

意思決定科学 DEA（包絡分析法）

堀田敬介

2015年1月16日（金）

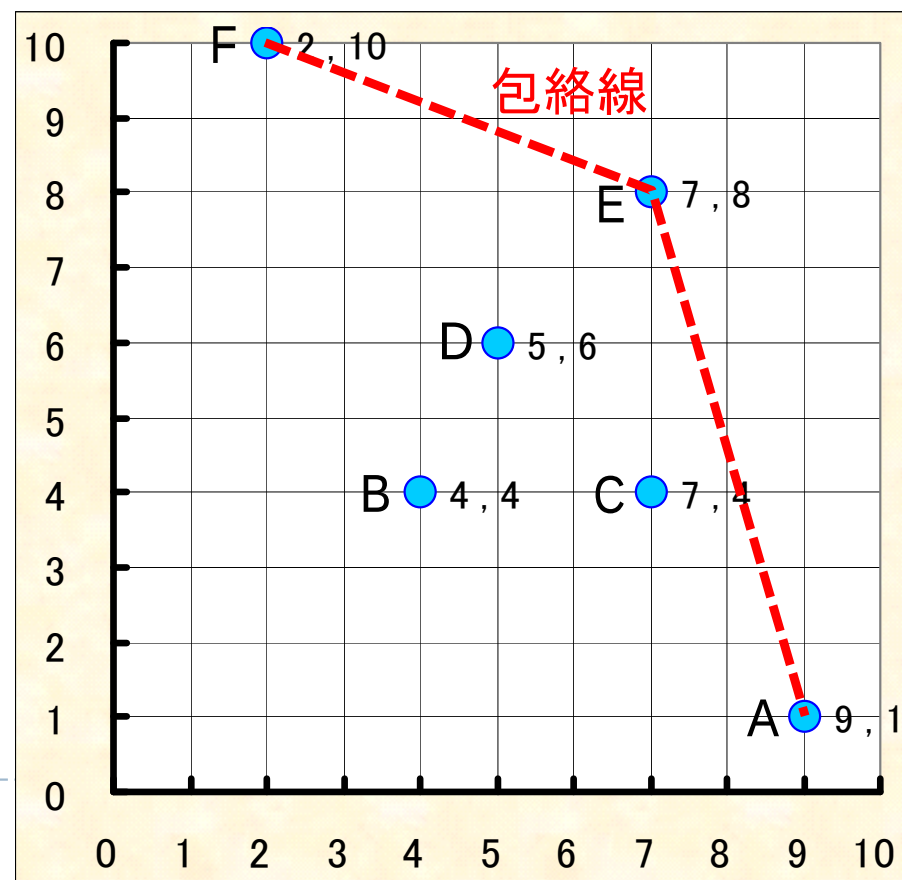
考えよう

- ▶ あなたは6つの店舗をもつ社長だ. 今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし, 次年度も切磋琢磨させたい. さて, あなたはどの店舗を表彰するのか?

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500



	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10



Contents

▶ DEAとは？

- ▶ DMU(意思決定主体)
- ▶ 効率性: DMUの入力・出力と効率値

▶ DEAの基本的モデル

- ▶ CCRモデル

▶ 生産可能集合とその他のモデル

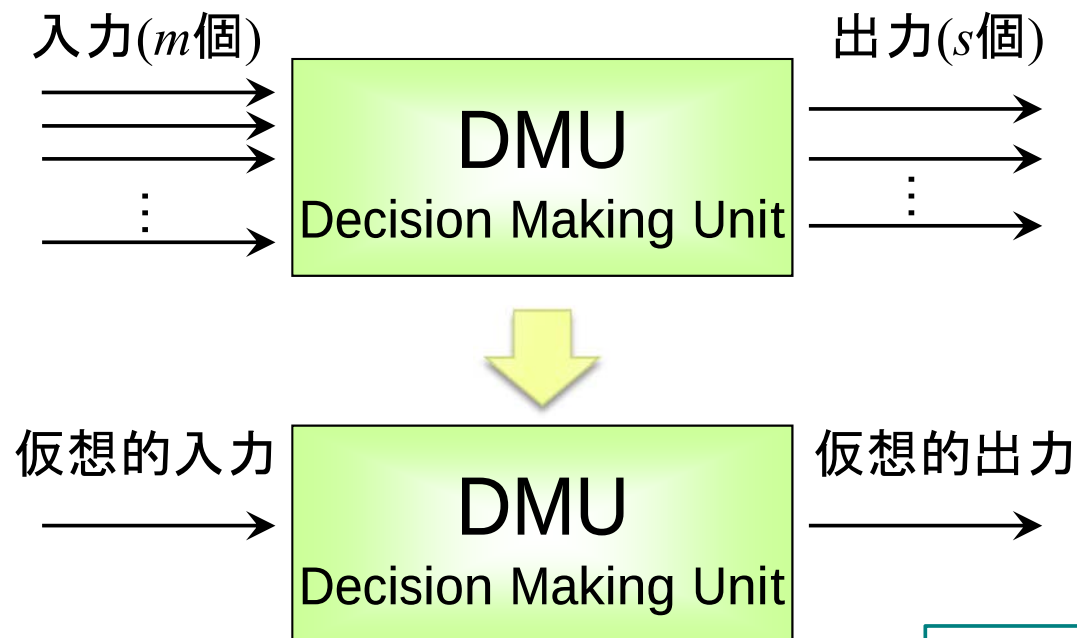
- ▶ 凸包モデル
- ▶ BCCモデル
- ▶ IRSモデル
- ▶ DRSモデル
- ▶ GRSモデル



DEAとは？

▶ DEA (Data Envelopment Analysis)

{ envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒



比率尺度を効率性として見なして相対比較

$$\text{DMUの変換効率} = \frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$$

最も変換効率の良いDMUを基準として、他のDMUの非効率性を算出し、比較する。
ただし、変換率はDMU毎に最も有利になるように計算。

DEAとは？

▶ 2入力・1出力

▶ 例) 店舗売上

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1 従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2 売場面積	3	4	1	2.1	9	2	6	6	8
出力 売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24



