

# 問題解決技法入門

## 2. 社会的選択：安定性 安定結婚問題

堀田 敬介

# 浮気しない？カップル

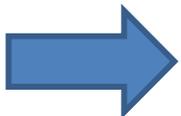
- 6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の**好き嫌い**を考えずに強引にくっつけちゃうと、**浮気する人**が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？



どうすれば浮気しないの？

浮気しないってどういうこと？

浮気ってどういう状況で起こる？

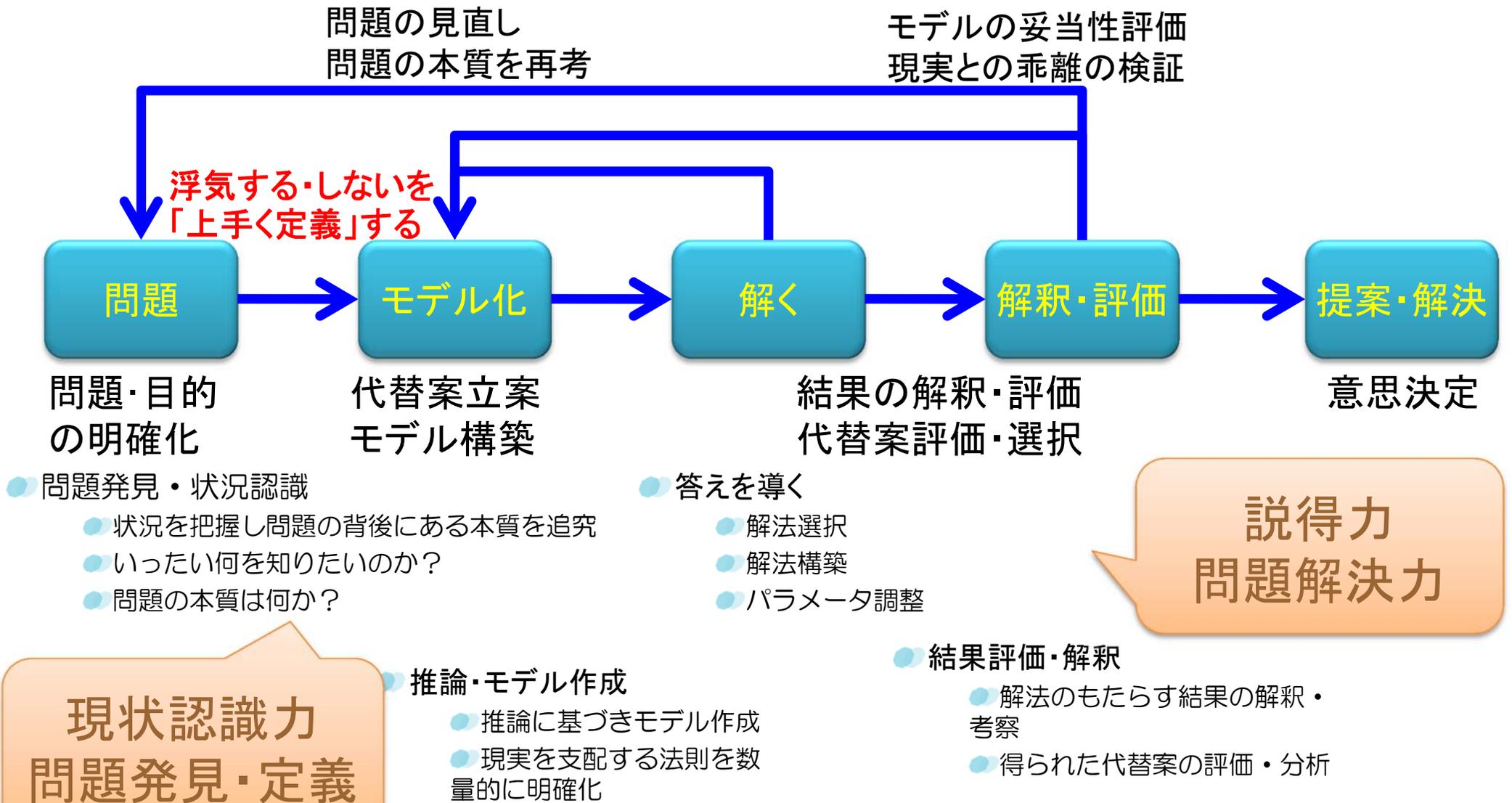


浮気する・しないを「**上手く定義**」する

# 問題解決

論理的思考力  
データ分析, 統計学  
数理的アプローチ

## 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



# 安定結婚問題

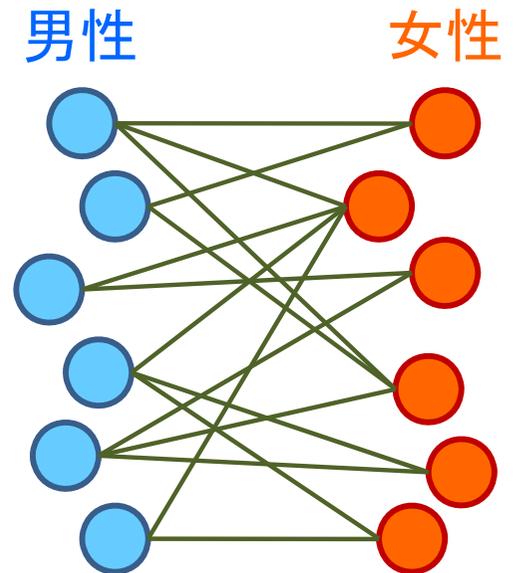
- $n$ 人の男性の集合と,  $m$ 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけたい.

