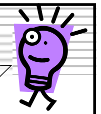
意思決定科学：多目的線形計画法

情報学部　堀田敬介

2012/11/5,Mon.～

多目的計画とは？



制約は全て線形で書けそうだね.
目的は3つあるよ.

- **例題：ダイエット問題**

『なめがやわーるど』では，「神秘ケーキ」「魅惑菓子」「苦渋野菜」「過酸果物」の4つの食べ物と，「だんはっく」「ガルジウム」「ヒタビン」という3つの栄養素と2つの食品含有物「糖分」「ガロリー」が存在する. 4つの食べ物は3つの栄養素と2つの食品含有物を，それぞれ右下表に示す量だけ含む.

	神秘ケーキ	魅惑菓子	苦渋野菜	過酸果物
だんはっく	3	1	4	2
ガルジウム	1	2	2	1
ヒタビン	1	1	2	5
糖分	7	5	3	4
ガロリー	100	350	300	350

『なめがやわーるど』人は，3栄養素を一日に各々最低50, 40, 45は摂取しないと死んでしまう！　同様に，ガロリーは一日最大8000を超えても死んでしまう！！

さて，『なめがやわーるど』人の文教花子さんはダイエットをしたい. 糖分を最小にする食べ物の量と，同時にガロリーも最小にする食べ物の量を知りたい. しかし甘党の花子さんは神秘ケーキと魅惑菓子が大好きで苦渋野菜と過酸果物が嫌いだった. 好きなものはたくさん，嫌いなものはなるべく食べたくない. 各食べ物の文教さんの好き嫌い度は一単位あたり右下表のようになるそうである（数字が大きいほど好きらしい）.

神秘ケーキ	魅惑菓子	苦渋野菜	過酸果物
10	150	−100	−50

さあ，花子さんの3つの目的（糖分最小，ガロリー最小，好物たくさん食べたい）を達成するためには，各食品をどれくらいずつ食べたらよいだろうか？

多目的計画とは？

- **ダイエット問題の定式化**

$$
\begin{aligned}
\min.\ f_1(x) &= 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\
\min.\ f_2(x) &= 100x_1 + 350x_2 + 300x_3 + 350x_4 \\
\max.\ f_3(x) &= 10x_1 + 150x_2 - 100x_3 - 50x_4 \\
s.t.\quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 50 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 40 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 45 \\
& 100x_1 + 350x_2 + 300x_3 + 350x_4 \le 8000 \\
& x_j \ge 0 \ (j = 1, \cdots, 4)
\end{aligned}
$$

どうやって解くの？

参考：多目的計画とは？

一般的な表記

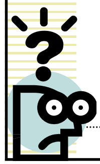
- **多目的線形計画法(Multi-objective LP)**
  - 線形の制約条件のもと，多数の目的・目標が設定され，それらをなるべく満たすように解きたい. 即ち，線形制約条件下で複数の線形目的関数を最大・最小化する解を見つけるという決定問題のモデル.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\max.\ c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\
&\max.\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\
&\quad \vdots \\
&\max.\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kn}x_n
\end{aligned}
\right\} \text{k本の目的関数}
$$

注：簡単のため，目的関数は最大化に揃えてある. このようにしても一般性は失わない.

$$
\left.
\begin{aligned}
s.t.\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \ge 0
\end{aligned}
\right\} \text{m本の線形制約 n個の非負制約}
$$

変数の数は n個



どうやって解くの？　最適解って何？

参考：多目的計画とは？

一般的な表記

- **線形計画法(LP)**
  - 線形の制約条件・目的関数による，量的データに対する決定問題のモデル．目的関数の数は1つ．

$$
\begin{aligned}
\max.\ & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t.\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

1本の目的関数

m本の線形制約
n個の非負制約

変数の数は n個

単体法や内点法で効率的に解ける！

多目的計画とは？

- **ダイエット問題を解く**
  - 目的関数を別々に考えてみる
    - $f_1(\mathbf{x})$（糖分最小）のみを目的とするLP(P_1)を解く
      → 最適解1 $\mathbf{x}_1^*$，その目的関数値 $f_1(\mathbf{x}_1^*)$
    - $f_2(\mathbf{x})$（ガロリー最小）のみを目的とするLP(P_2)を解く
      → 最適解2 $\mathbf{x}_2^*$，その目的関数値 $f_2(\mathbf{x}_2^*)$
    - $f_3(\mathbf{x})$（甘いもの最大）のみを目的とするLP(P_3)を解く
      → 最適解3 $\mathbf{x}_3^*$，その目的関数値 $f_3(\mathbf{x}_3^*)$

⇒ もし $\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_3^*$ なら，即ち，3つの最適解が一致しているなら，それが完全最適解！

⇒ 完全最適解を花子さんに提示して終了

参考：多目的計画とは？

- **多目的線形計画問題(MLP)を解く**
  - 完全最適解 absolutely optimal solution の定義
    - 実行可能解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ が

$$\forall \mathbf{x} \in X,\quad f_p(\mathbf{x}^*) \ge f_p(\mathbf{x}) \quad (p = 1, \cdots, k)$$

を満たすとき，$\mathbf{x}^*$は(MLP)の完全最適解であるという．

  - ダイエット問題では，目的関数が

$$
\begin{aligned}
\min.\ f_1(x) &= 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\
\min.\ f_2(x) &= 100x_1 + 350x_2 + 300x_3 + 350x_4 \\
\max.\ f_3(x) &= 10x_1 + 150x_2 - 100x_3 - 50x_4
\end{aligned}
$$

