

意思決定科学: ゲーム理論1

堀田敬介

2014/11/14,Fri.~

ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個!)を買ってきました。2人に均等に与えたいのだが、2人は自分の分が相手より小さいと不満を言い、けんかになる。



どうしたら
いいだろう?



仮定: The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

Contents

- ケーキを仲良く!
 - アルゴリズムと解の性質
 - The Steinhaus' loan divider procedure
 - The Banach-Knaster last-diminisher procedure
- ゲーム理論とは何か?
 - ゲームの定義
- 2人非協力零和ゲーム
 - ミニマックス原理と均衡解
 - 純粋戦略と混合戦略、ミニマックス定理
 - 2人零和ゲームと線形計画

ケーキを仲良く

◆ You Cut, I Choose ! (One divides, the other chooses.)

- Bobにケーキを切らせ、Carolにケーキを選ばせる

ただし、これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」!
(Bobにどのように切らせるかの指定はない。Bobは**自分の意思で**切る)
(Carolにどのように選ばせるかの指定はない。Carolは**自分の意思で**選ぶ)

◆ 解は…

- Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from "Fair Division", p.9)

ケーキを仲良く

◆ 「解」が持つほしい2つの性質

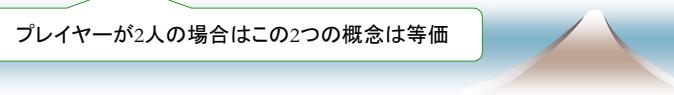
- **proportionality** (An allocation is proportional)

- Each thinks he or she received a portion that has size or value of at least $1/n$.

- **envy-freeness** (An allocation is envy-free.)

- Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, does not envy any other player.

プレイヤーが2人の場合はこの2つの概念は等価



ケーキを仲良く (3人いたら?)

◆ The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略

- Bob はちょうど $1/3$ (と Bob が思う) piece に切る
- Carol, Ted は acceptable cake を取る

- **envy-free** ではない

- case1: Bob, Ted は誰も妬まないが, Carol は Ted を妬む可能性がある。 (Ted が, 彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので)
- case2: Carol, Ted は誰も妬まないが, Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある。 (Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合, 2人のいずれかが $1/3$ 以上 (と Bob が思う) cake を得るので)

ケーキを仲良く (3人いたら?)

H. Steinhaus, 1948

◆ The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)

1. Bob がケーキを3分割するように切る (切り方は自由であることに注意)

2-1. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘

2-2. Ted も Carol と同様のことを行う。

(Carol も Ted も, 少なくとも 1 つは acceptable であることに注意)

3. case1: Carol (or Ted) が 2 個以上 acceptable cake がある場合

Ted → Carol → Bob (or Carol → Ted → Bob) の順にケーキを取る

case2: Carol, Ted とも acceptable cake が高々 1 個の場合

Carol, Ted とも acceptable でないケーキを Bob にあげて, 残りのケーキについて 2 人で [divide-and-choose] を行う。

def.) call a piece **acceptable** to a player
if he or she thinks the piece is at least $1/3$ of the cake.

ケーキを仲良く (n人いたら?)

◆ The Steinhaus' loan-divider procedure (3 plays)

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略

- Bob はちょうど $1/3$ (と Bob が思う) piece に切る
- Carol, Ted は acceptable cake を取る

- **envy-free** ではない

- case1: Bob, Ted は誰も妬まないが, Carol は Ted を妬む可能性がある。 (Ted が, 彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので)
- case2: Carol, Ted は誰も妬まないが, Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある。 (Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合, 2人のいずれかが $1/3$ 以上 (と Bob が思う) cake を得るので)

ケーキを仲良く (n人いたら?)

H.W. Kuhn, 1967

◆ Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 plays) を n 人版に拡張

- Frobenius & Konig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム

- 4 人版は Steinhaus も気づいていたらしい

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure

- Steinhaus が 1948 年に 2 人 (学生, ポーランド人) のアイデアを論文の形で発表

- ◆

ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure

- The partners being ranged **A,B,C,...,N**.
- A** cuts from the cake an arbitrary part.
- B** has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off.
- Whatever he does, **C** has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice,
- and so on up to **N**.
- The rule obliges the "last-diminisher" to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of, the remaining $n-1$ persons start the same game with the remainder of the cake.
- After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder.