安定マッチング

浮気できない

不安定なマッチング

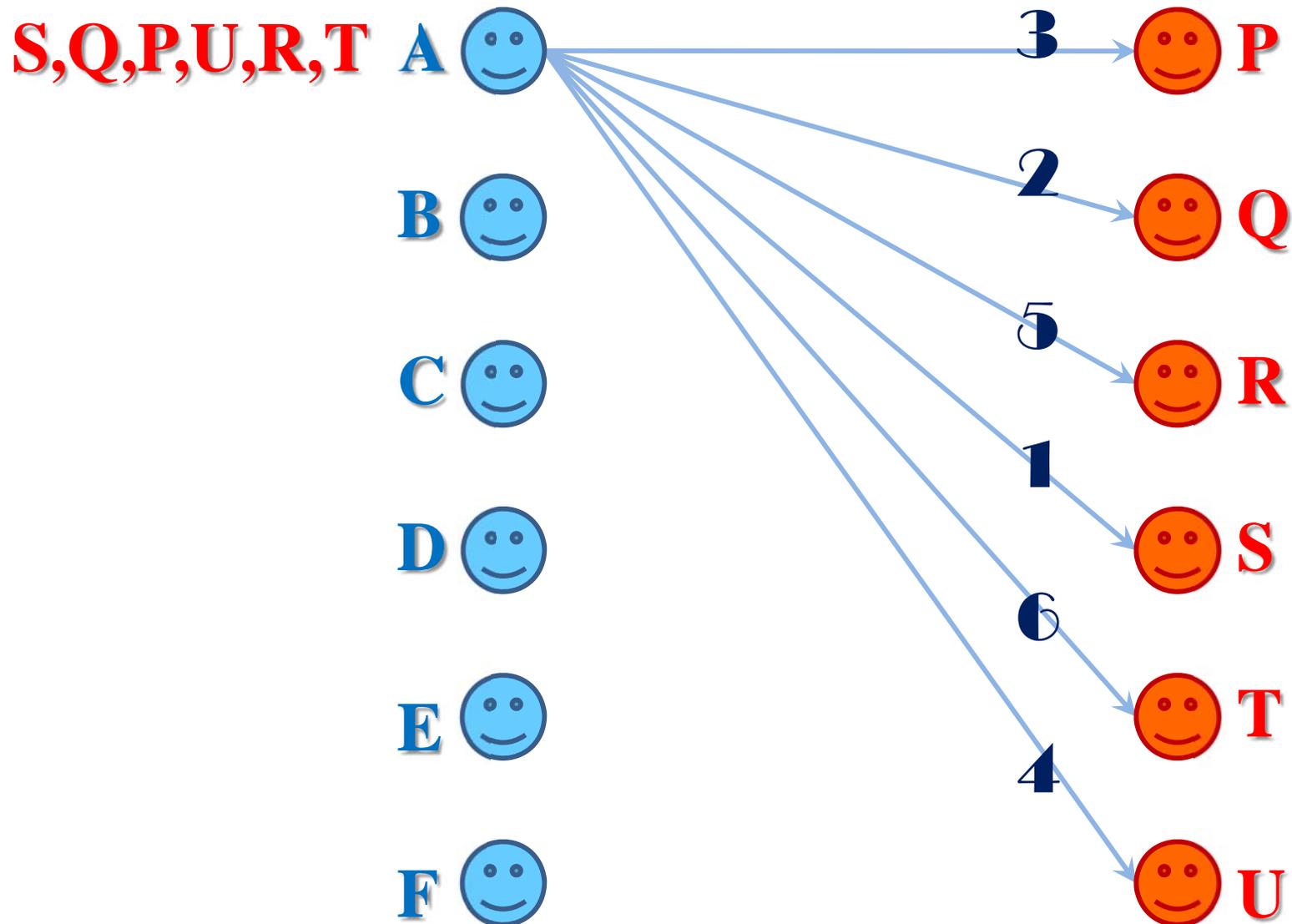
浮気できる



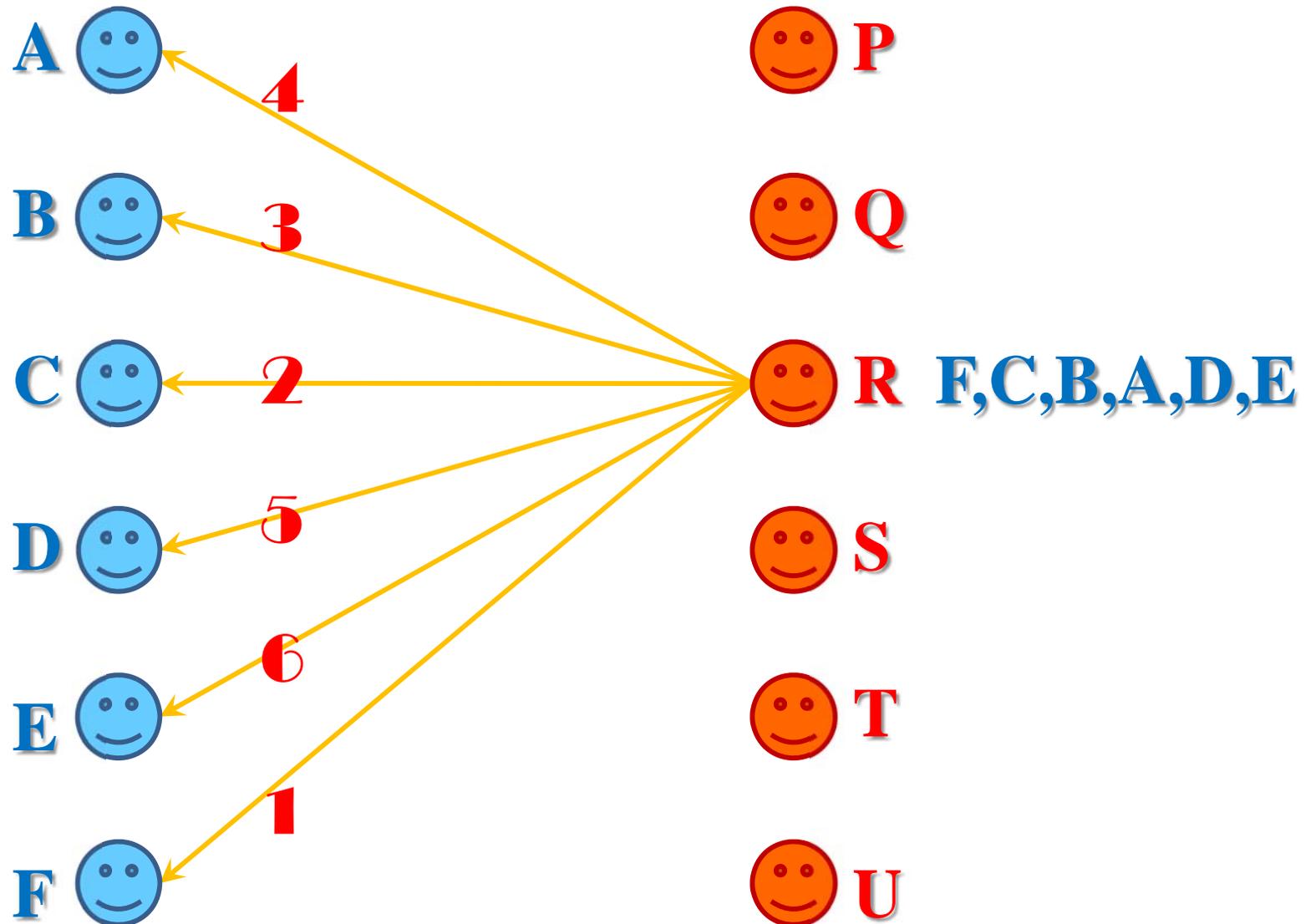
