意思決定科学：ゲーム理論1

情報学部　堀田敬介

2013/11/15,Fri.～

Contents

ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた．
2人に均等に与えたいのだが，2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い，けんかになる．

仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

ケーキを仲良く

- **You Cut, I Choose !** (**One divides, the other chooses.**)
  - Bobにケーキを切らせ，Carolにケーキを選ばせる

ただし，これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」！
(Bobにどのように切らせるかの指定はない．Bobは自分の意思で切る)
(Carolにどのように選ばせるかの指定はない．Carolは自分の意思で選ぶ)

- 解は…
  - Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

ケーキを仲良く

- 「解」が持ってほしい2つの性質
  - **proportionality** (An allocation is proportional.)
    - Each thinks he or she received a portion that has size or value of **at least 1/n**.
  - **envy-freeness** (An allocation is envy-free.)
    - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, **does not envy** any other player.

プレイヤーが2人の場合はこの2つの概念は等価

ケーキを仲良く（3人いたら？）

H. Steinhaus, 1948

- The Steinhaus' **lone-divider procedure** (3 players)
  1. Bob がケーキを3分割するように切る（切り方は自由であることに注意）
  2-1. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘
  2-2. Ted も Carol と同様のことを行う.
  （CarolもTedも，少なくとも1つは acceptable であることに注意）
  3. case1: Carol (or Ted) が2個以上acceptable cake がある場合
  Ted→Carol→Bob (or Carol→Ted→Bob) の順にケーキを取る
  case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個の場合
  Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて，残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う.

def.) call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least 1/3 of the cake.

ケーキを仲良く（3人いたら？）

- The Steinhaus' **loan-divider procedure** (3 playes)
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - Bobはちょうど1/3(とBobが思う) piece に切る
    - Carol, Ted は acceptable cake を取る
  - envy-free ではない
    - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが，Carol は Ted を妬む可能性がある.（Tedが，彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので）
    - case2: Carol, Ted は誰も妬まないが，Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある.（Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合，2人のいずれかが1/3以上(とBobが思う) cake を得るので）

ケーキを仲良く（n人いたら？）

H.W. Kuhn, 1967

- Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes) を n人版に拡張
  - Frobenius & Konig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム）
  - 4人版は Steinhaus も気づいていたらしい

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- **The Banach-Knaster last-diminisher procedure**
  - Steinhaus が 1948年に2人（学生，ポーランド人）のアイデアを論文の形で発表
- ……

ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- The Banach-Knaster **last-diminisher procedure**
  - The partners being ranged **A**,**B**,**C**,…,**N**.
  - **A** cuts from the cake an arbitrary part.
  - **B** has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off.
  - Whatever he does, **C** has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice,
  - and so on up to **N**.
  - The rule obliges the ``**last-diminisher**" to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of , the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake.
  - After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder.

(from ``Fair Division", p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

- The last-dimisher procedure
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - 切るプレイヤーがちょうど1/nと考えるpiece に切ること
  - **envy-freeではない**
    - 理由：例えば，ゲームを先に抜けたプレイヤーAが，ある段階で切られたケーキが1/nより大きい（とAが思う）ときでもそれを阻止できない．結果として1/nより大きいケーキが誰か（例えばB）に行く（とAが思う）ので，AはBを妬む．

ゲーム理論とは何か？

- ゲーム的状況　game situations
  - 複数の意思決定主体（プレイヤー）が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ゲーム理論　game theory
  - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日（火）取得の情報

ゲーム理論とは何か？

- **プレイヤー**　player
  - 意思決定し，行動する主体．（2人，3人，…，n人，…，∞）
    - 例：個人，複数の個人から成る組織，政党，国家，…

プレイヤーの集合
$N=\{1, 2, \ldots, n\}$

- **戦略**　strategy
  - プレイヤーが取りうる行動．（有限，無限）

プレイヤーiの戦略集合
$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\} \quad (i\in N)$

- **利得と利得関数**　payoff
  - 各プレイヤーの戦略決定後，ゲームは終了し，結果が出る．結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値．利得 payoff，効用 utility．