DEAとは？

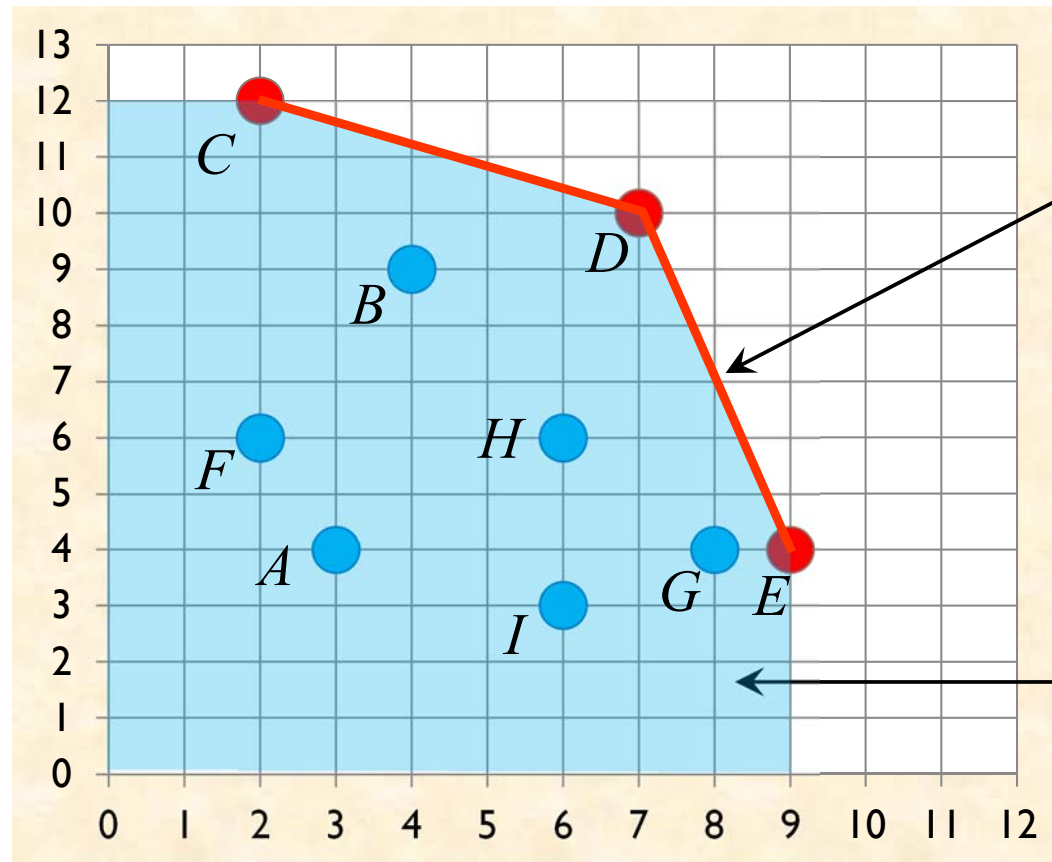
出力/入力1

出力/入力2

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

非効率的DMU



効率的フロンティア

生産可能集合

DEAとは？

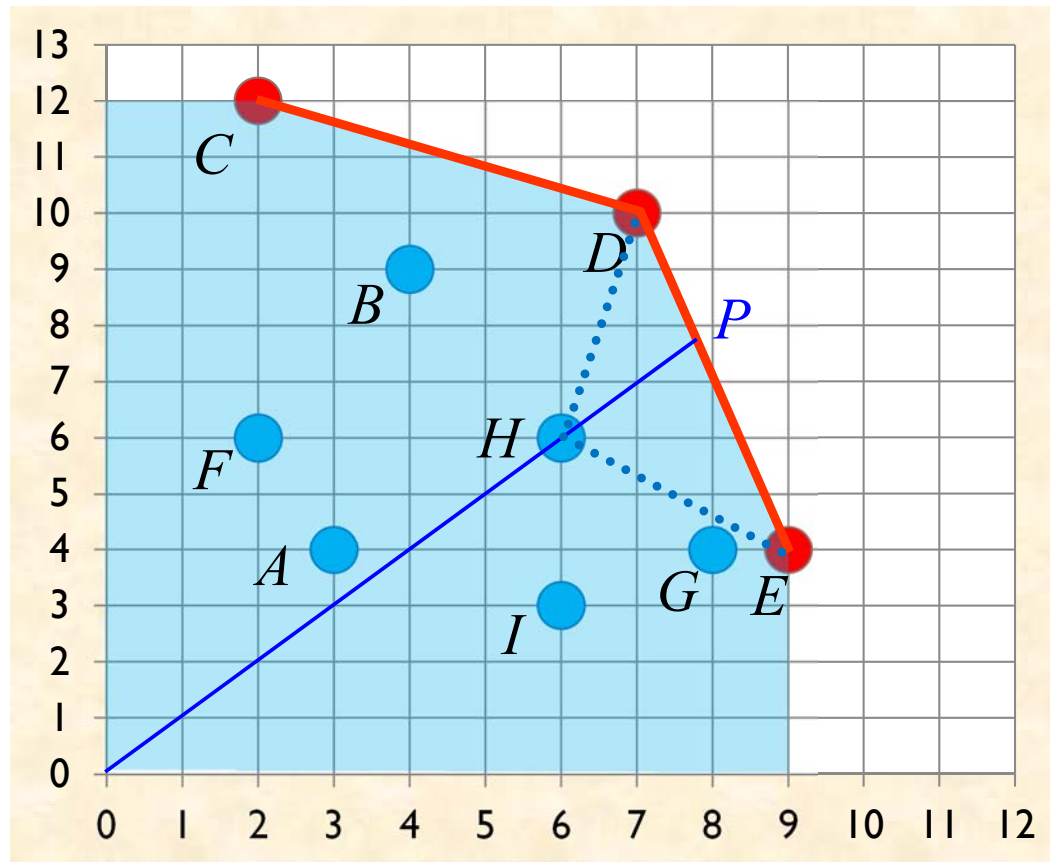
出力/入力1

出力/入力2

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

非効率的DMU

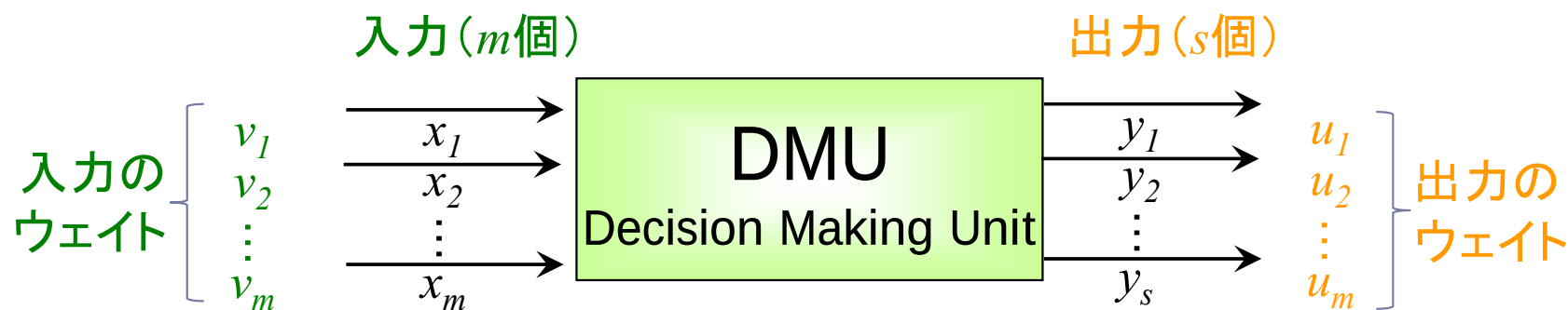


効率的DMU C, D, E の
効率値は 1.0

非効率的DMU H の
非効率値は OH/OP
であり
 H の有位(参照)集合
は D と E

DEA : CCRモデル

▶ 多入力・多出力



➡

$$\begin{cases} \text{仮想的入力} := v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m \\ \text{仮想的出力} := u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s \end{cases}$$

➡

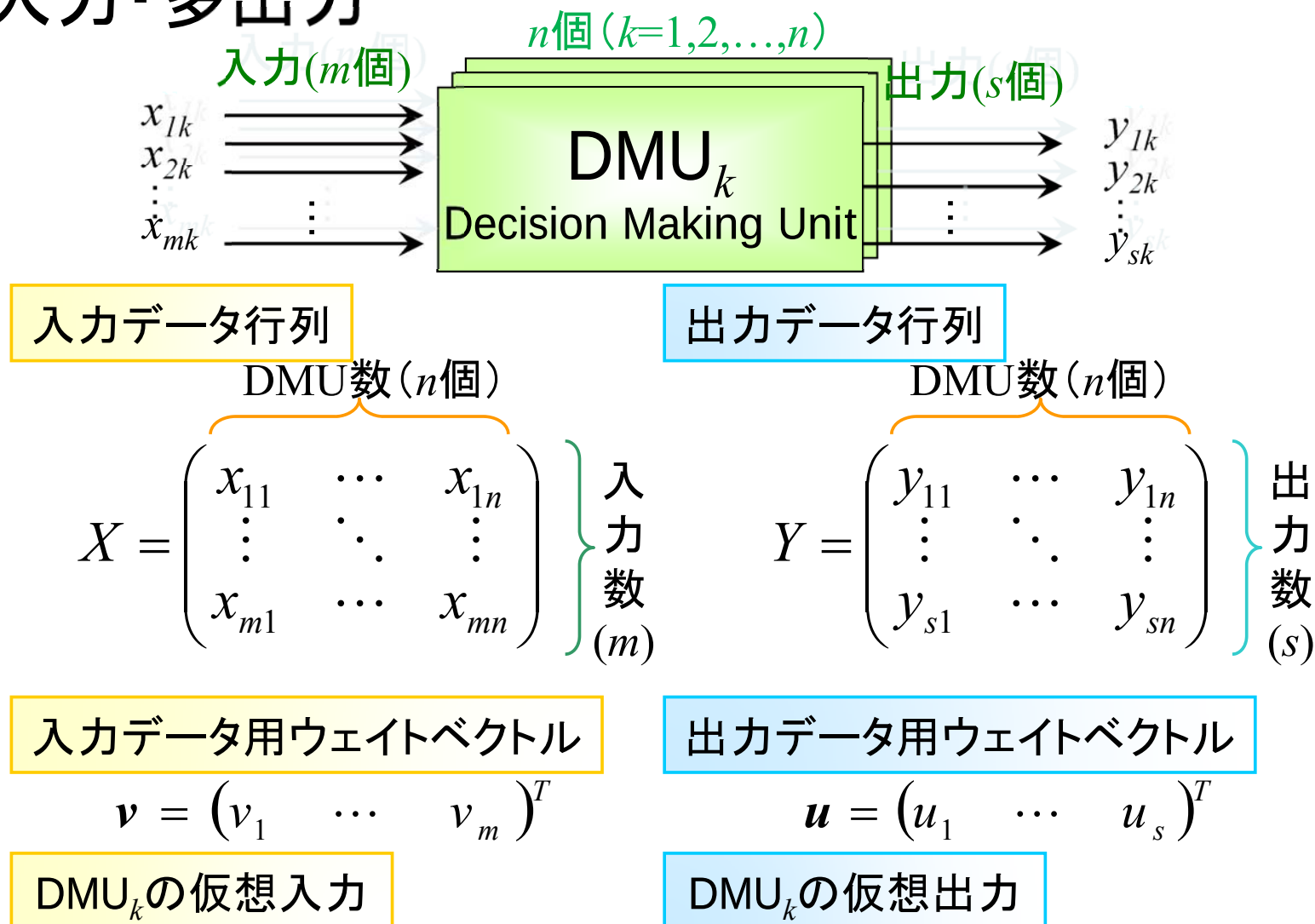
$$\text{効率性 (生産性)} := \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m}$$