グラフ理論

点 (node) と枝 (edge) とその  
接続関係に関する理論・研究

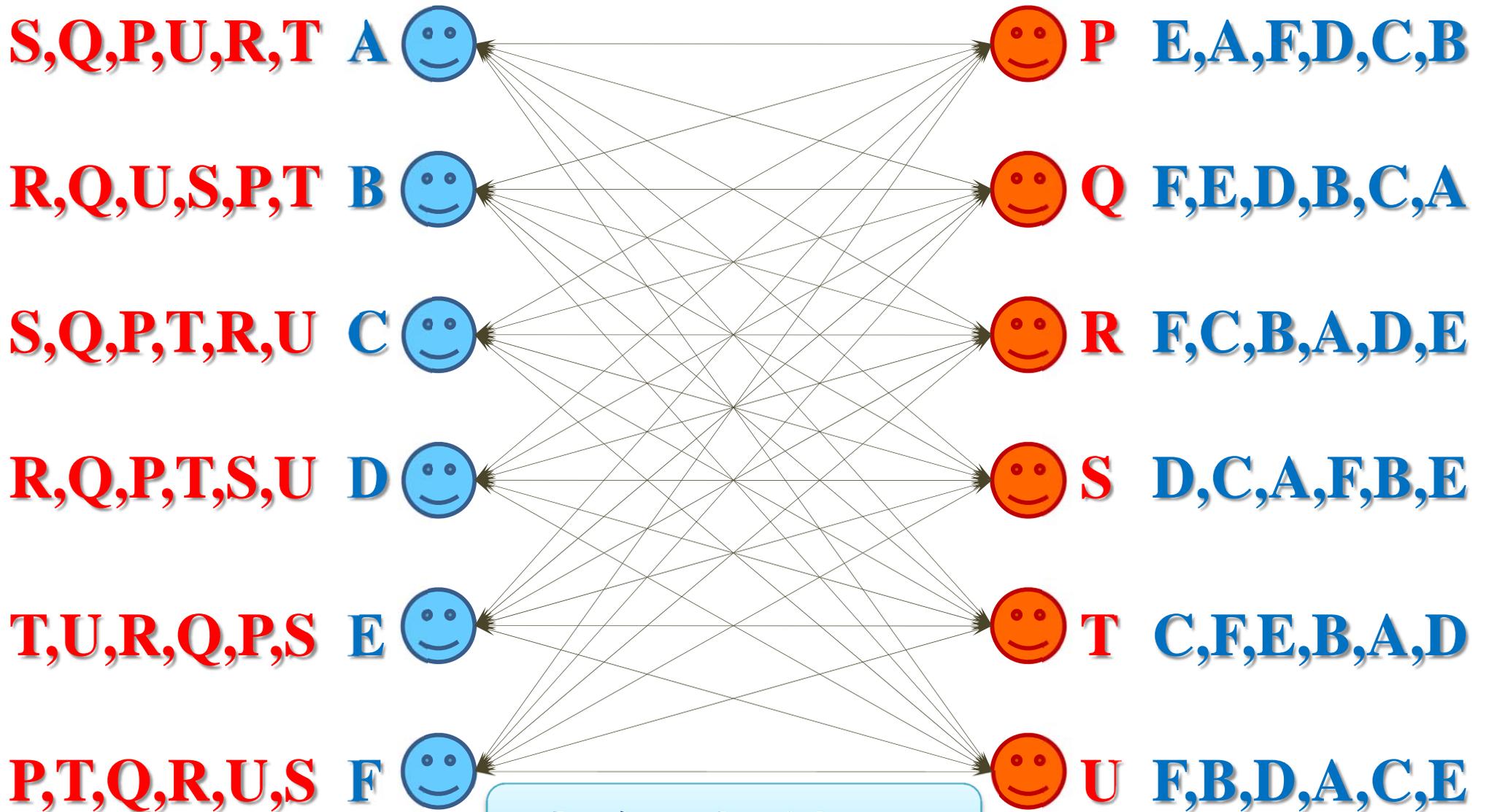
# 安定結婚問題 (各自の選好順序)