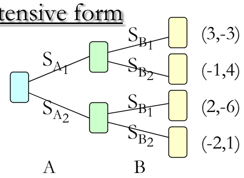
プレイヤーiの利得関数
$f_i : S_1 \times S_2 \ldots \times S_n \to R \quad (i\in N)$

ゲームの定義
$G=(N,\{S_i\}_{i\in N},\{f_i\}_{i\in N})$

各プレイヤーは**自己の利得最大化**を目指し，
Gは全てのプレイヤーの**共有知識**とする

ゲーム理論とは何か？

- ゲームの表現形式
  - **展開形**　extensive form



  - **戦略形**　strategic form，標準形　normal form

A＼B	S_{B_1}	S_{B_2}
S_{A_1}	3	1
S_{A_2}	-4	6

ゲーム理論とは何か？

- **非協力ゲームと協力ゲーム**
  - 各プレイヤーの戦略決定における前提

1. プレイヤー間には，各プレイヤーがとるべき戦略について，強制力のある取り決めは存在しない．

拘束的合意が成立しない → 非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に，とるべき戦略についての合意が成り立ち，それに基づいて戦略決定する．

拘束的合意が成立 → 協力ゲーム

2人非協力零和ゲーム

- Example1：
  - 2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」をしている
  - プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う
  - 2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち，異なるならBさんの勝ち
  - 表を出して勝ったら相手から2円貰い，裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$N=\{1, 2\}$

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}$,　$(i \in N)$

$S_1=\{$表, 裏$\}$,　$S_2=\{$表, 裏$\}$

$f_i : S_1 \times S_2 \rightarrow R$,　$(i \in N)$

f_1(表, 表) = 2 ＋ f_2(表, 表) = -2 =0
f_1(表, 裏) = -1 ＋ f_2(表, 裏) = 1 =0
f_1(裏, 表) = -2 ＋ f_2(裏, 表) = 2 =0
f_1(裏, 裏) = 1 ＋ f_2(裏, 裏) = -1 =0

A君の利得表

A＼B	表	裏
表	2	-1
裏	-2	1

Bさんの利得表

A＼B	表	裏
表	-2	1
裏	2	-1

2人非協力零和ゲーム

- Example2：
  - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理　minimax principle
  - Example2でプレイヤーAの思考　最大化プレイヤー
    - 戦略s_{A_1}を取ったときの最悪の事態は
      min(-2, 4, -1) = -2（プレイヤーBが戦略s_{B_1}を取る）
    - 戦略s_{A_2}を取ったときの最悪の事態は
      min(2, 2, 1) = 1　（プレイヤーBが戦略s_{B_3}を取る）
    - 戦略s_{A_3}を取ったときの最悪の事態は
      min(4, -3, 0) = -3（プレイヤーBが戦略s_{B_2}を取る）

⇨ 戦略s_{A_2}を取る（最悪でも利得1が保証される）

もっと良い利得を得ることができるのか？

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理　minimax principle
  - Example2でプレイヤーAがBの立場で思考
    - Bが戦略s_{B_1}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_3}を取る
      max(-2, 2, 4) = 4
    - Bが戦略s_{B_2}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_1}を取る
      max(4, 2, -3) = 4
    - Bが戦略s_{B_3}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_2}を取る
      max(-1, 1, 0) = 1

⇨ 戦略s_{B_3}を取る（最悪でも損失1で済む）

Aは戦略s_{A_2}を取るとき，利得1を得られ，
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる．

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス原理
  - Example2：

保証水準 security level

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-2	4	-1	-2	
s_{A_2}	2	2	1	1	1
s_{A_3}	4	-3	0	-3	
max	4	4	1		
min		1			

保証水準 security level

マキシミン値 maximin value
$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

マキシミン原理 maximin principle〔最大化プレイヤーの行動原理〕

ミニマックス値 minimax value
$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス原理 minimax principle〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$v_1 = v_2$