(from "Fair Division", p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

◆ The last-dimisher procedure

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略

• 切るプレイヤーがちょうど $1/n$ と考えるpieceに切ること

• envy-freeではない

• 理由: 例えば、ゲームを先に抜けたプレイヤーAが、ある段階で切られたケーキが $1/n$ より大きい(とAが思う)ときでもそれを阻止できない。結果として $1/n$ より大きいケーキが誰か(例えばB)に行く(とAが思う)ので、AはBを妬む。

ゲーム理論とは何か？

◆ ゲーム的状況 game situations

- 複数の意思決定主体(プレイヤー)が存在し、各々目的を持ち、その実現を目指して相互に依存しあっている状況

◆ ゲーム理論 game theory

- ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し、プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)



John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日(火)取得の情報

ゲーム理論とは何か？

◆ プレイヤー player

プレイヤーの集合
 $N = \{1, 2, \dots, n\}$

- 意思決定し、行動する主体。(2人, 3人, ..., n人, ..., ∞)
- 例:個人、複数の個人からなる組織、政党、国家、...

◆ 戰略 strategy

プレイヤー i の戦略集合
 $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\} \quad (i \in N)$

- プレイヤーが取りうる行動。(有限、無限)

◆ 利得と利得関数 payoff

プレイヤー i の利得関数
 $f_i: S_1 \times S_2 \dots \times S_n \rightarrow R \quad (i \in N)$

- 各プレイヤーの戦略決定後、ゲームは終了し、結果が出る。結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値。利得 payoff、効用 utility。

ゲームの定義

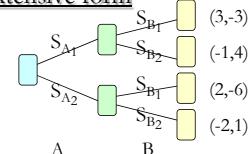
$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$

各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し、
Gは全てのプレイヤーの共有知識とする

ゲーム理論とは何か？

- ◆ ゲームの表現形式

- 展開形 extensive form



- 戰略形 strategic form, 標準形 normal form

A＼B	S _{B1}	S _{B2}
S _{A1}	3	1
S _{A2}	-4	6

ゲーム理論とは何か？

- ◆ 非協力ゲームと協力ゲーム

- 各プレイヤーの戦略決定における前提

1. プレイヤー間には、各プレイヤーがとるべき戦略について、強制力のある取り決めは存在しない。

拘束的合意が成立しない → 非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に、とるべき戦略についての合意が成立立ち、それに基づいて戦略決定する。

拘束的合意が成立 → 協力ゲーム

ゲーム理論とは何か？

出展:「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- ◆ 例) 喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中
 - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は、A=600人、B=300人
 - 両店舗が別々の地域に出店すると、見込み客を全て獲得できる
 - 両店舗が同じ地域に出店すると、スタボがダタールの2倍の客を獲得
 - 同時にどちらか1地域に必ず出店(両方出店や出店中止はない)
- ◆ 問:ダタールはどちらに出店すべきか？ またそれは何故か？

ダタ＼スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

- ◆ 検討

- マキシミン基準(悲観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- マキシマックス基準(楽観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- ラプラス基準(平均値) → A地域へ出店せよ
- ゲーム理論による解答 → B地域へ出店せよ

「1人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用であるゲーム」では解が異なる！

2人非協力零和ゲーム

2人非協力零和ゲーム

◆ Example1:

- 2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」 $N=\{1, 2\}$ をしている
- プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う $S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}, (i \in N)$
- 2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち, $S_1=\{\text{表, 裏}\}, S_2=\{\text{表, 裏}\}$ 異なるならBさんの勝ち
- 表を出して勝ったら相手から2円貰い、裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$f_i(\text{表, 表}) = 2 + f_2(\text{表, 表}) = -2 = 0$
 $f_i(\text{表, 裏}) = -1 + f_2(\text{表, 裏}) = 1 = 0$
 $f_i(\text{裏, 表}) = -2 + f_2(\text{裏, 表}) = 2 = 0$
 $f_i(\text{裏, 裏}) = 1 + f_2(\text{裏, 裏}) = -1 = 0$

$A \setminus B$		表	裏
表	2	-1	
裏	-2	1	

$A \setminus B$		表	裏
表	-2	1	
裏	2	-1	

A君の利得表

Bさんの利得表

2人非協力零和ゲーム

◆ Example2:

- A君とBさんがゲームをしている。それぞれ3つずつの戦略があり、A君の利得表は以下の通りである。2人は、各々どんな戦略をとるべきか？

$A \setminus B$	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-2	4	-1
s_{A2}	2	2	1
s_{A3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAの思考