入力・出力のウェイトは可変

⇔ 固定ウェイト

DEA : CCRモデル

▶ 多入力・多出力



$$q_k := \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \quad (k = 1, \dots, n) \quad r_k := \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} \quad (k = 1, \dots, n)$$

DEA : CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 測定対象DMU_o ($o=1, \dots, n$)のウェイトを計算する

分数計画問題	$\langle FP_o \rangle$	$\begin{aligned} \max. \theta_o &:= \frac{u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}} \\ s.t. \quad &\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k=1, \dots, n) \\ &v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ &u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$	対象のDMUの 効率性を最大化
		全てのDMUの 効率性は1以下	
同値 線形計画問題	$\langle LP_o \rangle$	$\begin{aligned} \max. \theta_o &:= u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \\ s.t. \quad &v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \\ &u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n) \\ &v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ &u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$	$\langle FP_o \rangle$の目的関数について 分母を1にし, 分子を最大化
		$\langle FP_o \rangle$の制約の分母を払う	

注) 全部でn個のLPを解く!

DEA : CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 効率性について

$$\begin{array}{l|l} \langle LP_o \rangle & \begin{array}{l} \max. \theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} \\ s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1 \\ u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \dots, n) \\ v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Def: DMU_o がD効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* = 1$
 DMU_o がD非効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* < 1$

注) D効率的だからといって効率的とは言えない

Lem: DMU_o がD非効率的, 即ち $\theta_o^* < 1$ なら

$$\exists k \in \{1, \dots, n\}, u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk}$$

E_o に属するDMUはD効率的

この等号を満たすkの集合を DMU_o の優位集合(or 参照集合)という

Def: DMU_o の優位集合(or 参照集合)

$$E_o := \left\{ k \in \{1, \dots, n\} \mid u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk} \right\}$$

効率的フロンティアの一部を形成

DEA : CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ $\langle LP_o \rangle$ の双対問題と最適解について

CCRモデル

$$\begin{aligned} \langle LP_o \rangle \quad & \max. \theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} \\ & s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1 \\ & \quad \quad u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \dots, n) \\ & \quad \quad v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ & \quad \quad u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle D_o \rangle \quad & \min. \theta \\ & s.t. \quad \theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \cdots + x_{in} \lambda_n) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & \quad \quad (y_{j1} \lambda_1 + \cdots + y_{jn} \lambda_n) - y_{io} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, s) \\ & \quad \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{aligned}$$

DMU_oの入力*i* 入力*i*の重み和

出力*j*の重み和 DMU_oの出力*j*

双対問題

$$\begin{cases} d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1} \lambda_1 + \cdots + x_{in} \lambda_n) & (i = 1, \dots, m) \\ d_j^y := (y_{j1} \lambda_1 + \cdots + y_{jn} \lambda_n) - y_{io} & (j = 1, \dots, s) \end{cases}$$

入力の余剰 出力の不足

DEA : CCRモデル

▶ 多入力・多出力

入力の余剰の和

出力の不足の和

▶ 入力の余剰と出力の不足を求める

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + \cdots + d_m^x) + (d_1^y + \cdots + d_s^y) \\ \text{s.t.} & d_i^x = \theta^* x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \quad (i = 1, \cdots, m) \\ & d_j^y = (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \quad (j = 1, \cdots, s) \\ & \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0 \\ & d_1^x, \cdots, d_m^x \geq 0 \\ & d_1^y, \cdots, d_s^y \geq 0 \end{aligned}$$

<LP_o>の最適値

DEAの実行手順

<D_o>を解いて最適解 $(\theta^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*)$ を得た後,
このLPを解いて最適解 $(d_1^{x*}, \cdots, d_m^{x*}, d_1^{y*}, \cdots, d_s^{y*})$ を得る.

Def: DEA効率性の定義

$\theta^* = 1, (d_1^{x*}, \cdots, d_m^{x*}, d_1^{y*}, \cdots, d_s^{y*}) = \mathbf{0}$ となるDMUはDEA効率的
それ以外のDMUはDEA非効率的

DEA：CCRモデル

▶ 例題

▶ 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2



$$\text{効率性(生産性)} := \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + v_3 \times x_3}$$

DEA : CCRモデル

▶ 学生A(DMU_A)の効率性を求める

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

分数計画問題 $\langle FP_A \rangle$

$$\begin{aligned}
 \max. \theta &:= \frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \\
 s.t. \quad &\frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \leq 1 \\
 &\frac{60u_1 + 90u_2}{20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\
 &\frac{30u_1 + 55u_2}{15v_1 + v_2 + 0.8v_3} \leq 1 \\
 &\frac{20u_1 + 70u_2}{30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\
 &\frac{70u_1 + 24u_2}{20v_1 + 0.9v_2 + v_3} \leq 1 \\
 &\frac{50u_1 + 60u_2}{16v_1 + v_2 + v_3} \leq 1 \\
 &v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



線形計画問題 $\langle LP_A \rangle$

$$\begin{aligned}
 \max. & 40u_1 + 30u_2 \\
 s.t. & 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 = 1 \\
 & 40u_1 + 30u_2 \leq 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 \\
 & 60u_1 + 90u_2 \leq 20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3 \\
 & 30u_1 + 55u_2 \leq 15v_1 + v_2 + 0.8v_3 \\
 & 20u_1 + 70u_2 \leq 30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3 \\
 & 70u_1 + 24u_2 \leq 20v_1 + 0.9v_2 + v_3 \\
 & 50u_1 + 60u_2 \leq 16v_1 + v_2 + v_3 \\
 & v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

(P) 主問題



(D) 双対問題

$$\begin{aligned}
 \min. & \theta \\
 s.t. & 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\
 & 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 & \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 & (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\
 & (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\
 & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

DEA : CCRモデル

▶ 学生A(DMU_A)の効率性を求める

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

線形計画問題 $\langle LP_A \rangle$

min. θ

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\
 & 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 & \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 & (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\
 & (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\
 & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$



$\langle LP_A \rangle$ の最適値
 $\theta^*=1$ なら
 次のLPも解く

max. $(d_1^x + d_2^x + d_3^x) + (d_1^y + d_2^y)$

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & d_1^x = 40 \cdot \theta^* - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \\
 & d_2^x = 0.8 \cdot \theta^* - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \\
 & d_3^x = \theta^* - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\
 & d_1^y = (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \\
 & d_2^y = (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \\
 & d_1^x, d_2^x, d_3^x, d_1^y, d_2^y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