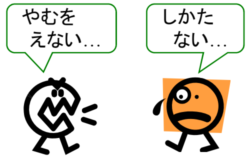
2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- 均衡点とゲームの値
  - 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると，どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！
⇩
何らかの意味での均衡に到達

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$$



2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

(s_{A_2}*, s_{B_3}*) : ゲームの均衡点 equilibrium point

演習1：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？ （1），（2）それぞれのゲームについて考えよ

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	1	-1
s_{A_2}	-1	0	2
s_{A_3}	5	2	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	5	6	4
s_{A_2}	1	8	2
s_{A_3}	7	2	3

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：
    - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-4	2	0	-4	
s_{A_2}	4	3	1	1	1
s_{A_3}	1	-3	2	-3	
max	4	3	2		
min		2			

マキシミン戦略

$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

$\times$

$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - **Proposition1**
    利得行列A=[a_{ij}]が与えられた時，以下が成り立つ
    $$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

⇩

いかなる場合に均衡点が存在し，
ゲームが厳密に確定的であるか？

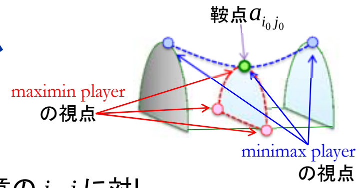
2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- **鞍点** saddle point
  - 行列A=$[a_{ij}]$において，任意の i, j に対し，

$$\boxed{a_{ij_0} \le \boxed{a_{i_0 j_0}}} \le a_{i_0 j}$$

が成り立つとき，(i_0, j_0)をこの行列の**鞍点**といい，$a_{i_0 j_0}$を**鞍点値**という.



$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0}$

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_0 1} & \cdots & a_{i_0 j_0} & \cdots & a_{i_0 n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- **Theorem1**
  - (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は，その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること．またこのとき，鞍点が均衡点．
- **最適戦略** optimal strategy
  - 均衡点(i^*, j^*)は鞍点なので，プレイヤーAが戦略 i^* を用いると，プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ，また，Bが戦略 j^* を取る限り，Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない．

⇒ 戦略 i^* がAの最適戦略

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- **Theorem2**
  - 厳密に確定的な零和ゲームにおいて，均衡点が複数ある場合，各均衡点の値は等しい．また，(i^*, j^*), (i_0, j_0) が均衡点ならば，(i^*, j_0), (i_0, j^*)も均衡点である．

均衡戦略は交換可能

$$\begin{array}{c|cc} & j_0 & j^* \\ \hline i_0 & a_{i_0 j_0} & a_{i_0 j^*} \\ i^* & a_{i^* j_0} & a_{i^* j^*} \end{array}$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

完全予見は不可能！
決断は下さねばならない！
⇒ 主体的な賭，最適な賭の確率
⇒ 期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

$q_j \geq 0, (j=1,2,3)$
$q_1+q_2+q_3=1$

$p_i \geq 0, (i=1,2,3)$
$p_1+p_2+p_3=1$

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

混合戦略 mixed strategy

純粋戦略 pure strategy

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

  - player Aの期待効用 (player A = 期待**効用最大化**プレイヤー = **maximin player**)

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -4p_1+4p_2+p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_1} \text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = \ \ 2p_1+3p_2-3p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_2} \text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = \qquad\quad p_2+2p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_3} \text{の時の期待効用} \end{cases}$$

  - player Bの期待損失 (player B = 期待**損失最小化**プレイヤー = **minimax player**)

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = -4q_1+2q_2 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_1} \text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = \ \ 4q_1+3q_2+q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_2} \text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q}) = \ \ \ q_1-3q_2+2q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_3} \text{の時の期待損失} \end{cases}$$

補足:A, Bが各々混合戦略(p_1,p_2,p_3), (q_1,q_2,q_3)のとき

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3 \end{cases}$$

$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$

2人非協力零和ゲーム

◆ 戦略の支配

- Example3:

	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
被支配戦略	s_{A_1}	-4	2	0
支配戦略	s_{A_2}	4	3	1
	s_{A_3}	1	-3	2

支配する dominate

戦略の支配 domination of strategies
プレイヤーiの戦略h, kについて,
戦略hが戦略kを支配するとは,
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して,
$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$
が成立すること.