最大化プレイヤー

- 戦略 s_{A1} を取ったときの最悪の事態は
 $\min(-2, 4, -1) = -2$ (プレイヤーBが戦略 s_{B1} を取る)
- 戦略 s_{A2} を取ったときの最悪の事態は
 $\min(2, 2, 1) = 1$ (プレイヤーBが戦略 s_{B3} を取る)
- 戦略 s_{A3} を取ったときの最悪の事態は
 $\min(4, -3, 0) = -3$ (プレイヤーBが戦略 s_{B2} を取る)

戦略 s_{A2} を取る (最悪でも利得1が保証される)

もっと良い利得を得ることができるのか？

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAがBの立場で思考

最小化プレイヤー

- Bが戦略 s_{B1} を取ったとき、Aである自分は戦略 s_{A3} を取る
 $\max(-2, 2, 4) = 4$
- Bが戦略 s_{B2} を取ったとき、Aである自分は戦略 s_{A1} を取る
 $\max(4, 2, -3) = 4$
- Bが戦略 s_{B3} を取ったとき、Aである自分は戦略 s_{A2} を取る
 $\max(-1, 1, 0) = 1$

戦略 s_{B3} を取る (最悪でも損失1で済む)

Aは戦略 s_{A2} を取ると、利得1を得られ、それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる。

2人非協力零和ゲーム

- ◆ ミニマックス原理
 - Example2:

保証水準 security level → max 4 4 1

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}	min	max
s _{A1}	-2	4	-1	-2	1
s _{A2}	2	2	1	1	1
s _{A3}	4	-3	0	-3	
保証水準 security level → min	4	4	1		
	ミニマックス値 minimax value	ミニマックス原理 minimax principle [最小化プレイヤーの行動原理]	$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$	マキシミン値 maximin value	$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$
				マキシミン原理 maximin principle [最大化プレイヤーの行動原理]	
					$v_1 = v_2$

2人非協力零和ゲーム

- ◆ 均衡点とゲームの値
 - 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると、どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！

何らかの意味での均衡に到達

$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$

やむをえない... しかたない...

2人零和ゲームが「厳密に決定される strictly determined」 「厳密に確定的である」

(s_{A2}*, s_{B3}*): ゲームの均衡点 equilibrium point

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-2	4	-1
s _{A2}	2	2	1
s _{A3}	4	-3	0

演習1:

- ◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうなるか？(1), (2)それぞれのゲームについて考えよ

(1)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	3	1	-1
s _{A2}	-1	0	2
s _{A3}	5	2	3

(2)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	5	6	4
s _{A2}	1	8	2
s _{A3}	7	2	3

2人非協力零和ゲーム

- ◆ 純粋戦略と混合戦略
 - Example3:
 - A君とBさんがゲームをしている。それぞれ3つずつの戦略があり、A君の利得表は以下の通りである。2人は、各々どんな戦略をとるべきか？

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-4	2	0
s _{A2}	4	3	1
s _{A3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

- 純粹戦略と混合戦略

- Example3:

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}	min	max
s _{A1}	-4	2	0	-4	
s _{A2}	4	3	1	1	1
s _{A3}	1	-3	2	-3	
max	4	3	2		$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$
min			2		$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

マキシム戦略
X
ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

2人非協力零和ゲーム

- 純粹戦略と混合戦略

- Proposition1

利得行列 $A = [a_{ij}]$ が与えられた時、以下が成り立つ

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

いかなる場合に均衡点が存在し、ゲームが厳密に確定的であるか？

2人非協力零和ゲーム

- 純粹戦略と混合戦略

- 鞍点 saddle point

- 行列 $A = [a_{ij}]$ において、任意の i, j に対し、
 $a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$

が成り立つとき、 (i_0, j_0) をこの行列の 鞍点といい、 $a_{i_0j_0}$ を 鞍点値という。

$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0}$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a_{i_0j_0} \leq a_{ij}$$

2人非協力零和ゲーム

- 純粹戦略と混合戦略

- Theorem1

(行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は、その利得行列 A に少なくとも1つの鞍点が存在すること。またこのとき、鞍点が均衡点。

- 最適戦略 optimal strategy

- 均衡点 (i^*, j^*) は鞍点なので、プレイヤーAが戦略 i^* を用いると、プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ、また、Bが戦略 j^* を取る限り、Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない。