DEA : CCRモデル

▶ 例題2 ([3] p.15)

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

DMU A についての問題

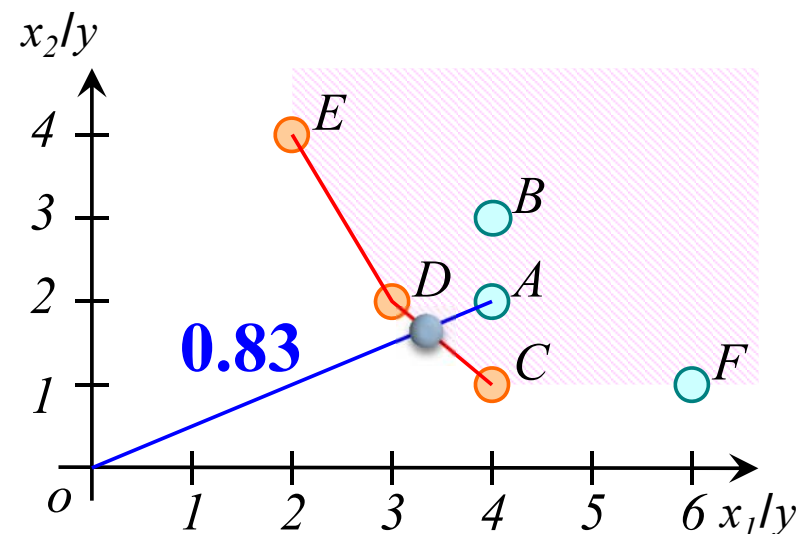
min. θ

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\
 & 2\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\
 & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

➡ 最適解: $\theta^* = 0.83$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 0.33, 0.67, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{入力) } 0.83 \times A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \\ \text{出力) } \quad \quad A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{input) } 0.83 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.33 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.67 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{output) } \quad (1) = 0.33 \times (1) + 0.67 \times (1) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

➡ DMU A はDEA非効率的で, 優位集合は C と D



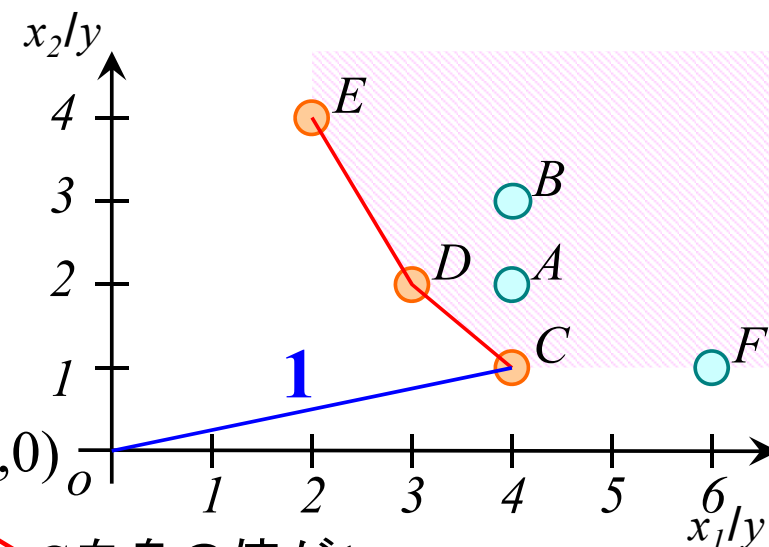
DEA : CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

例題2 DMU C についての問題

$$\begin{aligned}
 &\min. \theta \\
 &s.t. \quad 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\
 &\quad \theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 &\quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\
 &\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

→ 最適解: $\theta^* = 1$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$



DMU C の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned}
 &\max. (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\
 &s.t. \quad d_1^x = 1 \cdot 4 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\
 &\quad d_2^x = 1 \cdot 1 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\
 &\quad d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\
 &\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{入力) } 1 \times C = 1 \times C \\ \text{出力) } C = 1 \times C \end{cases}$$

→ 最適解: $(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (0, 0, 0)$

→ 入力余剰・出力不足なし → CはDEA効率的

$$\begin{cases} \text{input) } 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{output) } (1) = 1 \times (1) + (0) \end{cases}$$

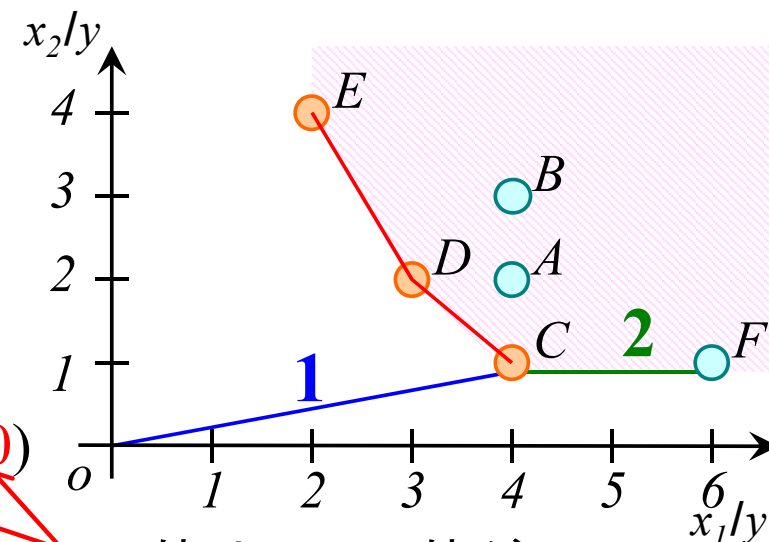
DEA : CCRモデル

▶ 例題2 DMU F についての問題

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 &\min. \theta \\
 &s.t. \quad 6\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\
 &\quad \theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 &\quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\
 &\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

→ 最適解: $\theta^* = 1$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$



Fの値は0でCの値が1

$$\begin{cases}
 \text{入力)} & 1 \times F \geq 1 \times C \\
 \text{出力)} & F \leq 1 \times C
 \end{cases}$$

DMU C の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned}
 &\max. (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\
 &s.t. \quad d_1^x = 1 \cdot 6 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\
 &\quad d_2^x = 1 \cdot 1 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\
 &\quad d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\
 &\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0
 \end{aligned}$$

→ 最適解: $(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (2, 0, 0)$

→ 入力余剰あり → FはDEA非効率的

$$\begin{cases}
 \text{input)} & 1 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{output)} & (1) = 1 \times (1) + (0)
 \end{cases}$$

優位集合はC(Cに比較して入力余剰2だけ非効率)

DEAの特徴

▶ 特徴（長所・短所）

- ▶ 他と異なった特徴を持つDMUは, DEA効率的と判断されやすい
→ 他と異なることが良いことの場合は, DEAは良い指標
- ▶ 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
- ▶ DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある



例題（DEAを用いた野球打者評価）

CCRモデルによる

- ▶ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について、DEAにより評価



		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6
:	:	:	:	:	:	:	:	:

データ(一部加工)
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題 (DEAを用いた野球打者評価)

CCRモデルによる

- ▶ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について, DEAにより評価

- ▶ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗(横)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta=0.8007$, $\lambda_3=0.1638$, $\lambda_5=0.2670$, $\lambda_8=0.1765$, $\lambda_{37}=0.3476$


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{各入力)} \quad 0.8007 \times \text{石井琢朗} \geq 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)} \\ \text{各出力)} \quad \text{石井琢朗} \leq 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)} \end{array} \right.$$

