

意思決定科学

DEA（包絡分析法）

情報学部 堀田敬介

2014年1月17日（金）

考えよう

あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500

↓

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10

Contents

- ▶ DEAとは？
 - ▶ DMU（意思決定主体）
 - ▶ 効率性：DMUの入力・出力と効率値
- ▶ DEAの基本的モデル
 - ▶ CCRモデル
- ▶ 生産可能集合とその他のモデル
 - ▶ 凸包モデル
 - ▶ BCCモデル
 - ▶ IRSモデル
 - ▶ DRSモデル
 - ▶ GRSモデル

DEAとは？

▶ DEA (Data Envelopment Analysis)

envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒

入力(m個)
=====
↓
:
↓

DMU
Decision Making Unit

=====
↓
:
↓

出力(s個)
=====
↓
:
↓

仮想的入力
=====
↓

DMU
Decision Making Unit

=====
↓

仮想的出力

比率尺度を効率性として見なして相対比較

DMUの変換効率 = $\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$

最も変換効率の良いDMUを基準として、他のDMUの非効率性を算出し、比較する。
ただし、変換効率はDMU毎に最も有利になるように計算。

Confidential

1

DEAとは？

▶ 1入力・1出力

▶ 営業所の営業マン人数と売上について ([2] p.1)

入力

営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
営業マン数	2	3	3	4	5	5	6	8

出力

売上高	1	3	2	3	4	2	3	5
-----	---	---	---	---	---	---	---	---

入力

営業マン数

DMU
Decision Making Unit

売上高

出力

DEAとは？

▶ 1入力・1出力

▶ 営業所の営業マン人数と売上について ([2] p.1)

出力/入力

営業所(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H
売上高/営業マン数	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625
効率値	0.50	1.00	0.67	0.75	0.80	0.40	0.50	0.625

A scatter plot with '営業マン数' (Number of staff) on the x-axis (0 to 8) and '売上高' (Sales) on the y-axis (0 to 5). Points A through H are plotted. A red line segment connects point B (3, 3) and point H (8, 5), representing the '効率的フロンティア' (Efficiency Frontier). A light purple shaded area represents the '生産可能集合' (Production Possibility Set). Points on the frontier are labeled '効率的DMU' (Efficient DMU), while points below it are labeled '非効率的DMU' (Inefficient DMU).