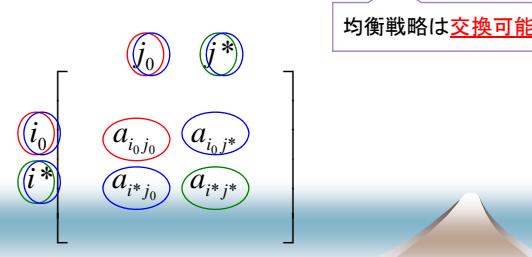
戦略 i^* がAの最適戦略

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粹戦略と混合戦略

- Theorem2

- 厳密に確定的な零和ゲームにおいて、均衡点が複数ある場合、各均衡点の値は等しい。また、 (i^*, j^*) , (i_0, j_0) が均衡点ならば、 (i^*, j_0) , (i_0, j^*) も均衡点である。



2人非協力零和ゲーム

◆ 純粹戦略と混合戦略

- Example3:

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

主体的な賭、最適な賭の確率

期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粹戦略と混合戦略

- Example3:

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

$p_i \geq 0, (i=1,2,3)$
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$q_j \geq 0, (j=1,2,3)$
 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

混合戦略
mixed strategy

純粹戦略
pure strategy

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粹戦略と混合戦略

- Example3:

- player A の期待効用 (player A = 期待効用最大化プレイヤー = **maximin player**)

$$\begin{cases} E_1(s_{A1}, s_{B1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B1} \text{ の時の期待効用} \\ E_1(s_{A1}, s_{B2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B2} \text{ の時の期待効用} \\ E_1(s_{A1}, s_{B3}) = p_2 + 2p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B3} \text{ の時の期待効用} \end{cases}$$