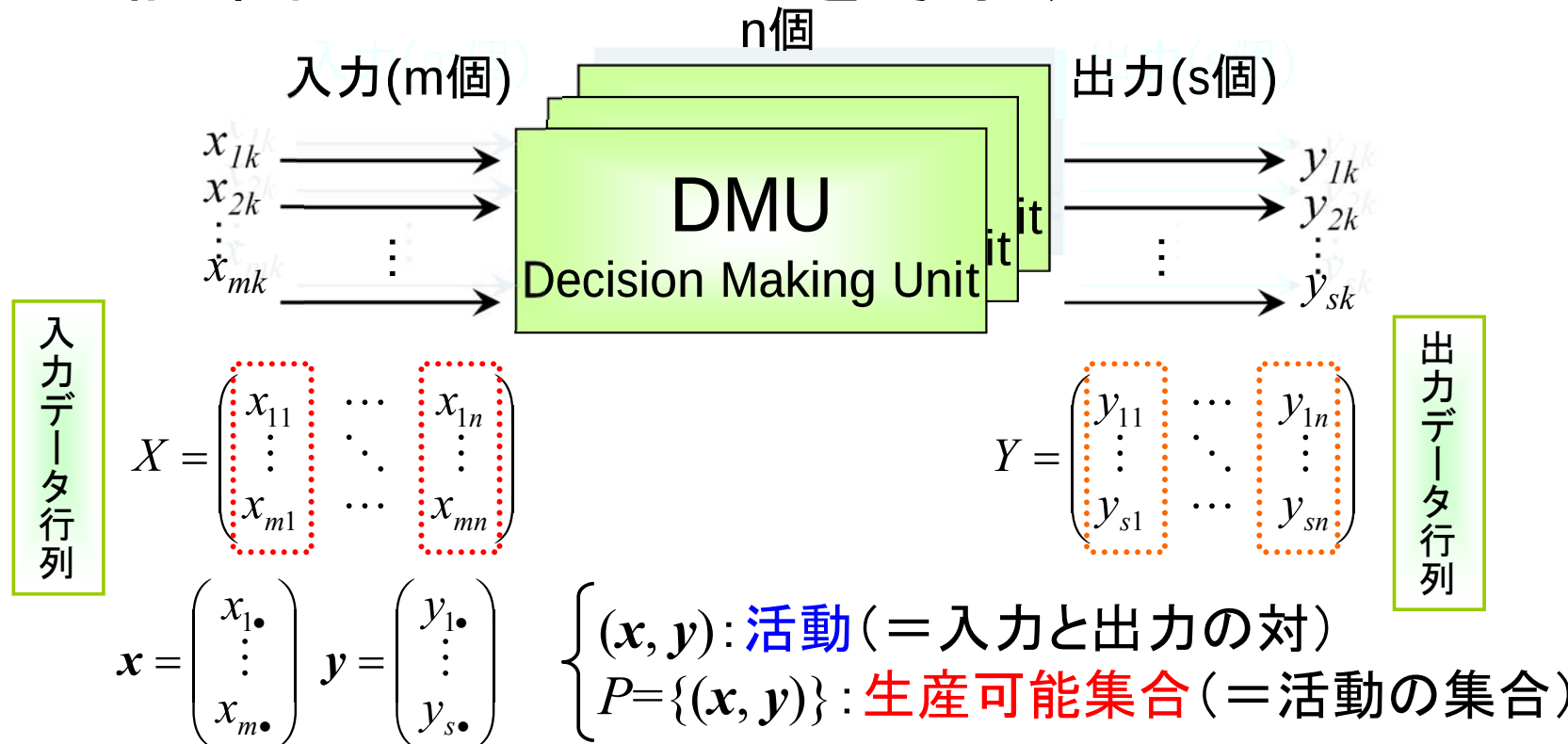
- ▶ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏(巨)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta=0.9053$, $\lambda_1=0.3890$, $\lambda_3=0.1581$, $\lambda_4=0.0225$, $\lambda_7=0.2917$


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{各入力)} \quad 0.9053 \times \text{二岡智宏} \geq 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)} \\ \text{各出力)} \quad \text{二岡智宏} \leq 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)} \end{array} \right.$$

生産可能集合とモデル

▶ 生産可能集合 P からモデルを考察する



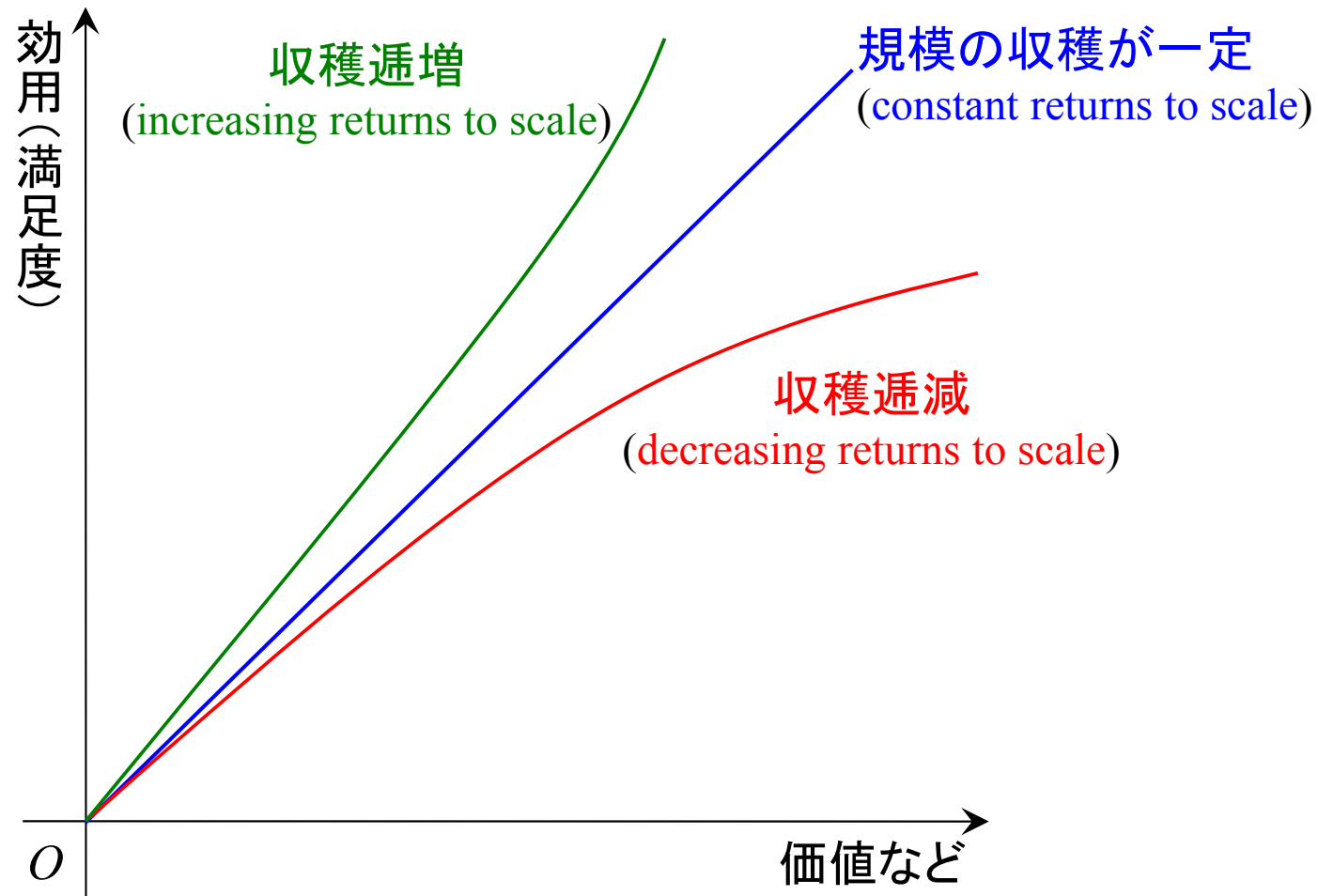
❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
 (constant returns to scale)

生産可能集合とモデル

▶ 「規模の収穫が一定」とは？



注：一般には価値が大きくなるほど、効用の増加量は減る場合が多い。

生産可能集合

$$\begin{array}{ll}
 \min. & \theta \\
 \text{s.t.} & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\
 & (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\
 & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0
 \end{array}$$