なので，以下を満たす解 $\mathbf{x}^*$ が完全最適解！

$$
\begin{aligned}
\forall \mathbf{x},\ & f_1(\mathbf{x}) \ge f_1(\mathbf{x}^*), \\
& f_2(\mathbf{x}) \ge f_2(\mathbf{x}^*), \\
& f_3(\mathbf{x}) \le f_3(\mathbf{x}^*).
\end{aligned}
$$

注：不等号の向きに注意．
目的関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は最小化，
目的関数 $f_3(x)$ は最大化

多目的計画とは？

- **ダイエット問題を解く**
  - LP(P_1), (P_2), (P_3)の最適解は…

LP	目的	最適解				目的関数値		
		x1	x2	x3	x4	f1(x)	f2(x)	f3(x)
(P1)	糖分最小	0	0	19.375	1.25	63.125	6250	−2000
(P2)	ガロリー最小	38.75	0	0	1.25	276.25	4312.5	325
(P3)	好度最大	31	14	0	0	287	8000	2410

完全最適解があるならば，それが多目的線形計画問題の最適解となる．
しかし，この例題のように，一般に完全最適解が存在することは稀である．

⇒ 別の，何らかの意味での解を求めないと…

多目的計画とは？

- **多目的線形計画法(MLP)** 表記の簡略化

$$\max.\ f_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{pj} x_j \quad (p=1,\cdots,k)$$

$$\text{s.t.} \quad \boxed{\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \ (i=1,\cdots,m) \\ x_j \ge 0 \ \ (j=1,\cdots,n) \end{array}}$$

$$\begin{array}{ll} \max. & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ & \vdots \\ & c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kn}x_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_1,\ \ x_2,\ \cdots,\ \ x_n \ge 0 \end{array}$$

$$\text{(MP)} \quad \begin{array}{ll} \max. & f_p(\mathbf{x}) \ (p=1,\cdots,k) \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in X \end{array}$$

*k*本の目的関数

*m*本の線形制約
*n*個の非負制約

変数の数は *n*個

「x は実行可能領域 X に入ってるよ」ということ

$$X = \left\{ \mathbf{x} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \ (i=1,\cdots,m),\ x_j \ge 0 \ \ (j=1,\cdots,n) \right\}$$

演習1：MLPの定式化

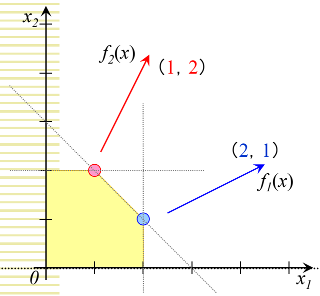
- **以下の問題を多目的線形計画問題として定式化し，各目的関数ごとのLPと見たときの最適解をそれぞれ求めなさい．最適解の求解はcplexやExcelソルバーなどを用いて良い．**
  - 株式会社文教商事の湘南支店では，湘南及び県北の2箇所にそれぞれ営業所を新設する計画がある．
  - 施設新設に必要な初期投資額はほぼ建坪に比例し，付帯設備込みで，1坪あたり湘南営業所で400万円，県北営業所で200万円である．
  - 投資予算額は，両営業所合わせて4億円である．
  - 支店長は，傘下の既存営業所及び各地域の需要動向などを勘案した結果，次のような3種の目標を満足させたいと望んでいる．
    - 目標1：投資総額を投資予算額にできるだけ近づけたい．
    - 目標2：湘南営業所の建坪をできるだけ大きくしたい．
    - 目標3：県北営業所の建坪をできるだけ大きくしたい．

（出展：伏見多美雄他「経営の多目標計画」森北出版(1987)）

多目的線形計画問題の解

- 例題2：

パパは太郎君と次郎君にお小遣い3円をあげた．2人はお菓子を買うことにした．
　せんべい　1円/枚　　ドーナツ　1円/個
お店に行くと，せんべいは2枚，ドーナツは2個あった．
太郎君はせんべいの方がやや好きで，1つあたり効用は（せ，ド）＝（2，1）
次郎君はドーナツの方がやや好きで，1つあたり効用は（せ，ド）＝（1，2）
2人は，それぞれの効用を最大化したいと思っている．

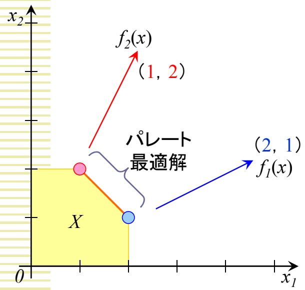


MLP定式化　　$\mathbf{x}=(x_1, x_2)$

$$\begin{array}{ll} \max. & 2x_1 + x_2 \ (= f_1(\mathbf{x})) \\ \max. & x_1 + 2x_2 \ (= f_2(\mathbf{x})) \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leqq 3 \\ & x_1 \qquad \leqq 2 \\ & \qquad x_2 \leqq 2 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

多目的線形計画問題の解

- **<u>パレート最適解(Pareto optimal solution)</u>**
  - ある解 x^* がパレート最適解であるとは，
    太郎君の効用（目的関数$f_1(x)$の値）を小さくせずに次郎君の効用を大きくできず，
    次郎君の効用（目的関数$f_1(x)$の値）を小さくせずに太郎君の効用を大きくできない
    状態にある解のこと



MLP定式化

$$\begin{array}{ll} \max. & 2x_1 + x_2 \ (= f_1(\mathbf{x})) \\ \max. & x_1 + 2x_2 \ (= f_2(\mathbf{x})) \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leqq 3 \\ & x_1 \qquad \leqq 2 \\ & \qquad x_2 \leqq 2 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