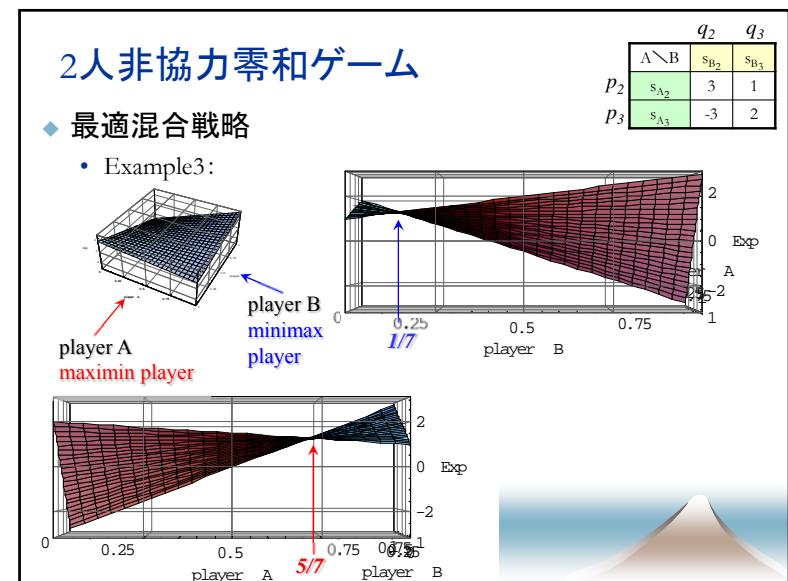
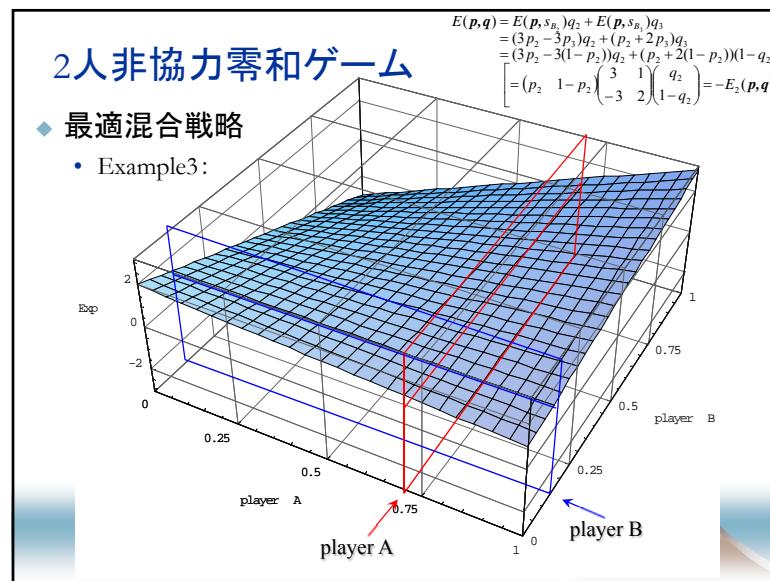
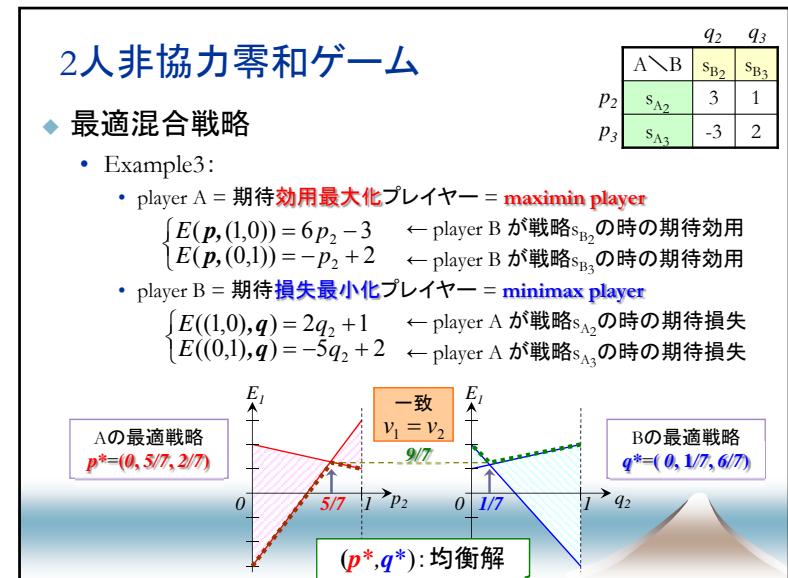
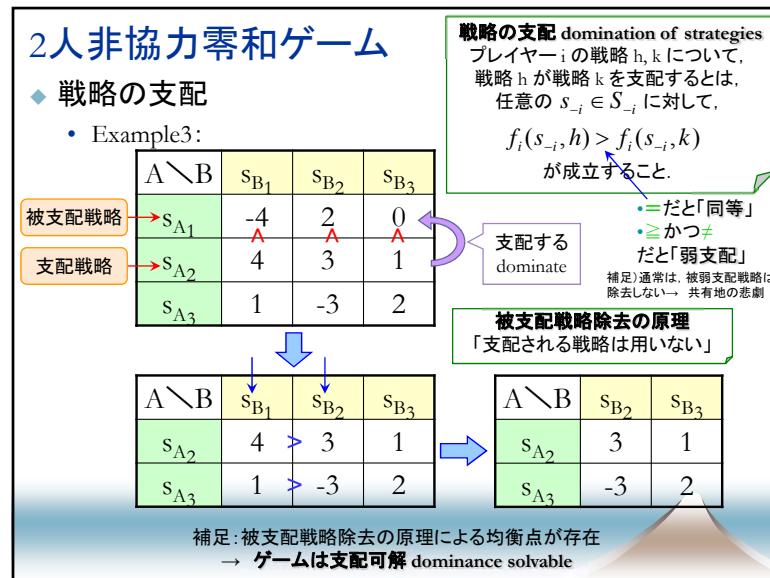
- player B の期待損失 (player B = 期待損失最小化プレイヤー = **minimax player**)

$$\begin{cases} E_2(s_{A1}, q) = -4q_1 + 2q_2 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A1} \text{ の時の期待損失} \\ E_2(s_{A2}, q) = 4q_1 + 3q_2 + q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A2} \text{ の時の期待損失} \\ E_2(s_{A3}, q) = q_1 - 3q_2 + 2q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A3} \text{ の時の期待損失} \end{cases}$$

補足: A, Bが各々混合戦略 $(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3)$ のとき

$$\begin{aligned} E_1(p, q) &= E(p, s_{B1})q_1 + E(p, s_{B2})q_2 + E(p, s_{B3})q_3 \\ E_2(p, q) &= E(s_{A1}, q)p_1 + E(s_{A2}, q)p_2 + E(s_{A3}, q)p_3 \\ E(p, q) &:= E_1(p, q) = E_2(p, q) \end{aligned}$$