CCRモデル

Charnes-Cooper-Rhodes

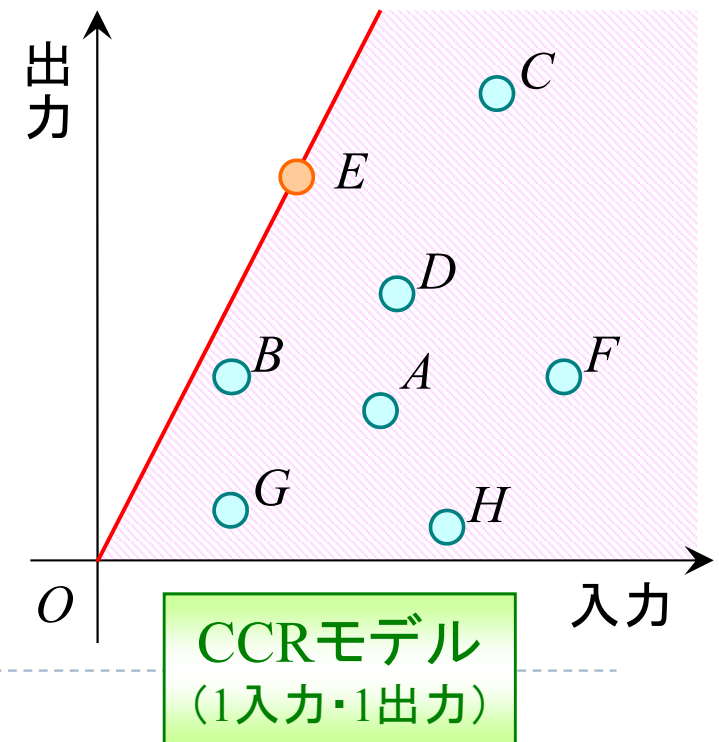
▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (**CCRモデル**)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

$$\iff P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$



生産可能集合

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

ベクトルの線形結合

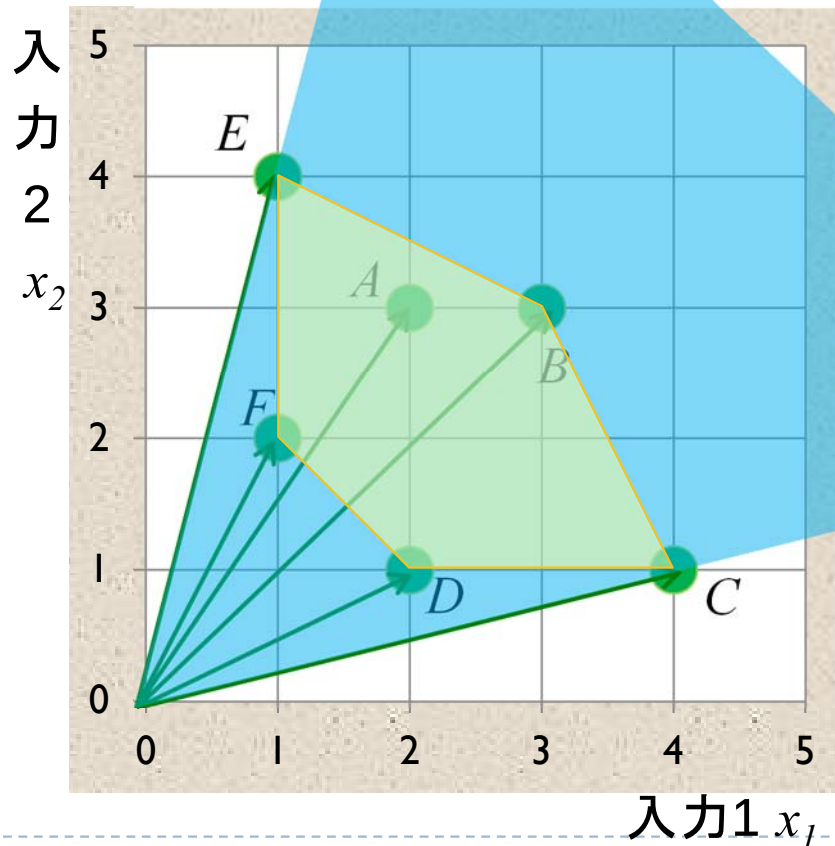
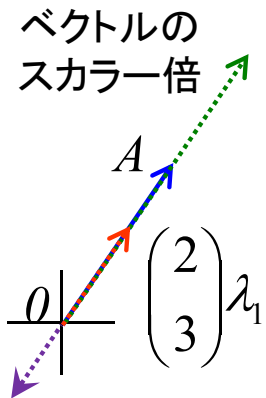
対象DMUの入力を下から支える

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注: 入力は
小さい方
が良い



6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$: 制限なし → 全空間
※) 厳密には, 基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
CCRモデル
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化)
凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)
L, Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

ベクトルの線形結合

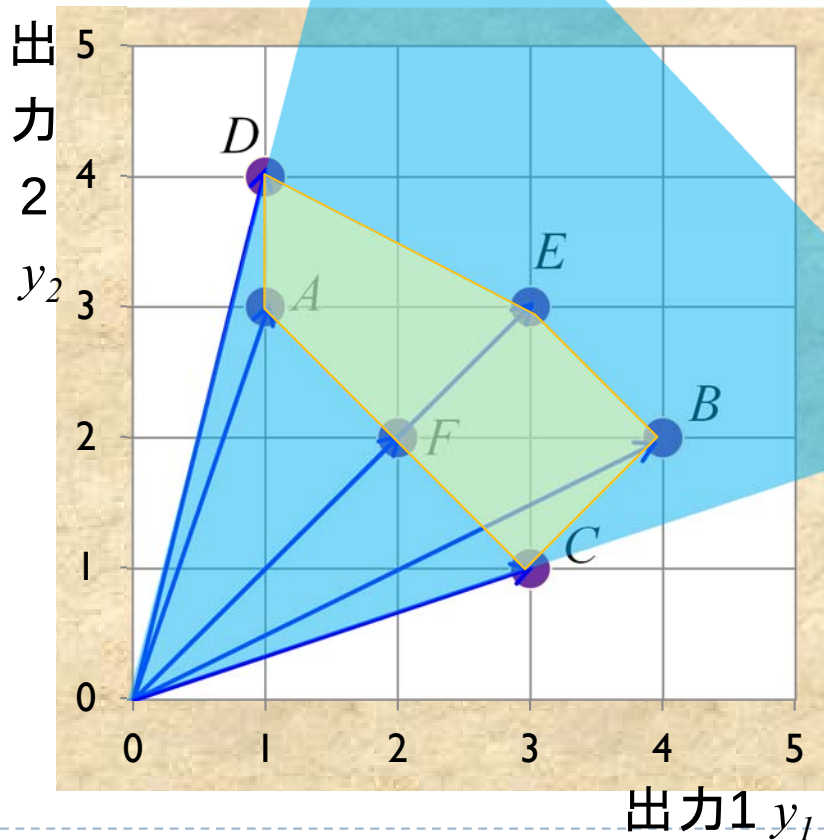
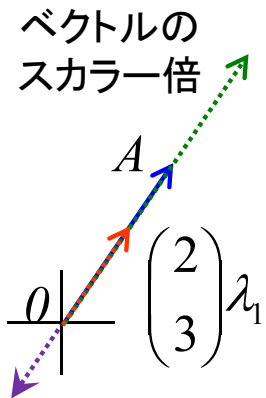
対象DMUの出力を上から押さえる

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注: 出力は
大きい方
が良い



6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$: 制限なし → 全空間
※) 厳密には, 基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
CCRモデル
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化)
凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)
L, Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合とモデル