多目的線形計画問題の解

$$\max.\ f_p(\mathbf{x})\ \ (p=1,\cdots,k)$$
$$s.t.\quad \mathbf{x}\in X$$

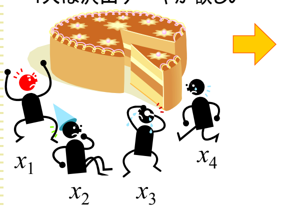
- パレート最適解(Pareto optimal sol.)
  - $x^*\in X$がパレート最適であるとは,

l個の目的のうち，どれか1つを改善しようとすると，必ず犠牲になるものが1つ以上ある状態

$$f_p(\mathbf{x})\geq f_p(\mathbf{x}^*)\ \ (p=1,\cdots,k)$$

で，かつ少なくとも一つは厳密な不等号(>)を満たす$x\in X$が存在しないこと.

ex) ケーキを4人に分配
4人は沢山ケーキが欲しい



$$\begin{aligned}&\max.\ f_1(x)=x_1\\&\max.\ f_2(x)=x_2\\&\max.\ f_3(x)=x_3\\&\max.\ f_4(x)=x_4\\&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\end{aligned}$$

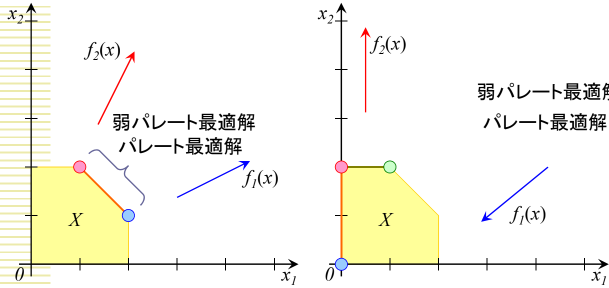
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3,2,2,3)$ はPareto最適？
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (10,0,0,0)$ はPareto最適？
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,2,2,2)$ はPareto最適？
…

多目的線形計画問題の解

- 弱パレート最適解(weakly Pareto optimal solution)
  - $x^*\in X$が弱パレート最適であるとは,

$$f_p(\mathbf{x}) > f_p(\mathbf{x}^*)\ \ (p=1,\cdots,k)$$

を満たす$x\in X$が存在しないこと.

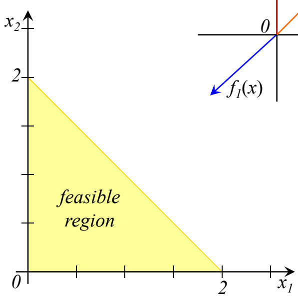


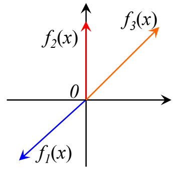
演習2:

- 以下のMLPについて，解空間を図示し，パレート最適解，及び弱パレート最適解を求めよう.

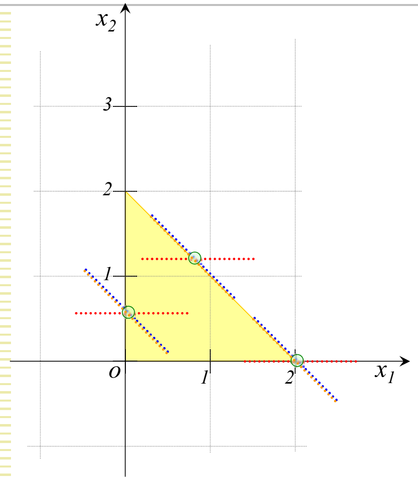
(1)
$$\begin{aligned}&\max.f_1(\mathbf{x})=-x_1-x_2\\&\max.f_2(\mathbf{x})=x_2\\&s.t.\quad x_1+x_2\leq 2\\&\qquad\ \ x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

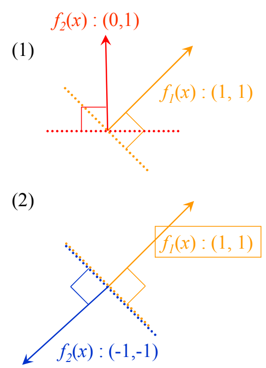
(2)
$$\begin{aligned}&\max.f_1(\mathbf{x})=-x_1-x_2\\&\max.f_3(\mathbf{x})=x_1+x_2\\&s.t.\quad x_1+x_2\leq 2\\&\qquad\ \ x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$





演習2:





多目的線形計画問題の解法

- **多目的計画法と目標計画法**
  - 選好最適化による解法（パレート最適解を目指そう！）
    - 加重平均法　the weighting method
    - 制約化法　the constraint method
    - マキシミン法　the maximin method
  - 満足化による解法（目標値を達成しよう！）
    - 目標計画法　the goal program
  - 多目的単体法　the multiobjective simplex method

多目的線形計画問題の解法

- **加重平均法（the Weighting Method）**
  - 意思決定者の選好により，目的関数に重み付けを行い，その総和を1目的関数として解く.

（MLP）
$$\max.\ f_1(\boldsymbol{x}), \max\ f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, \max.\ f_k(\boldsymbol{x}) \quad s.t.\quad \boldsymbol{x} \in X$$

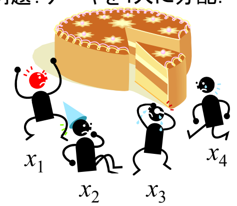
（P(ω)）
$$\max.\ \omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) + \ldots + \omega_k f_k(x) \quad s.t.\quad \boldsymbol{x} \in X$$
$$(\omega_1 \geq 0, \cdots, \omega_k \geq 0)$$