# 安定結婚問題 (各自の選好順序)



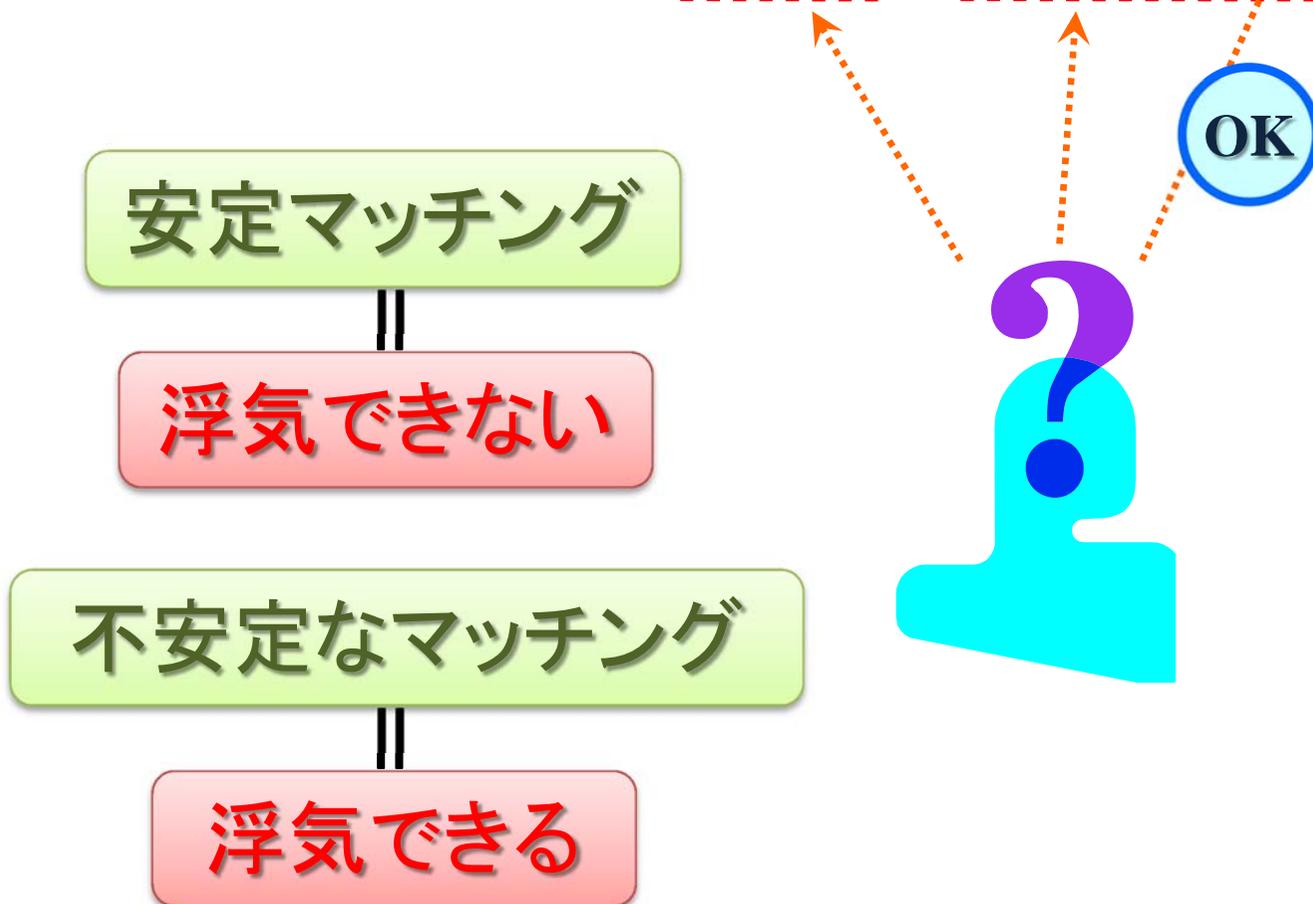
# 安定結婚問題 (各自の選好順序)



