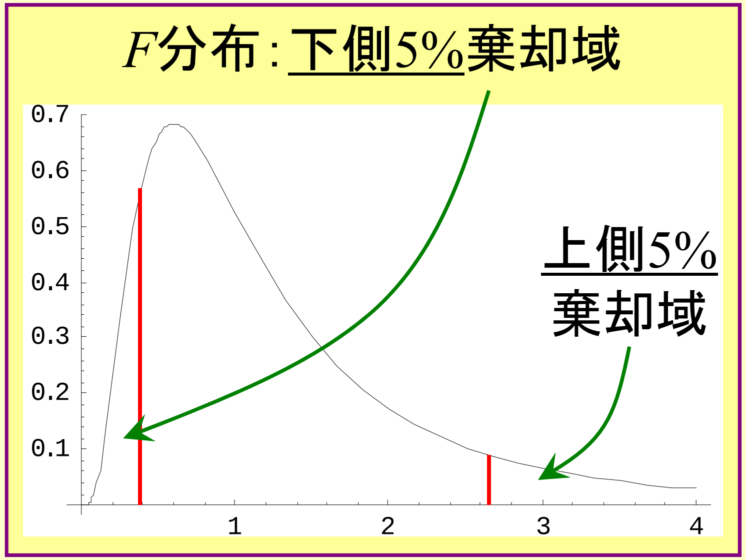
  F分布表には

  $\alpha=0.1,\ 0.05,\ 0.25,\ 0.01,\ 0.005$

  のときの表しかない！

  下側（左側）パーセント点は

  上側（右側）パーセント点の逆数に等しいことを利用



$$F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_{\alpha}(n,m)}$$

注意

  - 例：自由度(10,13)のF分布の下側（左側）5%点は…

$$F_{0.95}(10,13)=\frac{1}{F_{0.05}(13,10)}=\frac{1}{2.671}=0.374$$

参考文献

- 村上雅人「なるほど統計学」海鳴社（2002）
- 東大教養学部統計学教室編 「統計学入門」東大出版会（1991）
  →推定･検定：焼き直し書⇒松原望「入門　統計解析」東京図書（2007）
- 永田靖「統計的方法のしくみ」日科技連（1996）

- 丹慶勝市「図解雑学 統計解析」ナツメ社（2003）
- 高橋信[著]･トレンドプロ[マンガ]「マンガでわかる統計学」オーム社（2004）
- 田久浩志ほか「マンガでわかるナースの統計学」オーム社（2006）

- 鈴木達三･高橋宏一「標本抽出の計画と方法」放送大学（1991）
- 永田靖「サンプルサイズの決め方」朝倉書店（2003）