$x^* \in X$が（MLP）のパレート最適解 ⇄ $x^* \in X$がある **ω>0** に対し，（P(ω)）の最適解

目的関数・制約：凸性

多目的線形計画問題の解法

- **加重平均法**
  - 例題：ケーキを4人に分配．4人は沢山の量のケーキが欲しい



〔MLP〕
$$\begin{aligned} &\max.\ f_1(x) = x_1 \\ &\max.\ f_2(x) = x_2 \\ &\max.\ f_3(x) = x_3 \\ &\max.\ f_4(x) = x_4 \\ &\text{s.t. } x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{aligned}$$

例えば，$\omega_1 = 0.5, \omega_2 = 0.3, \omega_3 = 0.1, \omega_4 = 0.1$ とすれば

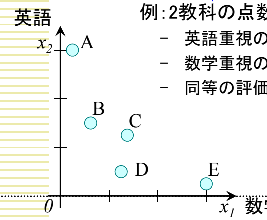
〔LP〕
$$\begin{aligned} &\max.\ 0.5x_1+0.3x_2+0.1x_3+0.1x_4 \\ &\text{s.t. } x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{aligned}$$

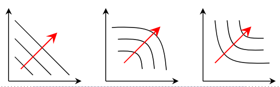
Pareto Opt. Sol.
$\boldsymbol{x} = (10, 0, 0, 0)$

多目的線形計画問題の解法

- **加重平均法**
  - 特徴
    - 重みが決まれば適用は簡単
  - 問題点
    - 重みω=(ω_1,ω_2)をどう決定するか？　そもそも事前に決定できるか？
    - 意思決定者の価値基準にあった解を出せるとは限らない.
      （実行可能解集合が非凸のとき，線形加重和は不適切）→乗法，maximin
    - 単体法では端点解しか出せない．→2目的なら連続変形法など

例：2教科の点数による5人の学生の順位
- 英語重視の評価 → Aくん(100,5)が1番　加重平均の例）ω_1=5,ω_2=1
- 数学重視の評価 → Eくん(5,100)が1番　加重平均の例）ω_1=1,ω_2=5
- 同等の評価 → Cくん(55,55)が1番　加重平均の例）ω_1=1,ω_2=1





様々な評価法

多目的線形計画問題の解法

- **制約化法(the Constraint Method)**
  - 目的関数を一つを除き，境界値を設定して制約条件にして解く．

(MLP)
$$\begin{aligned}&\max.\ f_p(\boldsymbol{x})\ \ (p=1,\cdots,k)\\ &s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X\end{aligned}$$

q番目の目的関数だけを目的として残し，残りは境界条件ε_kを設定して制約に入れる．

(P(ε))
$$\begin{aligned}&\max.\ f_q(\boldsymbol{x})\\ &s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X\\ &\qquad f_p(\boldsymbol{x})\ge\varepsilon_p\ \ (p\ne q)\end{aligned}$$

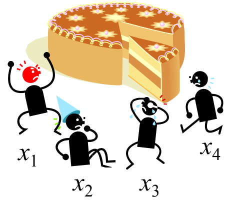
一意でない場合弱パレート最適解

$x^*\in X$が(MLP)のパレート最適解 ⟸ $x^*\in X$があるε$_p$に対し，(P(ε))の一意最適解

$x^*\in X$が(MLP)のパレート最適解 ⟹ $x^*\in X$があるε$_p$に対し，(P(ε))の最適解

多目的線形計画問題の解法

- **制約化法**
  - 例題：ケーキを4人に分配．4人は沢山の量のケーキが欲しい



〔MLP〕
$$\begin{aligned}&\max.\ f_1(x)=x_1\\ &\max.\ f_2(x)=x_2\\ &\max.\ f_3(x)=x_3\\ &\max.\ f_4(x)=x_4\\ &\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\ &\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\end{aligned}$$

例えば，目的関数としてf_1を残し，$\varepsilon_2=2,\varepsilon_3=3,\varepsilon_4=2$ とすれば

〔LP〕
$$\begin{aligned}&\max.\ x_1\\ &\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\ &\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\\ &\qquad x_2\geqq 2,\ x_3\geqq 3,\ x_4\geqq 2\end{aligned}$$

Pareto Opt. Sol.
$\boldsymbol{x}=(3,2,3,2)$

多目的線形計画問題の解法

- **制約化法 （εの取り方について，ある一つの方法）**
  - ペイオフ表(pay-off table)を利用する．

(MLP)
$$\begin{aligned}&\max.\ f_p(\boldsymbol{x})\ \ (p=1,\cdots,k)\\ &s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X\end{aligned}$$
⟹ (LP$_p$)
$$\begin{aligned}&\max.\ f_p(\boldsymbol{x})\\ &s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X\end{aligned}$$
$(p=1,\cdots,k)$

$\boldsymbol{x}_1^*,\boldsymbol{x}_2^*,\cdots,\boldsymbol{x}_k^*$ k個の最適解

	$f_1(\boldsymbol{x})$	$f_2(\boldsymbol{x})$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{x}_1^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_1^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_1^*)$
$\boldsymbol{x}_2^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_2^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_2^*)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\boldsymbol{x}_k^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_k^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_k^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_k^*)$
max.	$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_k^*)$
min.	L_1	L_2	$\cdots$	L_k

$L_p\le f_p(\boldsymbol{x})\le f_p(\boldsymbol{x}_p^*)$ より

$$\varepsilon_p := L_p+\frac{t}{r-1}\left(f_p(\boldsymbol{x}_p^*)-L_p\right)$$
$$(t=0,1,\cdots,r-1)$$