•＝だと「同等」
•≧かつ≠
だと「弱支配」
補足)通常は，被弱支配戦略は
除去しない→ 共有地の悲劇

被支配戦略除去の原理
「支配される戦略は用いない」

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	3	1
s_{A_3}	-3	2

補足:被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ **ゲームは支配可解** dominance solvable

2人非協力零和ゲーム

◆ 最適混合戦略

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

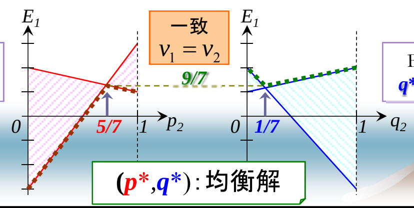
- Example3:
  - player A = 期待**効用最大化**プレイヤー = **maximin player**

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, (1,0)) = 6p_2 - 3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_2} \text{の時の期待効用} \\ E(\boldsymbol{p}, (0,1)) = -p_2 + 2 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_3} \text{の時の期待効用} \end{cases}$$

  - player B = 期待**損失最小化**プレイヤー = **minimax player**

$$\begin{cases} E((1,0), \boldsymbol{q}) = 2q_2 + 1 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_2} \text{の時の期待損失} \\ E((0,1), \boldsymbol{q}) = -5q_2 + 2 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_3} \text{の時の期待損失} \end{cases}$$

Aの最適戦略
$p^*=(0, 5/7, 2/7)$



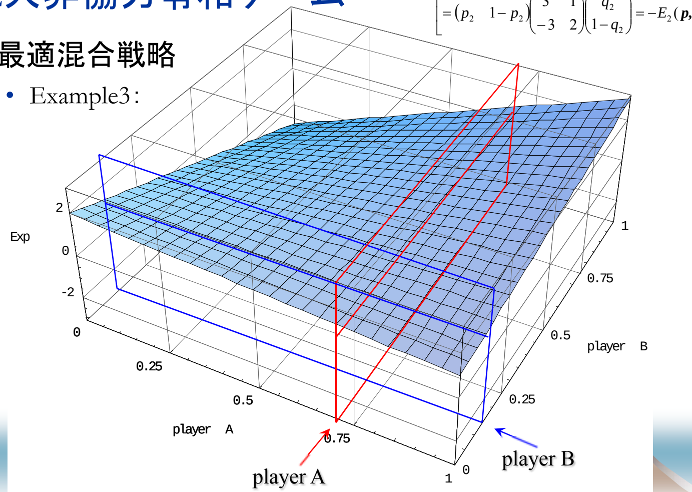
Bの最適戦略
$q^*=(0, 1/7, 6/7)$

(p^*, q^*): 均衡解

2人非協力零和ゲーム

- 最適混合戦略
  - Example3:

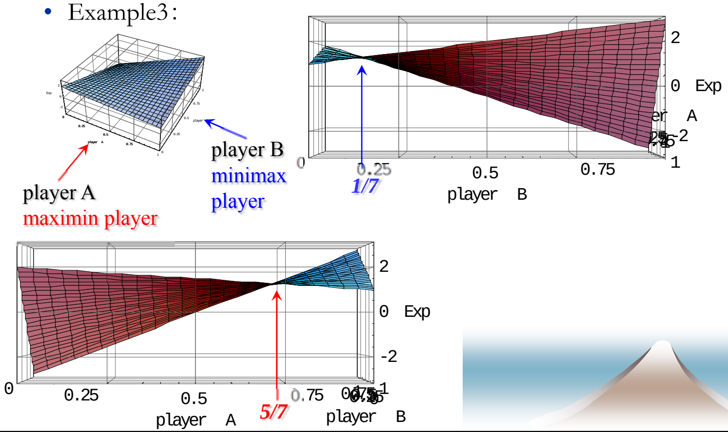
$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3$$
$$= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3$$
$$= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2)$$
$$\left[= \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right]$$