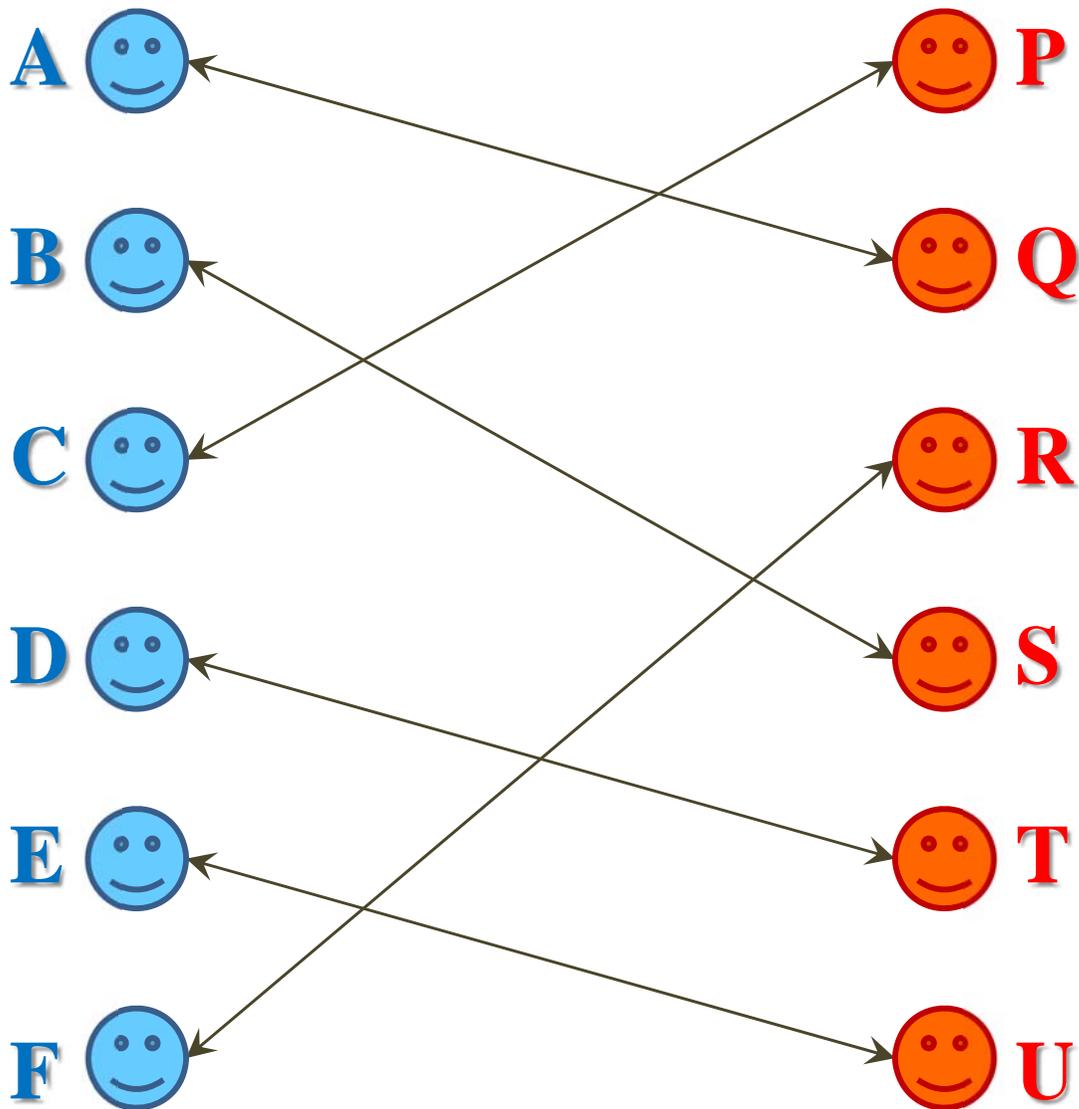
完全2部グラフ

# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と、 $m$ 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つけない。