全てのtについて(P(ε))を解く

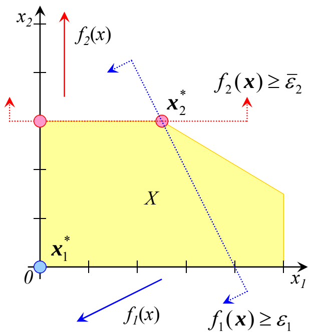
多目的線形計画問題の解法

- **制約化法**
  - 例題：

$$\begin{aligned}&\max.\ f_1(\boldsymbol{x})\\ &\max.\ f_2(\boldsymbol{x})\\ &s.t.\ \ \boldsymbol{x}\in X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max.\ f_1(\boldsymbol{x})\\ &s.t.\ \ \boldsymbol{x}\in X\end{aligned}\quad \boldsymbol{x}_1^*$$

$$\begin{aligned}&\max.\ f_2(\boldsymbol{x})\\ &s.t.\ \ \boldsymbol{x}\in X\end{aligned}\quad \boldsymbol{x}_2^*$$



pay-off table

$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_1^*)$
$f_1(\boldsymbol{x}_2^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$

the Constrained Method

$$\begin{aligned}&\max.\ f_2(\boldsymbol{x})\\ &s.t.\ \ \boldsymbol{x}\in X\\ &\qquad f_1(\boldsymbol{x})\ge\varepsilon_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max.\ f_1(\boldsymbol{x})\\ &s.t.\ \ \boldsymbol{x}\in X\\ &\qquad f_2(\boldsymbol{x})\ge\bar{\varepsilon}_2\end{aligned}$$

多目的線形計画問題の解法

- **マキシミン法（the maximin method）**
  - 目的関数をmaximinにして解く.

注：(MLP)が最小化問題なら*minimax*

(MLP)
$$\max.\ f_p(\mathbf{x})\ \ (p=1,\cdots,k)\qquad s.t.\ \ \mathbf{x}\in X$$

⇩

$$\max.\min.\{f_1(\mathbf{x}),\cdots,f_k(\mathbf{x})\}\qquad s.t.\ \ \mathbf{x}\in X$$

⇨

(Pm)　LPだよ
$$\max.\ v\qquad s.t.\ \ \mathbf{x}\in X,\quad f_p(\mathbf{x})\ge v\ \ (p=1,\cdots,k)$$

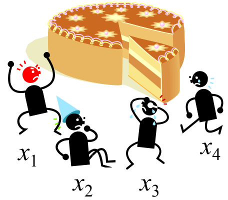
一意でない場合弱パレート最適解

$x^*\in X$が(MLP)のパレート最適解 ⇐ $x^*\in X$が(Pm)の一意最適解

$x^*\in X$が(MLP)のパレート最適解 ⇒ $x^*\in X$が(Pm)の最適解

多目的線形計画問題の解法

- **マキシミン法**
  - 例題：ケーキを4人に分配．4人は沢山の量のケーキが欲しい



〔MLP〕
$$\begin{aligned}&\max.\ f_1(x)=x_1\\&\max.\ f_2(x)=x_2\\&\max.\ f_3(x)=x_3\\&\max.\ f_4(x)=x_4\\&\text{s.t. } x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\end{aligned}$$

〔*〕
$$\begin{aligned}&\max\ \min\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\\&\text{s.t. } x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\end{aligned}$$

〔LP〕
$$\begin{aligned}&\max\ v\\&\text{s.t. } x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\\&\qquad x_1\geqq v,\ x_2\geqq v,\ x_3\geqq v,\ x_4\geqq v\end{aligned}$$

Pareto Opt. Sol.
$\mathbf{x}=(2.5, 2.5, 2.5, 2.5)$

多目的線形計画問題の解法

- **補足：一意最適解でない場合のパレート最適性の判定**
  - 最適解x^*の一意性が保証されない場合，x^*がもとの問題(MLP)のパレート最適解であるかどうかをテストする（以下の問題を解く）

$$\begin{aligned}&\max.\ \sum_{p=1}^{k}\varepsilon_p\\&s.t.\ \ f_p(\mathbf{x})-\varepsilon_p=f_p(\mathbf{x}^*)\ \ (p=1,\cdots,k)\\&\qquad \varepsilon_p\ge 0\qquad\qquad\qquad (p=1,\cdots,k)\\&\qquad \mathbf{x}\in X\end{aligned}$$

実行可能解xに対し，$f_p(x^*)$が最大ならば，$\varepsilon_p=0$

⇨ そうでなければ，あるpについて他の目的を犠牲にせずに$f_p(x)$をもっと大きくできる！

上記テスト問題の最適解 $\hat{x},\hat{\varepsilon}$ について，
(1) $\hat{\varepsilon}=0$ ならば，x^*は(MLP)のパレート最適解
(2) $\hat{\varepsilon}\ne 0$ ならば，$\hat{x}$ が(MLP)のパレート最適解

多目的線形計画問題の解法

Charnes-Cooper(1961)

- **目標計画法　(goal program: goal attainment)**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に目標値 $g_p{}^*$ を設定し，目標値との乖離を最小化．

(MLP)
$$\max.\ f_p(\mathbf{x})\ \ (p=1,\cdots,k)\qquad s.t.\ \ \mathbf{x}\in X$$

⇩

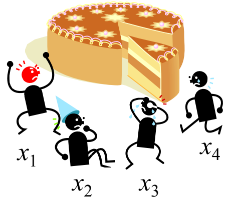
$$\begin{cases}f_p(\mathbf{x})\le g_p^* & \cdots\ \text{目標値 } g_p{}^*\text{より以下にしたい場合}\\ f_p(\mathbf{x})\ge g_p^* & \cdots\ \text{目標値 } g_p{}^*\text{より以上にしたい場合}\\ f_p(\mathbf{x})= g_p^* & \cdots\ \text{目標値 } g_p{}^*\text{に等しくしたい場合}\end{cases}$$