2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

- 最適混合戦略
  - Example3:



2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

- 混合戦略の意味
  - $\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*$ の確率のくじをつくって，引いていずれかに決する方法が，なぜ合理的な決定方法なのか？

Aの最適戦略 $\boldsymbol{p}^*=(0, 5/7, 2/7)$ Bの最適戦略 $\boldsymbol{q}^*=(0, 1/7, 6/7)$

  - player A は s_{A_2}なら 3，s_{A_3}なら 2 が望ましいが，$p_2^* q_3^* + p_3^* q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる．

しかし，これは事後的

しまった！

  - このような状況も全て考慮に入れた上で，最適戦略が決定された！

演習2:

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

(1)

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

(2)

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

(3)

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}
s_{A_1}	3	1	3	4
s_{A_2}	4	4	2	3
s_{A_3}	2	3	1	2

(4)

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	2	4
s_{A_2}	-1	3	0
s_{A_3}	2	1	-2

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーA, Bの純粋戦略

$$S_A = \{s_{A_i} \mid i = 1, \cdots, m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j = 1, \cdots, n\}$$

  - プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

利得関数

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^T A \boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

  - プレイヤーA, Bの混合戦略

$$\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_m) \longrightarrow s_{A_i} = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$$
$$\begin{cases} p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ p_1, \cdots, p_m \geq 0, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n) \longrightarrow s_{B_j} = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$$
$$\begin{cases} q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{cases}$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーAの保証水準

$$\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \longrightarrow v_1 = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

$\boldsymbol{p}$ を操作して期待利得最大

  - プレイヤーBの保証水準

$$\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \longrightarrow v_2 = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

$\boldsymbol{q}$ を操作して期待損失最小

  - **Proposition2**

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \leq \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

  - **Theorem3**

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

また，これを成立させる戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ を**均衡点**といい，
均衡点における利得 $v(\boldsymbol{A})$ をゲームの値という.

$$v(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{p}^{*T} A \boldsymbol{q}^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

  - **Theorem4**

戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が関数 $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の**鞍点**であること．即ち，

$$\forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \quad E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*) \leq E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \leq E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q})$$

が成立すること．

Bが $\boldsymbol{q}^*$ の時，Aは $\boldsymbol{p}^*$ にするのが利得最大

Aが $\boldsymbol{p}^*$ の時，Bは $\boldsymbol{q}^*$ にするのが損失最小

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - **Theorem5**

$v(\boldsymbol{A})$ がゲームの値，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j, \quad E(s_{A_i}, \boldsymbol{q}^*) \leq E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \leq E(\boldsymbol{p}^*, s_{B_j})$$

が成立すること．

$$\forall i = 1, \cdots, m, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$$

$$\forall j = 1, \cdots, n, \quad E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example4

A＼B	s_{B_1} (q_1)	s_{B_2} (q_2)	s_{B_3} (q_3)	s_{B_4} (q_4)	s_{B_5} (q_5)
p_1 s_{A_1}	-2	-1	2	3	3
p_2 s_{A_2}	5	2	4	-1	0
s_{A_3}	4	1	3	-2	-1

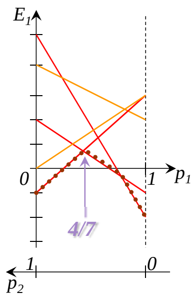
$E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$

$\cancel{E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2}$

$E(\mathbf{p}, s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$

$E(\mathbf{p}, s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$

$\cancel{E(\mathbf{p}, s_{B_5}) = 3p_1}$



$$\mathbf{p}^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example5：一般の2×2ゲーム

A＼B	s_{B_1} (q_1)	s_{B_2} (q_2)
p_1 s_{A_1}	a_{11}	a_{12}
p_2 s_{A_2}	a_{21}	a_{22}

鞍点が存在すればそれが**均衡点**.
なければ，混合戦略を考えるが，
このとき，必ず $E(\mathbf{p},s_{B_1})$ と $E(\mathbf{p},s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1},\mathbf{q})$ と $E(s_{A_2},\mathbf{q})$ は交点を持つ.