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2



2人非協力零和ゲーム

◆ 混合戦略の意味

- p^*, q^* の確率のくじをつくる、引いていずれかに決する方法が、なぜ合理的な決定方法なのか？

Aの最適戦略 $p^* = (0, 5/7, 2/7)$	Bの最適戦略 $q^* = (0, 1/7, 6/7)$
------------------------------	------------------------------

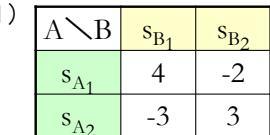
- player A は s_{A_2} なら 3, s_{A_3} なら 2 が望ましいが、
 $p_2^*q_3^* + p_3^*q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる。

しかし、これは事後的 

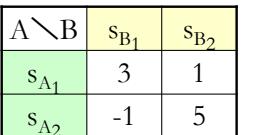
このような状況も全て考慮に入れた上で、最適戦略が決定された！

演習2:

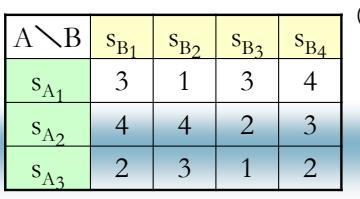
◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうなるか？

(1) 

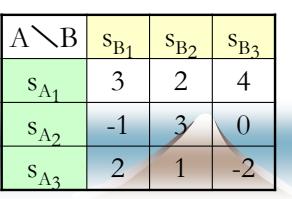
A \ B		s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2	
s_{A_2}	-3	3	

(2) 

A \ B		s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1	
s_{A_2}	-1	5	

(3) 

A \ B		s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}
s_{A_1}	3	1	3	4	
s_{A_2}	4	4	2	3	
s_{A_3}	2	3	1	2	

(4) 

A \ B		s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	2	4	
s_{A_2}	-1	3	0	
s_{A_3}	2	1	-2	

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- プレイヤーA, Bの純粋戦略
 $S_A = \{s_{A_i} \mid i = 1, \dots, m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j = 1, \dots, n\}$
- プレイヤーAの利得行列(Bの損失行列)
 $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- 利得関数
 $E(p, q) = p^T A q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$
- プレイヤーA, Bの混合戦略
 $p = (p_1, \dots, p_m) \quad \rightarrow s_{A_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$
 $\begin{cases} p_1 + \dots + p_m = 1 \\ p_1, \dots, p_m \geq 0, \end{cases}$
- $q = (q_1, \dots, q_n) \quad \rightarrow s_{B_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$
 $\begin{cases} q_1 + \dots + q_n = 1 \\ q_1, \dots, q_n \geq 0 \end{cases}$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- プレイヤーAの保証水準
 $\min_q E(p, q) \rightarrow v_1 = \max_p \min_q E(p, q)$
- プレイヤーBの保証水準
 $\max_p E(p, q) \rightarrow v_2 = \min_q \max_p E(p, q)$

p を操作して期待利得最大

q を操作して期待損失最小

• Proposition2
 $\max_p \min_q E(p, q) \leq \min_q \max_p E(p, q)$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- Theorem3

$$\max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

また、これを成立させる戦略の組 $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ を**均衡点**といい、均衡点における利得 $v(A)$ をゲームの値といふ。

$$v(A) := \mathbf{p}^{*T} \mathbf{A} \mathbf{q}^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

- Theorem4

戦略の組 $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は、 $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ が関数 $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の**鞍点**であること。即ち、

$$\forall \mathbf{p}, \mathbf{q}, \quad E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q})$$

が成立すること。

Bが \mathbf{q}^* の時、Aは \mathbf{p}^* にするのが**利得最大**

Aが \mathbf{p}^* の時、Bは \mathbf{q}^* にするのが**損失最小**

J. von Neumann, 1928

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- Theorem5

$v(A)$ がゲームの値、 $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j, \quad E(s_{A_i}, \mathbf{q}^*) \leq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq E(\mathbf{p}^*, s_{B_j})$$

が成立すること。

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$$

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- Example4

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
p_1	s_{A_1}	-2	-1	2	3
p_2	s_{A_2}	5	2	4	-1
	s_{A_3}	4	1	3	-2