⇩

$$\min.\sum_{p=1}^{k}\left|f_p(\mathbf{x})-g_p^*\right|$$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 例題：ケーキを4人に分配．4人は沢山の量のケーキが欲しい



〔MLP〕
$$\begin{aligned}&\max.\ f_1(x)=x_1\\&\max.\ f_2(x)=x_2\\&\max.\ f_3(x)=x_3\\&\max.\ f_4(x)=x_4\\&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\end{aligned}$$

例えば，目標値をそれぞれ$(g_1, g_2, g_3, g_4)=(2, 2, 3, 2)$とすれば

〔LP〕
$$\begin{aligned}&\min.\ |x_1-2|+|x_2-2|+|x_3-3|+|x_4-2|\\&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0\end{aligned}$$

〔LP〕
$$\begin{aligned}&\min.\ t_1+t_2+t_3+t_4 && -t_1\leqq x_1-2\leqq t_1\\&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10 && -t_2\leqq x_2-2\leqq t_2\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0 && -t_3\leqq x_3-3\leqq t_3\\&\qquad t_1,t_2,t_3,t_4\geqq 0 && -t_4\leqq x_4-2\leqq t_4\end{aligned}$$

Opt. Sol. $\boldsymbol{x}=(2, 2, 3, 2)$

注）Pareto Opt. じゃないよ

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 各目的関数 $f_p(\boldsymbol{x})$ に目標値 $g_p{}^*$ を設定し，目標値との乖離を最小化．

$$\min.\sum_{p=1}^{k}\left|f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right|$$

$$d_p^+ := \frac{1}{2}\left\{\left|f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right|+\left(f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right)\right\}$$
$$d_p^- := \frac{1}{2}\left\{\left|f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right|-\left(f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right)\right\}$$

超過達成（over-attainment）

$$d_p^+=\begin{cases}f_p(\boldsymbol{x})-g_p^* & \text{if } f_p(\boldsymbol{x})\ge g_p^*\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$
$$d_p^-=\begin{cases}-f_p(\boldsymbol{x})+g_p^* & \text{if } f_p(\boldsymbol{x})\le g_p^*\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

不足達成（under-attainment）

$$\begin{aligned}&\forall p,\ d_p^+ + d_p^- = \left|f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right|\\&\forall p,\ d_p^+ - d_p^- = f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\\&\forall p,\ d_p^+\cdot d_p^-=0,\qquad d_p^+,d_p^-\ge 0\end{aligned}$$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に目標値 $g_p{}^*$ を設定し，目標値との乖離を最小化．

(MLP)
$$\begin{aligned}&\max.\ f_p(\boldsymbol{x})\ \ (p=1,\cdots,k)\\&s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X\end{aligned}$$

$$g_p^*\ \ (p=1,\cdots,k)$$

(GA)
$$\begin{aligned}&\min.\ \sum_{p=1}^{k}(d_p^+ + d_p^-)\\&s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X\\&\qquad f_p(\boldsymbol{x})-d_p^+ + d_p^- = g_p^*\ \ (p=1,\cdots,k)\\&\qquad d_p^+,\ d_p^-\ge 0\end{aligned}$$

$\forall p,\ d_p^+\cdot d_p^-=0$

は，満たされるので，制約から省ける．

LPとして解ける！

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 多目標の付順と加重

$$\min.\ \sum_{p=1}^{k}(d_p^+ + d_p^-)$$

$$f_p(\boldsymbol{x})-d_p^+ + d_p^- = g_p^*$$

目的関数への付加変数

(1) 目標値をちょうど達成することが望ましい ⇒ $d_p^+ + d_p^-$

(2) 目標値の超過は困るが，不足は構わない ⇒ d_p^+

(3) 目標値の不足は困るが，超過は構わない ⇒ d_p^-

(4) 目標値に関わりなく最大・最小 ⇒ $d_p^+ - d_p^-$, or $-d_p^+ + d_p^-$

$d_p^+ + d_p^-$ ⇒ $\left|f_p(x)-g_p^*\right|$ を最小化

d_p^+ ⇒ $f_p(x)>g_p^*$ である限り，$f_p(x)-g_p^*$ を最小化

d_p^- ⇒ $f_p(x)<g_p^*$ である限り，$g_p^*-f_p(x)$ を最小化

$d_p^+ - d_p^-$ ⇒ $f_p(x)$ を最小化

$-d_p^+ + d_p^-$ ⇒ $f_p(x)$ を最大化

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法**
  - 例題：

$$
\begin{aligned}
&\max.\ f_1(x) = \ \ 2x_1 - 5x_2 \\
&\max.\ f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \quad 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad 3x_1 + \ \ x_2 \le 15 \\
&\qquad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&\qquad x_1,\quad x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\min.(d_1^+ + d_1^-) + (d_2^+ + d_2^-) \\
&s.t.\ \ 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad 3x_1 + \ \ x_2 \le 15 \\
&\qquad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&f_1(x) = \ \ 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^* \\
&f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^* \\
&x_1,\quad x_1, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \ge 0
\end{aligned}
$$

多目的線形計画問題の解法

- **補足：目標計画法**
  - 目標値との乖離最小化において，目的関数のスケールが大幅に違う場合

$$\min.\sum_{p=1}^{k}\left|f_p(\mathbf{x}) - g_p^*\right|$$

例：

$$
\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}) &= 1234567x_1 + 2145915x_2 \quad & g_1^* &= 3380482 \\
f_2(\mathbf{x}) &= 0.521x_1 + 0.034x_2 & g_2^* &= 0.086
\end{aligned}
$$

相対偏差を使う方がよい．例えば，目標値を最適値とすると，

$$\min.\sum_{p=1}^{k}\frac{\left|f_p(\mathbf{x}) - g_p^*\right|}{\left|g_p^*\right|}$$