# 安定結婚問題 (マッチング)



## マッチング

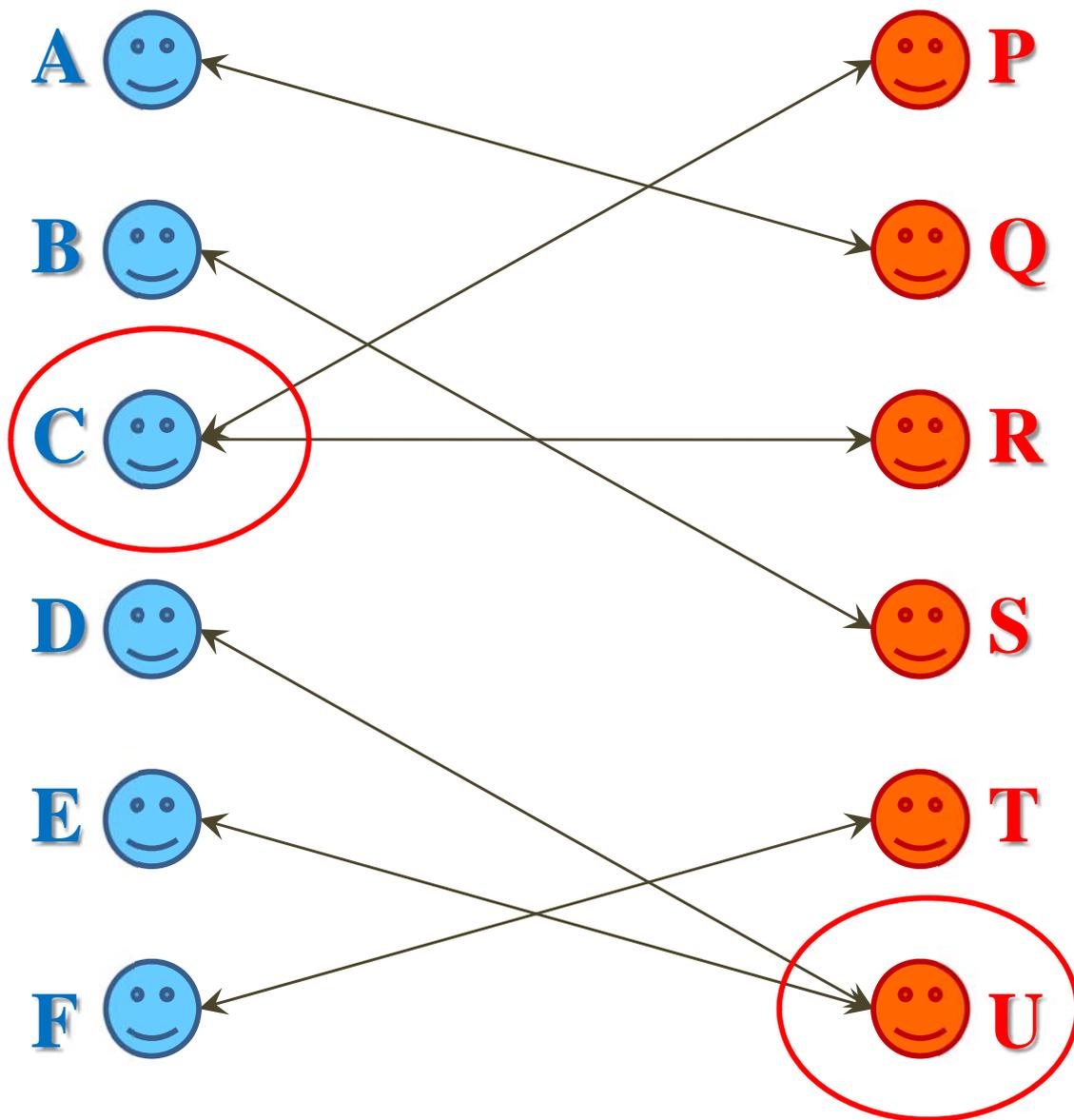
端点を共有しない枝の集合

つまり、どの点 (node) も  
高々1本の枝 (edge) にのみ  
接続 (incident to) している

## 完全マッチング

全ての点 (node) が、マッチ  
ング (matching) の枝 (edge)  