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

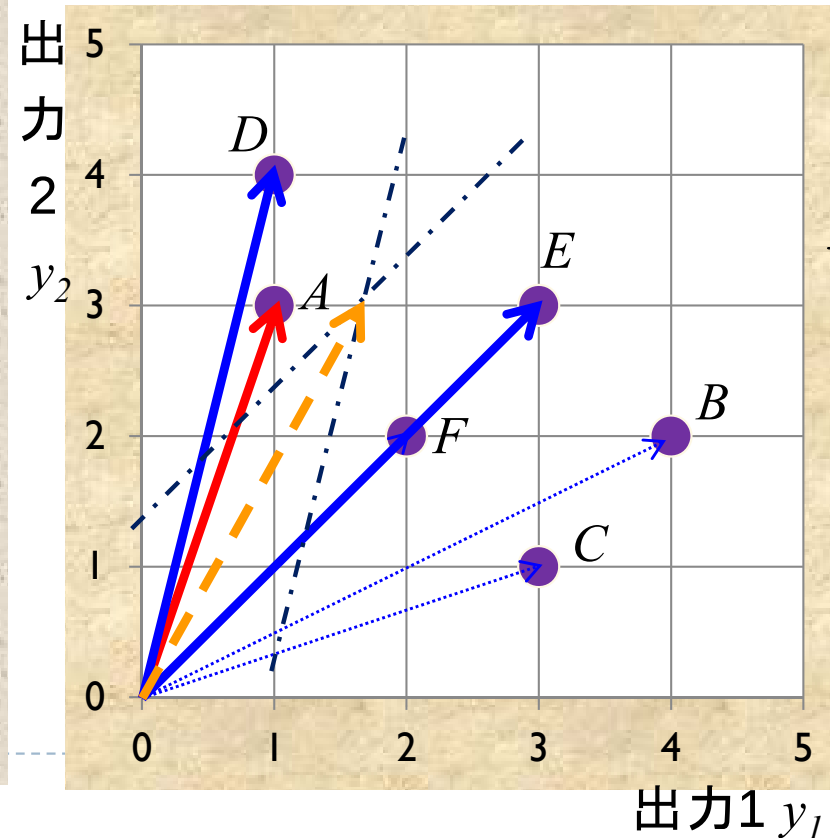
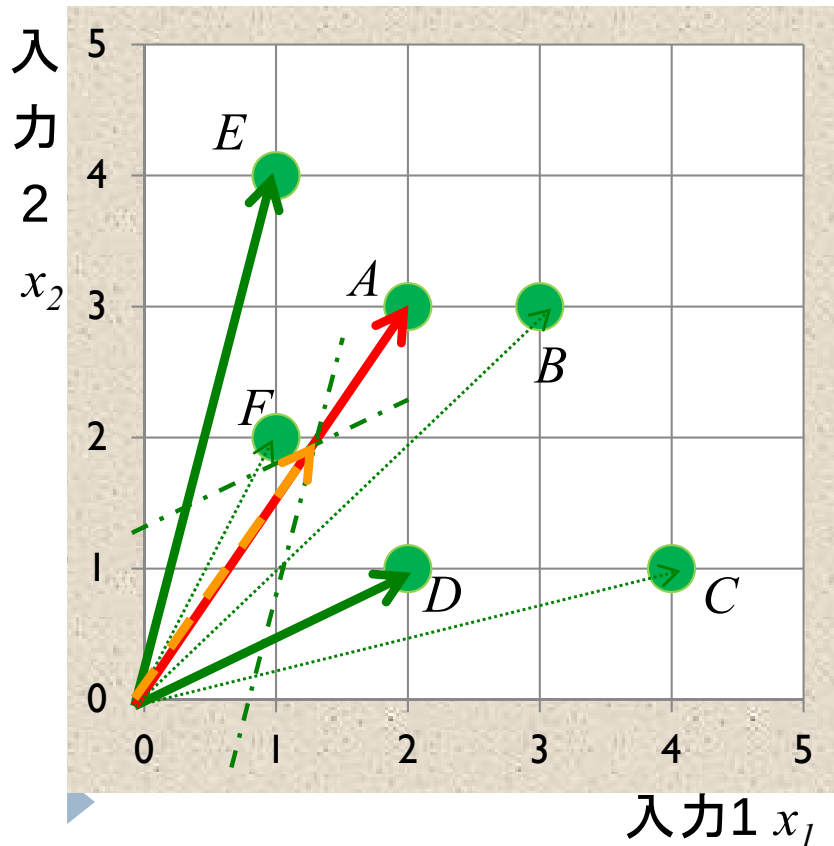
▶ DEA (CCRモデル)

$$\begin{aligned}
 & \min. \theta \\
 & s.t. \quad \theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\
 & \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\
 & \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

DMU Aについて解くと、最適解

$$\theta = 0.65625, \lambda = (0, 0, 0, 0.46875, 0.375, 0)$$

$$\begin{cases}
 \text{input) } 0.65625 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.375 \\
 \text{output) } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 0.375
 \end{cases}$$



$$\begin{cases}
 \text{input) } \begin{pmatrix} 1.313 \\ 1.969 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1.313 \\ 1.969 \end{pmatrix} \\
 \text{output) } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1.594 \\ 3.000 \end{pmatrix}
 \end{cases}$$

注: 凸包モデルはCCRを含む
($L=0, U=\infty \rightarrow \text{CCR}$)

生産可能集合とモデル

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する (k を制限する)
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

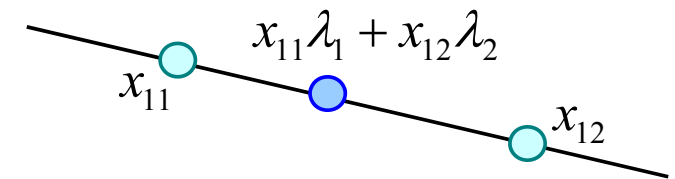
CCRモデルの(2)
を一般化する

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

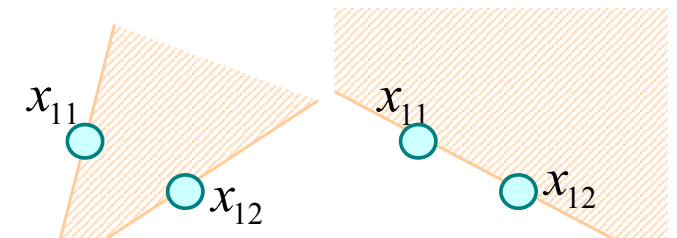
実際の問題は
 θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

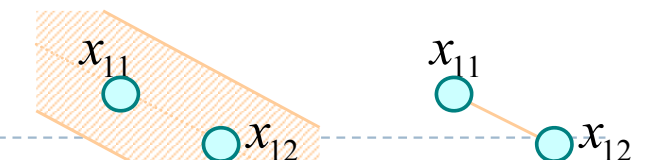
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \quad L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$$



$\left[\begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2 \text{ の条件による} \\ x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 \text{ の取り得る範囲} \end{array} \right]$



$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \rangle$ $\langle \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \rangle$



$\langle L \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq U \rangle$ $\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rangle$

生産可能集合とモデル

$$\begin{array}{ll}
 \min. & \theta \\
 \text{s.t.} & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\
 & (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\
 & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0
 \end{array}$$

CCRモデル

Charnes-Cooper-Rhodes

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル0: CCRモデル [$L=0, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫一定

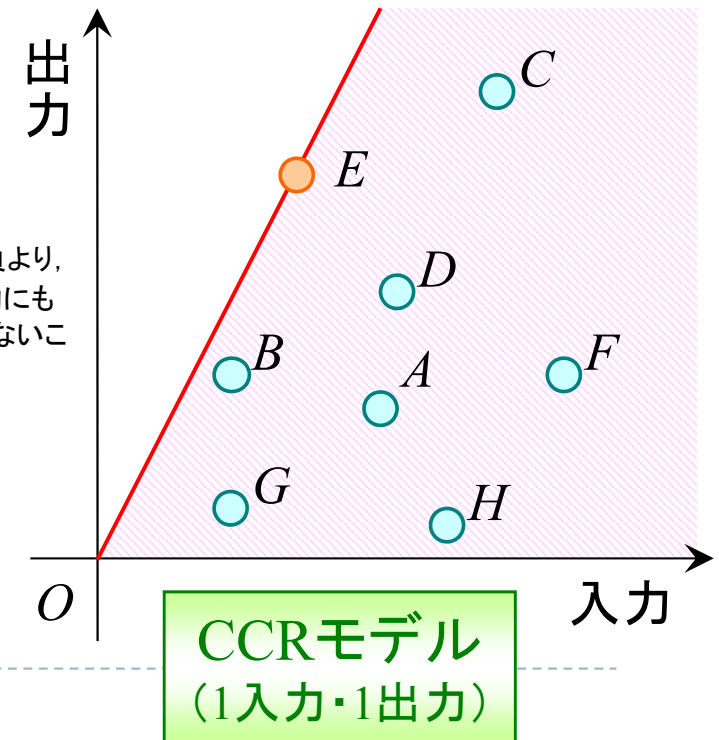
$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