例：

$$\min.\frac{|f_1(\mathbf{x}) - 3380482|}{|3380482|} + \frac{|f_2(\mathbf{x}) - 0.086|}{|0.086|}$$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（多目標付順・加重）**
  - 各目的関数 $f_k(x)$ に目標値 $f_k{}^*$ を設定し，目標値との乖離を最小化．

（GA）

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \sum_{p=1}^{k}(d_p^+ + d_p^-) \\
&s.t.\quad \mathbf{x} \in X \\
&\qquad f_p(\mathbf{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \ \ (p = 1, \cdots, k) \\
&\qquad d_p^+,\ d_p^- \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$\min.\sum_{p=1}^{k} P_p(\omega_p^+ d_p^+ + \omega_p^- d_p^-)$$

☆補助変数個々の重み $\omega_p^+, \omega_p^-\ \ (p = 1, \cdots, k)$

☆目的関数の絶対優先順位係数(primitive priority factor) $P_p\ \ (p = 1, \cdots, k)$

$P_i, P_j (i < j)$ に対し，どんな自然数 n についても $nP_j \ge P_i$ とはならない．

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（多目標付順・加重）**
  - 例題：

$$
\begin{aligned}
&\max.\ f_1(x) = \ \ 2x_1 - 5x_2 \\
&\max.\ f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \quad 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad 3x_1 + \ \ x_2 \le 15 \\
&\qquad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&\qquad x_1,\quad x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\min.P_1(\omega_1^+ d_1^+ + \omega_1^- d_1^-) + P_2(\omega_2^+ d_2^+ + \omega_2^- d_2^-) \\
&s.t.\ \ 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad 3x_1 + \ \ x_2 \le 15 \\
&\qquad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&f_1(x) = \ \ 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^* \\
&f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^* \\
&x_1,\quad x_1, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \ge 0
\end{aligned}
$$

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に希求水準 α_p を設定し，目標値との乖離を最小化．

$$(\mathrm{MLP})\quad \begin{array}{l} \max.\ f_p(\mathbf{x})\ \ (p=1,\cdots,k) \\ s.t.\quad \mathbf{x}\in X \end{array}$$

$\forall p,\ f_p(\mathbf{x})\geq \alpha_p$ を満たす$\mathbf{x}$を求めることで満足しよう！

$$(\mathrm{MP}_p)\quad \begin{array}{l} \max.\ f_p(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad \mathbf{x}\in X \\ \qquad f_q(\mathbf{x})\geq \alpha_q\ \ (q\in\{1,\cdots,k\}/\{p\}) \end{array}\quad (p=1,\cdots,k)$$

k個の問題

⇨ それぞれ最適値 $f_p{}^*$ を導出

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 各目的関数 $f_p(x)$ に希求水準 α_p を設定し，目標値との乖離を最小化．

$$(\mathrm{MP}_p)\quad \begin{array}{l} \max.\ f_p(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad \mathbf{x}\in X \\ \qquad f_q(\mathbf{x})\geq \alpha_q\ \ (q\in\{1,\cdots,k\}/\{p\}) \end{array}\quad (p=1,\cdots,k)$$

⇨ k個の最適値 $f_p{}^*$

☆ $\exists p,\ f_p^*<\alpha_p$ なら，その希求水準の要求が強すぎるので緩和し，全ての問題（MP_p）を解き直す．

☆ $\forall p,\ f_p^*\geq \alpha_p$ なら，全ての希求水準を満たしている

即ち

$\forall p,\ f_p(x)\geq \alpha_p$ を満たすxが（1つ以上）存在し，かつ
これを満たしながら，各目的の個々の最適値がわかっている状態

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**

本質的に
制約化法と同じ

$\forall p,\ f_p^*\geq \alpha_p$ なら，全ての希求水準を満たしている

しかし

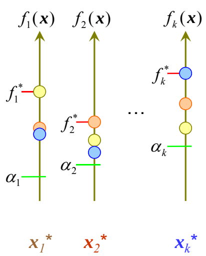
現在得られている解のどれかが「最良」とは限らない！

もっと良い解を見つけよう！

$\theta\in(0,1)$ について以下の不等式系を考える．

$$\begin{cases} f_1(x)\geq(1-\theta)f_1^*+\theta\alpha_1 \\ \quad\vdots \\ f_k(x)\geq(1-\theta)f_k^*+\theta\alpha_k \end{cases}$$

実行可能な中で，最大のθを見つけたい！



➢ θ=1のとき，実行可能解が存在．
➢ θ=0で実行可能なら，完全最適解が存在．

あるθに対し，実行可能かどうかは単体法の *Phase I* で判定可能

多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**

$q:=1,\theta:=\hat{\theta}$ とし，$\hat{\theta}$ に対応する実行可能解を$\mathbf{x}_{q\text{-}1}$とする．

θ^*の近似値

$$\begin{array}{l} \max.f_p(\mathbf{x}) \\ \quad s.t.f_q(\mathbf{x})\geq f_q(\mathbf{x}^{q-1}),q\in\{1,\cdots,k\}/\{p\} \\ \qquad \mathbf{x}\in X \end{array}$$

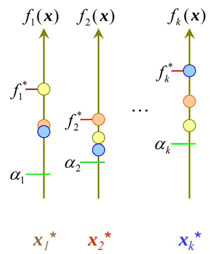
を解き，最適解を$\mathbf{x}^q$とする．
q=k なら終了（ $\mathbf{x}^q$が（MLP）の最適解）
そうでなければ，q:=q+1として繰返し．