に接続しているとき、その  
マッチングを完全マッチング  
という

# 安定結婚問題 (マッチング)



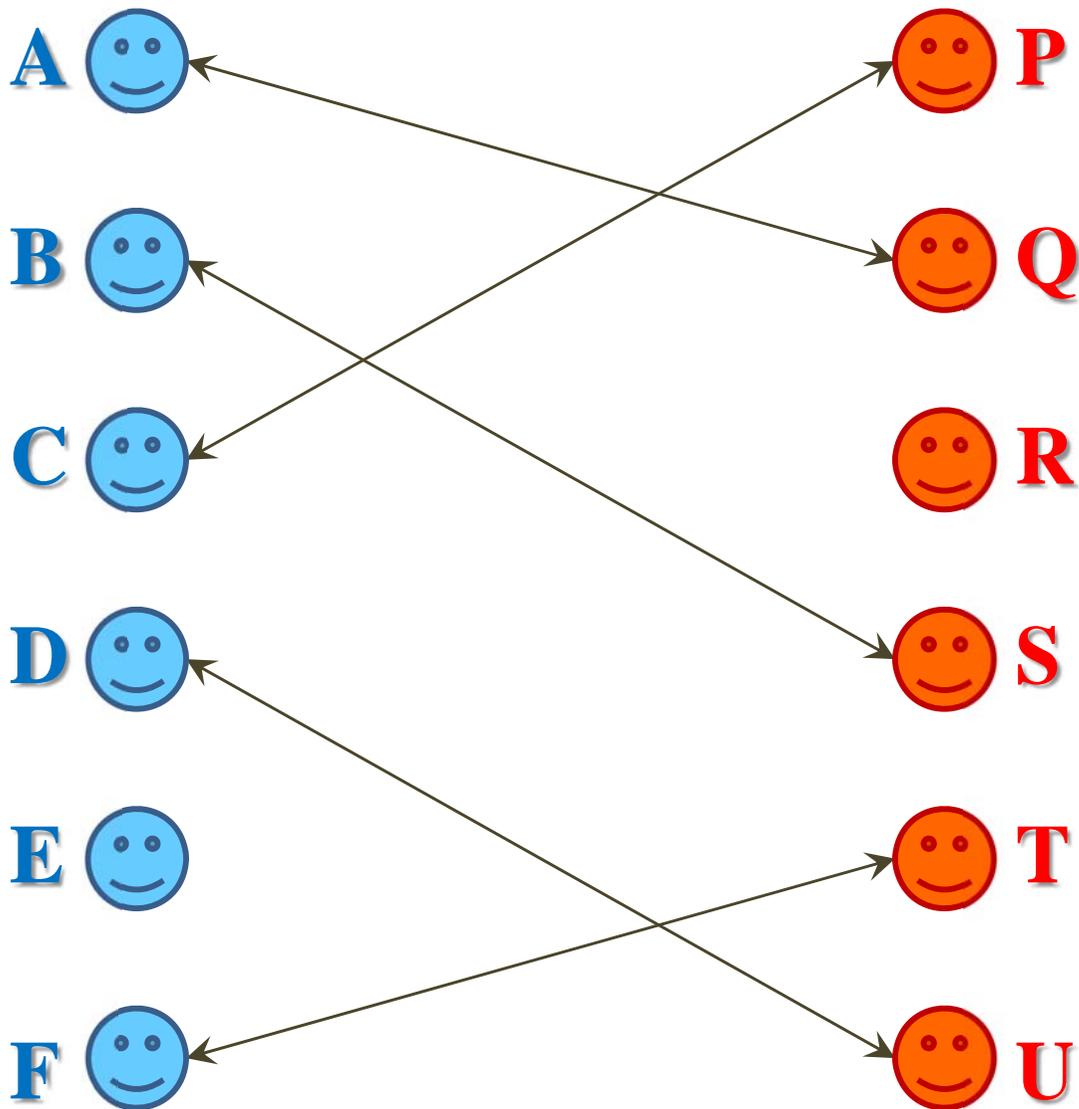
この枝集合は、マッチング  
(matching)ではない

なぜだかわかる？

その通り！ マッチングで  
はありません。

なぜなら、端点を共有する  
枝がある(二股をかけてい  