※) λ 非負より,
何の制約にも
なっていないこと
に注意



生産可能集合とモデル

Banker-Charnes-Cooper

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル1: BCCモデル [$L=U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

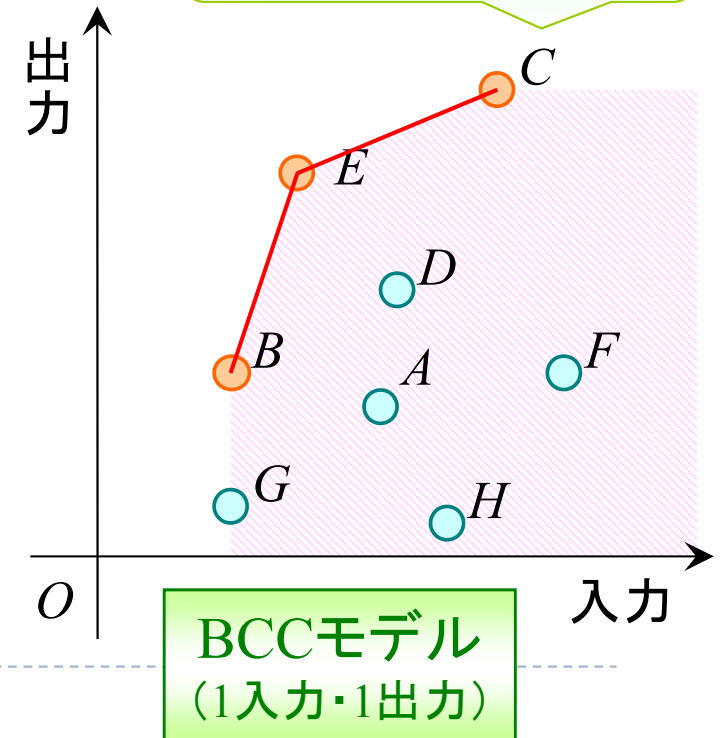
$$e\lambda = 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$



生産可能集合とモデル

Increasing Returns to Scale

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル2: IRSモデル [$L=1, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

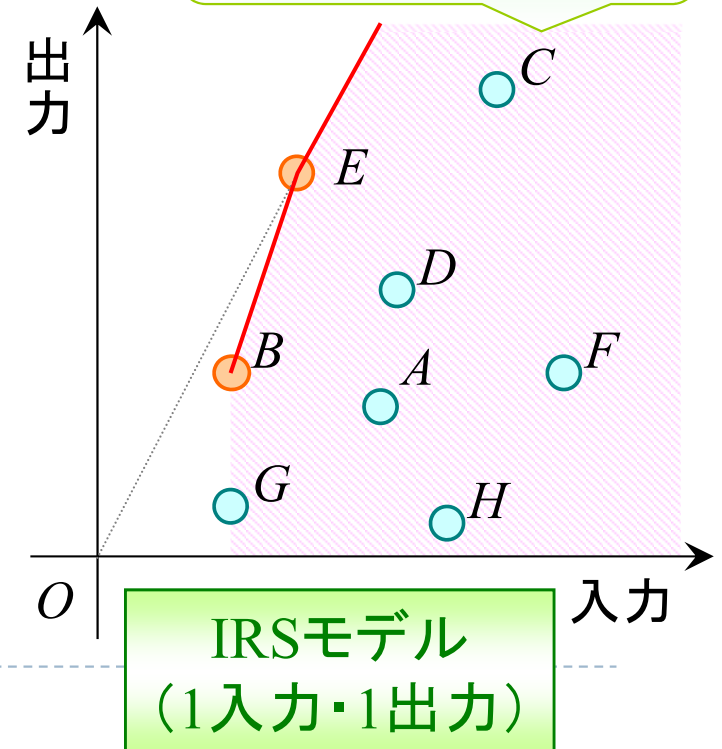
$$e\lambda \geq 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 1$$



生産可能集合とモデル

Decreasing Returns to Scale

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル3: DRSモデル[L=0, U=1])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逨減

比較的規模の大きい活動の効率性を重視

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

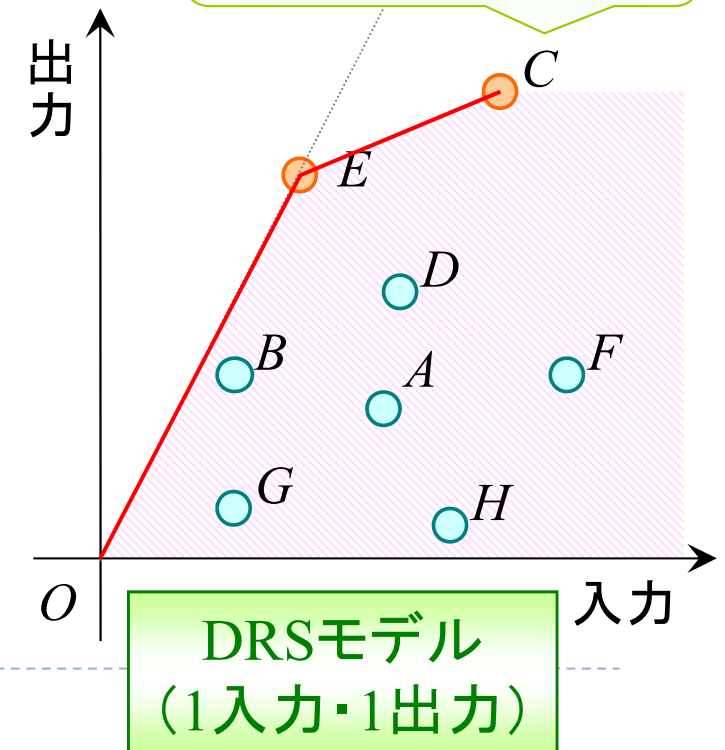
$$e\lambda \leq 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1$$



生産可能集合とモデル

現存の活動の規模を
ある程度縮小拡大した
ものまで認める立場

General Returns to Scale

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル4: GRSモデル [$L \leq 1, U \geq 1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

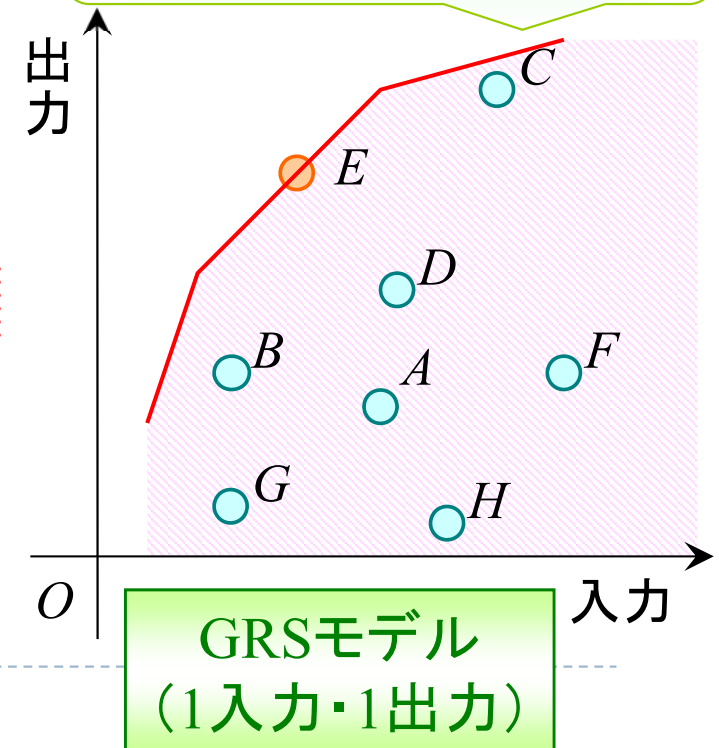
$$\text{ex) } 0.8 \leq e\lambda \leq 1.2$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1.2$$



参考文献

- [1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978
- [2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連(1993)
- [3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店(2001)
- [4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- [5] ...