$\hat{\theta}$ は，k 個の解$\mathbf{x}_1{}^*,\ldots,\mathbf{x}_k{}^*$について

$$\hat{\theta}:=\min_{p\in\{1,\cdots,k\}}\left\{\frac{\min_{l\in\{1,\cdots,k\}}\{f_p(x_l^*)\}-\alpha_p}{f_p^*-\alpha_p}\right\}$$

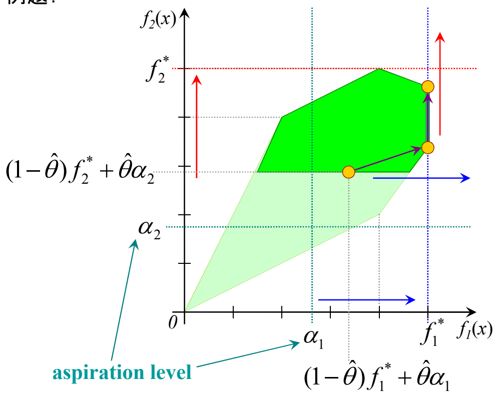
としてもよいし，簡単に1で始めても良い．

$$f_p(x)\geq(1-\theta)f_p^*+\theta\alpha_p$$



多目的線形計画問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 例題：



多目的線形計画問題の解法

M.Zeleny(1974)

- **多目的単体法（the multiobjective simplex method）**
  - 通常の単体法を(MLP)用に素直に拡張
    - 多目的単体表（multiobjective simplex tableau）

$$
\begin{array}{cc|cccc|cccc|c}
 & & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{x_{m+1} \quad x_{m+2} \quad \cdots \quad x_n}^{\text{非基底}}} & \\
\hline
\text{基底} & x_1 & 1 & & & & \bar{a}_{1,m+1} & \bar{a}_{1,m+2} & \cdots & \bar{a}_{2,n} & \bar{b}_1 \\
 & x_2 & & 1 & & & \bar{a}_{2,m+1} & \bar{a}_{2,m+2} & \cdots & \bar{a}_{2,n} & \bar{b}_2 \\
 & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & x_m & & & & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \bar{a}_{m,m+2} & \cdots & \bar{a}_{m,n} & \bar{b}_m \\
\hline
\text{目的関数} & -z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{1,m+1} & \bar{c}_{1,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} & -\bar{z}_1 \\
 & -z_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{2,m+1} & \bar{c}_{2,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} & -\bar{z}_2 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & -z_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{l,m+1} & \bar{c}_{l,m+2} & \cdots & \bar{c}_{l,n} & -\bar{z}_m \\
\hline
\end{array}
$$

非基底 j に対し，

$$\bar{c}_{kj} = c_{kj} - \sum_{r=1}^{m} c_{kr}\bar{a}_{rj}$$

目的関数値は

$$z_k = \bar{z}_k = \sum_{r=1}^{m} c_{kr}x_r = \sum_{r=1}^{m} c_{kr}\bar{b}_r$$

k番目の目的 $-z_k$ $\quad \boxed{\bar{c}_{k,m+1} \ \le 0 \quad \bar{c}_{k,m+2} \ \le 0 \quad \cdots \quad \bar{c}_{k,n} \ \le 0}$ ⇨ $f_k(\boldsymbol{x})$ 最小

$< 0 \quad < 0 \quad \cdots \quad < 0$ ⇨ パレート最適

多目的線形計画問題の解法

- **多目的単体法（the multiobjective simplex method）**

非基底 j に対する ratio test $\theta_j = \min_{\bar{a}_{ij}>0} \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$

今，ある実行可能基底解 $\bar{x}$ その目的関数値 $\bar{z}$ $\xrightarrow[\text{を基底に}]{\text{非基底 } x_j}$ 新しい実行可能基底解 $\bar{x}^*$ その目的関数値 $\bar{z}^*$

⇨ $\bar{\boldsymbol{z}}^* = \bar{\boldsymbol{z}} + \theta_j\bar{\boldsymbol{c}}_j \quad \left\langle \bar{\boldsymbol{c}}_j = (\bar{c}_{1j}, \cdots, \bar{c}_{lj})^T \right\rangle$

$$
\begin{array}{cccc}
\bar{c}_{1,m+1} & \bar{c}_{1,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} \\
\bar{c}_{2,m+1} & \bar{c}_{2,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\bar{c}_{l,m+1} & \bar{c}_{l,m+2} & \cdots & \bar{c}_{l,n}
\end{array}
$$

実行可能基底解 $\bar{x}$，ある非基底 j に対し $\theta_j > 0$ であるとき
（1）$\bar{\boldsymbol{c}}_j \ge \boldsymbol{0}$ ならば，$\bar{x}$ はパレート最適解ではない
（2）$\bar{\boldsymbol{c}}_j \le \boldsymbol{0}$ ならば，$\bar{x}^*$ はパレート最適解ではない．

実行可能基底解 $\bar{x}$ に対し，$\theta_r\bar{\boldsymbol{c}}_r \ge \theta_j\bar{\boldsymbol{c}}_j$ $(r \ne j)$ を満たす非基底列 r,j が存在するとき，列 r の非基底変数を基底に入れて得られる実行可能基底解はパレート最適解にはならない

参考文献

- 坂和正敏「線形システムの最適化」森北出版(1984)
- 坂和正敏「離散システムの最適化」森北出版(2000)
- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 中山弘隆・谷野哲三「多目的計画法の理論と応用」コロナ社(1994)
- 児玉正憲「多目的意思決定と経済分析」牧野書店(1996)

- M. Zeleny ``Linear Multiobjective Programming'' Springer-Verlag, 1974
- Jared L. Cohon ``Multiobjective Programming and Planning'' Academic Press, 1978