$$\begin{cases} E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \mathbf{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}, \mathbf{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}\right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}\right)$$

演習3：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーAの利得行列と混合戦略 $\mathbf{p}$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \vdots \\ E(\mathbf{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

$$\max_{\mathbf{p}} \min \{E(\mathbf{p}, s_{B_1}), E(\mathbf{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\mathbf{p}, s_{B_n})\}$$

まとめると…

$$\begin{array}{ll} \max. & u \\ s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \ \cdots, \ p_m \geq 0 \end{array}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーBの損失行列（Aの利得行列）と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$
\begin{array}{cccc}
q_1 & q_m & \cdots & q_n \\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\
E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\
\vdots \\
E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n
\end{cases}
$$

$$\min_{\boldsymbol{q}} \max \{E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}), E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}), \cdots, E(s_{A_m}, \boldsymbol{q})\}$$

まとめると…

$$
\begin{array}{ll}
\min. & w \\
s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \le w \\
& a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \le w \\
& \cdots \\
& a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \le w \\
& q_1 + \cdots + q_n = 1 \\
& q_1, \cdots, q_n \ge 0
\end{array}
$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題（LPの主問題：**P**） ⇔ 主・双対 ⇔ プレイヤーBの最適化問題（LPの双対問題：**D**）

$$
\begin{array}{ll}
\max. & u \\
s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \ge u \\
& a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \ge u \\
& \cdots \\
& a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \ge u \\
& p_1 + \cdots + p_m = 1 \\
& p_1, \cdots, p_m \ge 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\min. & w \\
s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \le w \\
& a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \le w \\
& \cdots \\
& a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \le w \\
& q_1 + \cdots + q_n = 1 \\
& q_1, \cdots, q_n \ge 0
\end{array}
$$

注）（**P**）（**D**）ともに自明解（$\boldsymbol{p}$=(1,0,…,0), $\boldsymbol{q}$=(1,0,…,0)）があるので実行可能．
→双対定理より，最適解が存在し，最適値は一致する

Theorem6
（P），（D）の最適解が（$\boldsymbol{p}^*, u^*$），（$\boldsymbol{q}^*, w^*$）のとき，（$\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*$）がゲームの均衡点であり，$v := u^* = w^*$がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

A＼B	グー	パー	チョキ	min	max
グー	0	2	-7	-7	
パー	-2	0	4	-2	-2
チョキ	7	-4	0	-4	
max	7	2	4		
min		2			

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$\neq$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

	A＼B	q_1 グー	q_2 パー	q_3 チョキ
p_1	グー	0	2	-7
p_2	パー	-2	0	4
p_3	チョキ	7	-4	0

$$
\begin{array}{ll}
\max. & u \\
s.t. & \quad -2p_2 + 7p_3 \ge u \\
& 2p_1 \quad - 4p_3 \ge u \\
& -7p_1 + 4p_2 \quad \ge u \\
& p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
& p_1, \ p_2, \ p_3 \ge 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\min. & w \\
s.t. & \quad 2q_2 - 7q_3 \le w \\
& -2q_1 \quad + 4q_3 \le w \\
& 7q_1 - 4q_2 \quad \le w \\
& q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\
& q_1, \ q_2, \ q_3 \ge 0
\end{array}
$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

(p_1^*, p_2^*, p_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692), u^*=0
(q_1^*, q_2^*, q_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692), w^*=0

演習4：

- LPによる均衡解の求解
  - ２人のプレイヤーA, Bは，プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列)が以下で与えられるゲームをする．各プレイヤーの問題をLPで表し，均衡解とゲームの値を求めよ．

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}	s_{B_5}
s_{A_1}	1	5	-2	-4	3
s_{A_2}	4	-1	3	2	-7
s_{A_3}	-4	3	6	-2	2
s_{A_4}	1	6	-4	3	-3
s_{A_5}	-3	-6	4	5	1

参考文献

- S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division”, Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981,2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2008）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣（2000）
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2001）
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版（2003）
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房（2005）
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）