DEAとは？

▶ 2入力・1出力

▶ 店舗売上

入力1

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4

入力2

売場面積	3	4	1	2.1	9	2	6	6	8
------	---	---	---	-----	---	---	---	---	---

出力

売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

入力

従業員数
売場面積

DMU
Decision Making Unit

売上高

出力

DEAとは？

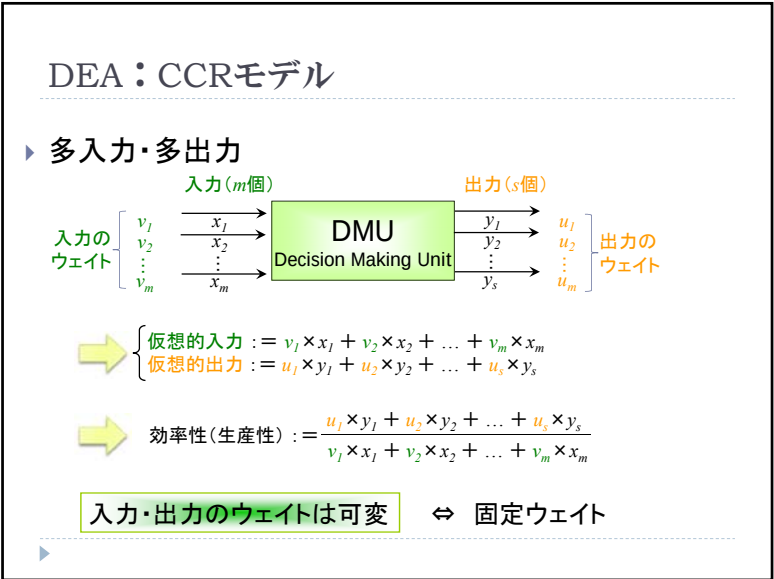
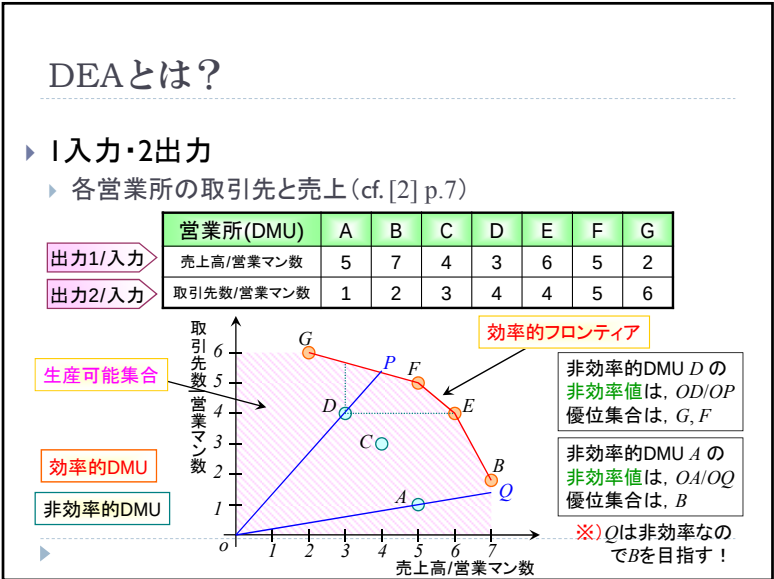
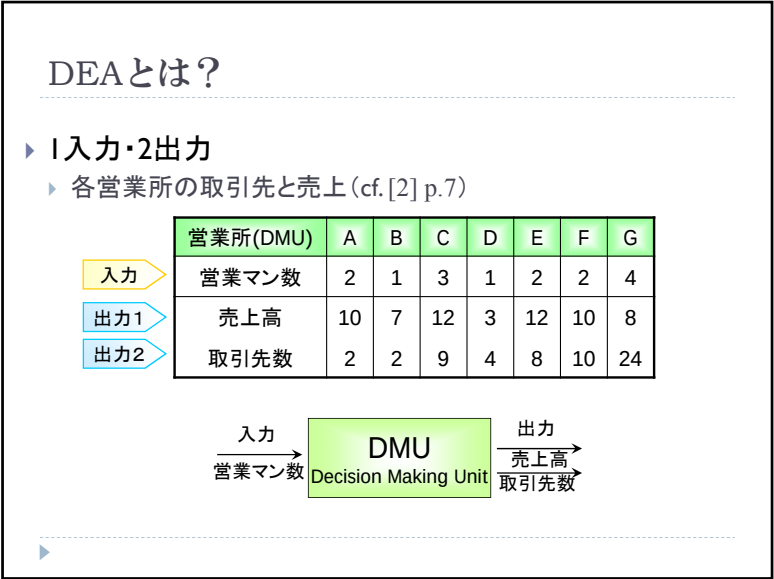
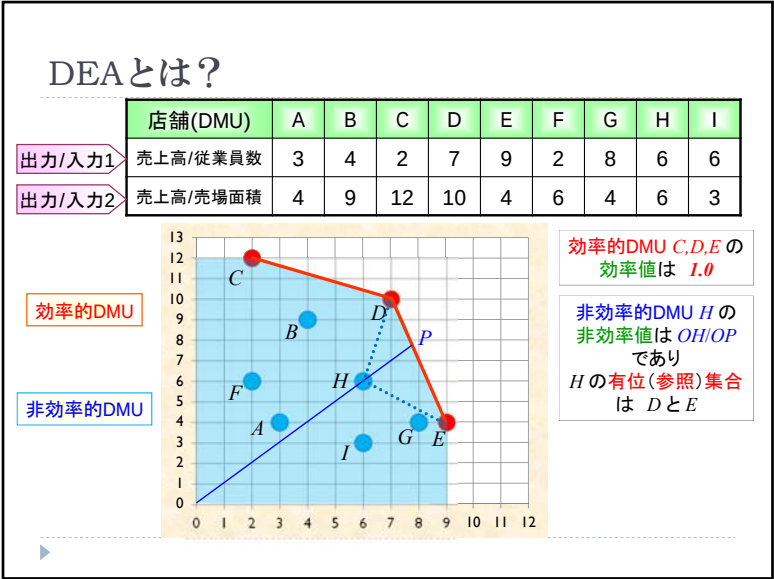
出力/入力1

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6

出力/入力2

売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3
----------	---	---	----	----	---	---	---	---	---

A scatter plot with '従業員数' (Employee count) on the x-axis (0 to 12) and '売上高' (Sales) on the y-axis (0 to 13). Points A through I are plotted. A red line segment connects point C (6, 12) and point D (3, 21), representing the '効率的フロンティア' (Efficiency Frontier). A light blue shaded area represents the '生産可能集合' (Production Possibility Set). Points on the frontier are labeled '効率的DMU' (Efficient DMU), while points below it are labeled '非効率的DMU' (Inefficient DMU).



DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

入力(m個)
 $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}$

出力(s個)
 $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{sk}$

DMU_k
Decision Making Unit

DMU数(n個)
入力データ行列
 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$
入力数(m)

出力データ行列
 $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}$
出力数(s)

入力データ用ウェイトベクトル
 $v = (v_1 \dots v_m)^T$

出力データ用ウェイトベクトル
 $u = (u_1 \dots u_s)^T$

DMU_kの仮想入力
 $q_k := \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \quad (k = 1, \dots, n)$

DMU_kの仮想出力
 $r_k := \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} \quad (k = 1, \dots, n)$

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 測定対象DMU_o($o=1, \dots, n$)のウェイトを計算する

対象のDMUの効率性を最大化

全てのDMUの効率性は1以下

入出力用可変ウェイトの変数は非負

<FP_o>
 $\max \theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}}$
s.t.
 $\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k=1, \dots, n)$
 $v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

同値

<LP_o>
 $\max \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$
s.t.
 $v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$
 $u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$
 $v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

<FP_o>の目的関数について
分母を1にし、分子を最大化

<FP_o>の制約の分母を払う

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 効率性について

<LP_o>
 $\max \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$
s.t.
 $v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$
 $u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$
 $v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

Def: DMU_oがD効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* = 1$
DMU_oがD非効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* < 1$

注) D効率的だからといって効率的とは言えない

Lem: DMU_oがD非効率的、即ち $\theta_o^* < 1$ なら
 $\exists k \in \{1, \dots, n\}, u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}$
この等号を満たすkの集合をDMU_oの優位集合(or 参照集合)という

Def: DMU_oの優位集合(or 参照集合)
 $E_o := \{k \in \{1, \dots, n\} \mid u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}\}$
効率的フロンティアの一部を形成

E_oに属するDMUはD効率的

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ <LP_o>の双対問題と最適解について

CCRモデル

<LP_o>
 $\max \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$
s.t.
 $v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$
 $u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$
 $v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

<D_o>
 $\min \theta$
s.t.
 $\theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \dots + x_{in} \lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$
 $(y_{j1} \lambda_1 + \dots + y_{jn} \lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s)$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

DMU_oの入力i

入力iの重み和

出力jの重み和

DMU_oの出力j

双対問題

$d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \dots + x_{in} \lambda_n) \quad (i=1, \dots, m)$
入力iの余剰

$d_j^y := (y_{j1} \lambda_1 + \dots + y_{jn} \lambda_n) - y_{jo} \quad (j=1, \dots, s)$
出力jの不足

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 入力の余剰と出力の不足を求める

入力の余剰の和

出力の不足の和

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + \dots + d_m^x) + (d_1^y + \dots + d_s^y) \\ \text{s.t.} & d_i^x = \theta^* x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \quad (i=1, \dots, m) \\ & d_j^y = (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \quad (j=1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \\ & d_1^x, \dots, d_m^x \geq 0 \\ & d_1^y, \dots, d_s^y \geq 0 \end{aligned}$$

<LP_o>の最適値

DEAの実行手順

<D_o>を解いて最適解 (θ*, λ₁*, ..., λ_n*) を得た後,
このLPを解いて最適解 (d₁^{x*}, ..., d_m^{x*}, d₁^{y*}, ..., d_s^{y*}) を得る.