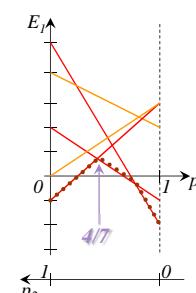
$$E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$$

$$E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2$$

$$E(\mathbf{p}, s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$$

$$E(\mathbf{p}, s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$$

$$E(\mathbf{p}, s_{B_5}) = 3p_1$$



$$\mathbf{p}^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0 \right)$$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- Example5: 一般の 2×2 ゲーム

	q_1	q_2
p_1	s_{B_1}	s_{B_2}
p_2	s_{A_1}	$a_{11} a_{12}$

鞍点が存在すればそれが**均衡点**。
なければ、混合戦略を考えるが、
このとき、必ず $E(\mathbf{p}, s_{B_1})$ と $E(\mathbf{p}, s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1}, \mathbf{q})$ と $E(s_{A_2}, \mathbf{q})$ は交点を持つ。

均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}} \right)$$

$$\begin{cases} E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \\ E(s_{A_1}, \mathbf{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}, \mathbf{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

演習3:

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうなるか？

A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

- プレイヤーAの利得行列と混合戦略 p

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

まとめる

$$\begin{cases} E(p, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_m \\ E(p, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_m \\ \vdots \\ E(p, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{nn}p_m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \max_u u \\ \text{s.t. } & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \dots, p_m \geq 0 \end{aligned}$$

$$\max_p \min \{E(p, s_{B_1}), E(p, s_{B_2}), \dots, E(p, s_{B_n})\}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

- プレイヤーBの損失行列(Aの利得行列)と混合戦略 q

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_m & \cdots & q_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

まとめる

$$\begin{aligned} & \min_w w \\ \text{s.t. } & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \cdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \dots, q_n \geq 0 \end{aligned}$$

$$\min_q \max \{E(s_{A_1}, q), E(s_{A_2}, q), \dots, E(s_{A_m}, q)\}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題
(LPの主問題: **P**)

$$\begin{aligned} & \max_u u \\ \text{s.t. } & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \dots, p_m \geq 0 \end{aligned}$$

プレイヤーBの最適化問題
(LPの双対問題: **D**)

$$\begin{aligned} & \min_w w \\ \text{s.t. } & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \cdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \dots, q_n \geq 0 \end{aligned}$$

注: (**P**, **D**)ともに自明解 ($p=(1,0,\dots,0)$, $q=(1,0,\dots,0)$)があるので実行可能。
→双対定理より、最適解が存在し、最適値は一致する

Theorem6

(**P**, **D**)の最適解が (p^*, u^*) , (q^*, w^*) のとき、 (p^*, q^*) がゲームの均衡点であり、 $v := u^* = w^*$ がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- Example6:じゃんけん

A＼B			
	0	2	-7
	-2	0	4
	7	-4	0
max	7	2	4
min		2	

ミニマックス戦略

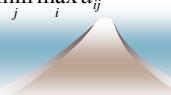
- 両プレイヤーとも、支配戦略は存在しない。
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない。

min	max
-7	
-2	-2
-4	

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

✗

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$



2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- Example6:じゃんけん

	0	2	-7	
	-2	0	4	
	7	-4	0	

	0	2
	-2	0
	7	-4

$$\begin{array}{ll} \max_u \\ \text{s.t.} \end{array} \begin{array}{l} -2p_2 + 7p_3 \geq u \\ 2p_1 - 4p_3 \geq u \\ -7p_1 + 4p_2 \geq u \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_w \\ \text{s.t.} \end{array} \begin{array}{l} 2q_2 - 7q_3 \leq w \\ -2q_1 + 4q_3 \leq w \\ 7q_1 - 4q_2 \leq w \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{array}$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692), u^* = 0$$

$$(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692), w^* = 0$$

演習4:

◆ LPによる均衡解の求解

- 2人のプレイヤーA, Bは、プレイヤーAの利得行列(Bの損失行列)が以下で与えられるゲームをする。各プレイヤーの問題をLPで表し、均衡解とゲームの値を求めよ。

A＼B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}	s _{B4}	s _{B5}
s _{A1}	1	5	-2	-4	3
s _{A2}	4	-1	3	2	-7
s _{A3}	-4	3	6	-2	2
s _{A4}	1	6	-4	3	-3
s _{A5}	-3	-6	4	5	1

参考文献

- S.J. Brams & A.D. Taylor, "Fair Division", Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2008)
- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣(2000)
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2001)
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版(2003)
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房(2005)
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)