Def: DEA効率性の定義

θ* = 1, (d₁^{x*}, ..., d_m^{x*}, d₁^{y*}, ..., d_s^{y*}) = θ となるDMUはDEA効率性
それ以外のDMUはDEA非効率性

DEA：CCRモデル

▶ 例題

▶ 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x ₁	40	20	15	30	20	16	v ₁
授業集中度 x ₂	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v ₂
出席率 x ₃	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v ₃
中間試験 y ₁	40	60	30	20	70	50	u ₁
期末試験 y ₂	30	90	55	70	24	60	u ₂

入力(3個)

出力(2個)

入力のウェイト

DMU(学生)

出力のウェイト

効率性(生産性) := $\frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + v_3 \times x_3}$

DEA：CCRモデル

▶ 学生A(DMU_A)の効率性を求める

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x ₁	40	20	15	30	20	16	v ₁
授業集中度 x ₂	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v ₂
出席率 x ₃	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v ₃
中間試験 y ₁	40	60	30	20	70	50	u ₁
期末試験 y ₂	30	90	55	70	24	60	u ₂

分数計画問題 <FP_A>

線形計画問題 <LP_A>

(P) 主問題

(D) 双対問題

DEA：CCRモデル

▶ 学生A(DMU_A)の効率性を求める

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x ₁	40	20	15	30	20	16	v ₁
授業集中度 x ₂	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v ₂
出席率 x ₃	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v ₃
中間試験 y ₁	40	60	30	20	70	50	u ₁
期末試験 y ₂	30	90	55	70	24	60	u ₂

線形計画問題 <LP_A>

<LP_A>の最適値
θ*=1なら
次のLPも解く

DEA : CCRモデル

▶ 例題2 ([3] p.15)

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

DMU A についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & 2\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $\theta^* = 0.83, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 0.33, 0.67, 0, 0)$

$$\begin{cases} \text{入力} & 0.83 \times A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \\ \text{出力} & A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \end{cases} \quad \begin{cases} \text{input} & 0.83 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.33 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.67 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{output} & (1) = 0.33 \times (1) + 0.67 \times (1) \end{cases}$$

DMU A はDEA非効率的で、優位集合はCとD

DEA : CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

▶ 例題2 DMU C についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $\theta^* = 1, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

DMU C の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\ \text{s.t.} & d_1^x = 1 \cdot 4 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\ & d_2^x = 1 \cdot 2 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (0, 0, 0)$

入力余剰・出力不足なし→CはDEA効率的

$$\begin{cases} \text{input} & 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{output} & (1) = 1 \times (1) + (0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{入力} & 1 \times C = 1 \times C \\ \text{出力} & C = 1 \times C \end{cases}$$

DEA : CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

▶ 例題2 DMU F についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 6\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $\theta^* = 1, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

DMU C の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\ \text{s.t.} & d_1^x = 1 \cdot 6 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\ & d_2^x = 1 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (2, 0, 0)$

入力余剰あり→FはDEA非効率的

優位集合はC(Cに比較して入力余剰2だけ非効率)

$$\begin{cases} \text{input} & 1 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{output} & (1) = 1 \times (1) + (0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{入力} & 1 \times F \geq 1 \times C \\ \text{出力} & F \leq 1 \times C \end{cases}$$

DEAの特徴

▶ 特徴(長所・短所)

- ▶ 他と異なった特徴を持つDMUは、DEA効率的と判断されやすい
→ 他と異なることが良いことの場合は、DEAは良い指標
- ▶ 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
- ▶ DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

例題（DEAを用いた野球打者評価）

CCRモデルによる

▶ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について、DEAにより評価

入力

打数
三振

出力

安打
打点
四死球
犠打
盗塁

DMU
野球打者
= 与えられる打席を
得点に結びつけるシ
ステム

注：三振は少ない方がよいので入力に...

		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6

データ（一部加工）
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題（DEAを用いた野球打者評価）

CCRモデルによる

▶ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について、DEAにより評価

▶ 結果例：2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗（横）

$<D_o>$ を解いた結果： $\theta=0.8007, \lambda_3=0.1638, \lambda_5=0.2670, \lambda_8=0.1765, \lambda_{37}=0.3476$

各入力

各出力

石井琢朗

$0.8007 \times \text{石井琢朗} \geq 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)} + 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)}$
 $\leq 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)} + 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)}$

▶ 結果例：2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏（巨）

$<D_o>$ を解いた結果： $\theta=0.9053, \lambda_1=0.3890, \lambda_3=0.1581, \lambda_4=0.0225, \lambda_7=0.2917$

各入力

各出力

二岡智宏

$0.9053 \times \text{二岡智宏} \geq 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)}$
 $\leq 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)}$

注：<D_o>のモデル化、解は cplex9.0 による

生産可能集合とモデル

▶ 生産可能集合 P からモデルを考察する

入力(m個)

出力(s個)

DMU
Decision Making Unit

入力データ行列

出力データ行列

$x = \begin{pmatrix} x_{1\bullet} \\ \vdots \\ x_{m\bullet} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_{1\bullet} \\ \vdots \\ y_{s\bullet} \end{pmatrix}$

$\{(x, y) : \text{活動} (= \text{入力と出力の対})\}$
 $P = \{(x, y) : \text{生産可能集合} (= \text{活動の集合})\}$

生産可能集合 P に対する仮定（CCRモデル）

規模の収穫が一定（constant returns to scale）

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属する活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属する活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属する活動 (x, y) の非負結合も P に属する

生産可能集合とモデル

▶ 「規模の収穫が一定」とは？

効用（満足度）

価値など

収穫逓増（increasing returns to scale）

規模の収穫が一定（constant returns to scale）

収穫逓減（decreasing returns to scale）

注：一般には価値が大きくなるほど、効用の増加量は減る場合が多い。

Confidential

7

生産可能集合

CCRモデル

$$\begin{aligned} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ & (y_{11}\lambda_1 + \dots + y_{1n}\lambda_n) - y_{1o} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{aligned}$$

Charnes-Cooper-Rhodes

生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_j) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\}$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$
$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

生産可能集合

ベクトルの線形結合

対象DMUの入力を下から支える

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$: 制限なし → 全空間
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0, L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化) → 凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)

LUの値設定によるバリエーション

生産可能集合

ベクトルの線形結合

対象DMUの出力を上から押さえる

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$: 制限なし → 全空間
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0, L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化) → 凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)

LUの値設定によるバリエーション

生産可能集合とモデル

DEA (CCRモデル)

DMU Aについて解くと、最適解 $\theta=0.65625, \lambda=0, 0, 0.46875, 0.375, 0$

$$\begin{aligned} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\ & \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

出力1 y_1

$$\begin{aligned} \text{input} & \begin{pmatrix} 1.313 \\ 1.969 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.375 \\ \text{output} & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 0.375 \end{aligned}$$

生産可能集合とモデル

注: 凸包モデルはCCRを含む
($L=0, U=\infty \rightarrow \text{CCR}$)

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する (k を制限する)
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

CCRモデルの(2)を一般化する

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

実際の問題は θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{1o}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{1o}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$

λ_1, λ_2 の条件による
 $x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2$ の取り得る範囲

$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \rangle$
 $\langle \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \rangle$
 $\langle L \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq U \rangle$
 $\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rangle$

生産可能集合とモデル

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & \theta x_o - (x_{1o}\lambda_1 + \dots + x_{1n}\lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ & (y_{1o}\lambda_1 + \dots + y_{1n}\lambda_n) - y_o \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{aligned}$$

Charnes-Cooper-Rhodes

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル0: CCRモデル [$L=0, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫一定

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{1o}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{1o}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$

λ_1, λ_2 の条件による
 $x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2$ の取り得る範囲

$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \rangle$
 $\langle \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \rangle$
 $\langle L \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq U \rangle$
 $\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rangle$

生産可能集合とモデル

Banker-Charnes-Cooper

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル1: BCCモデル [$L=U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫通減

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{1o}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{1o}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$

λ_1, λ_2 の条件による
 $x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2$ の取り得る範囲

$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \rangle$
 $\langle \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \rangle$
 $\langle L \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq U \rangle$
 $\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rangle$

生産可能集合とモデル

Increasing Returns to Scale

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル2: IRSモデル [$L=1, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫通減

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{1o}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq y_{1o}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$

λ_1, λ_2 の条件による
 $x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2$ の取り得る範囲

$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \rangle$
 $\langle \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \rangle$
 $\langle L \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq U \rangle$
 $\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rangle$

Confidential

9

生産可能集合とモデル

Decreasing Returns to Scale

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル3: DRSモデル [$L=0, U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する..
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

比較的規模の大きい活動の効率性を重視

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

$e\lambda \leq 1$

$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{s0} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1$

DRSモデル (1入力・1出力)

生産可能集合とモデル

General Returns to Scale

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル4: GRSモデル [$L \leq 1, U \geq 1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する..
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

$ex) 0.8 \leq e\lambda \leq 1.2$

$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{s0} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

$0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1.2$

GRSモデル (1入力・1出力)

参考文献

- [1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978
- [2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連(1993)
- [3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店(2001)
- [4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- [5] ...