る人がいる)から

# 安定結婚問題 (マッチング)



この枝集合は、マッチング (matching) だろうか？

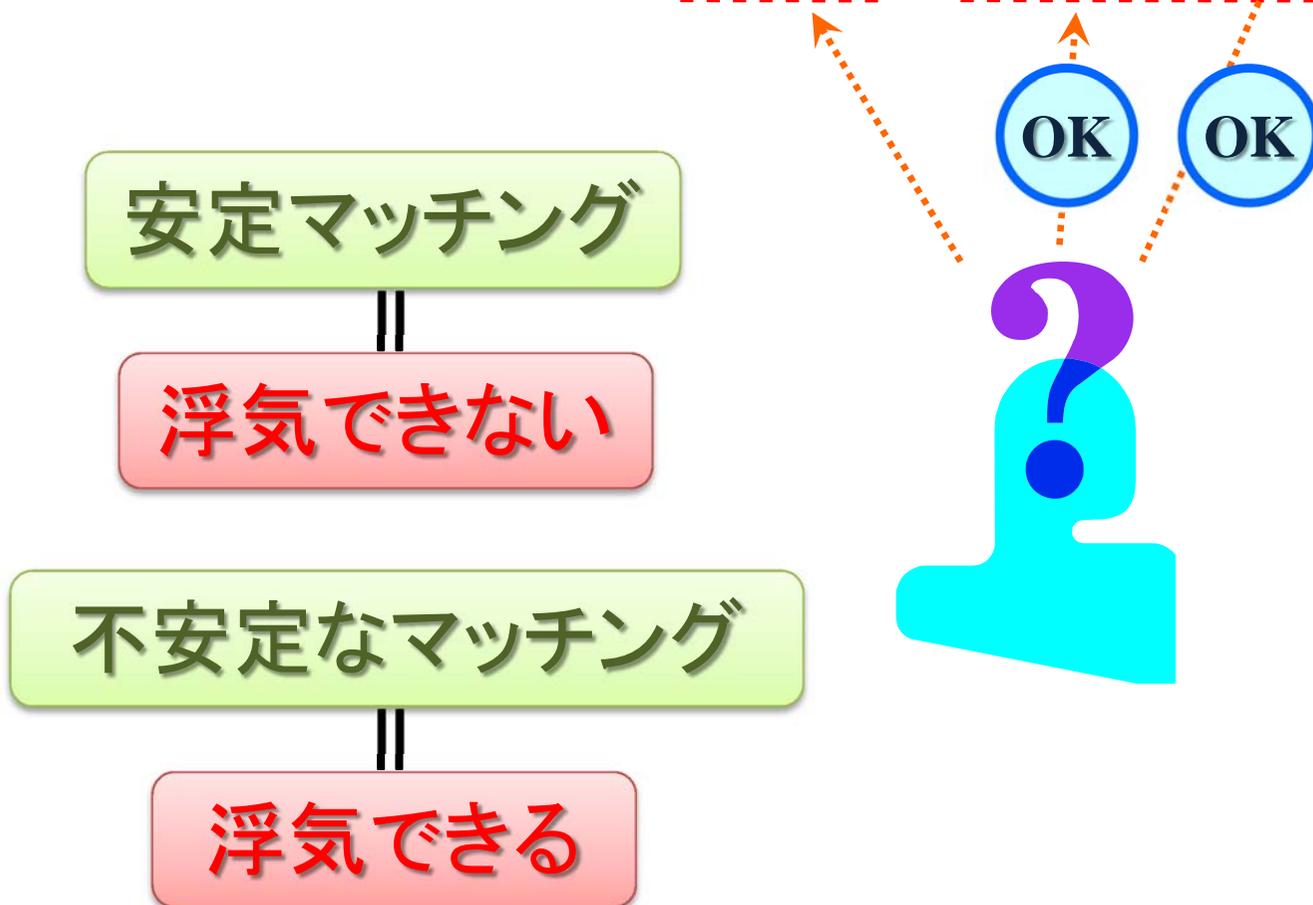
マッチング (matching) です。  
でも、完全マッチング (perfect matching) ではないので、ペアを組んでない人がいるね。

つまり、我々は完全マッチングを求めたいのだよ

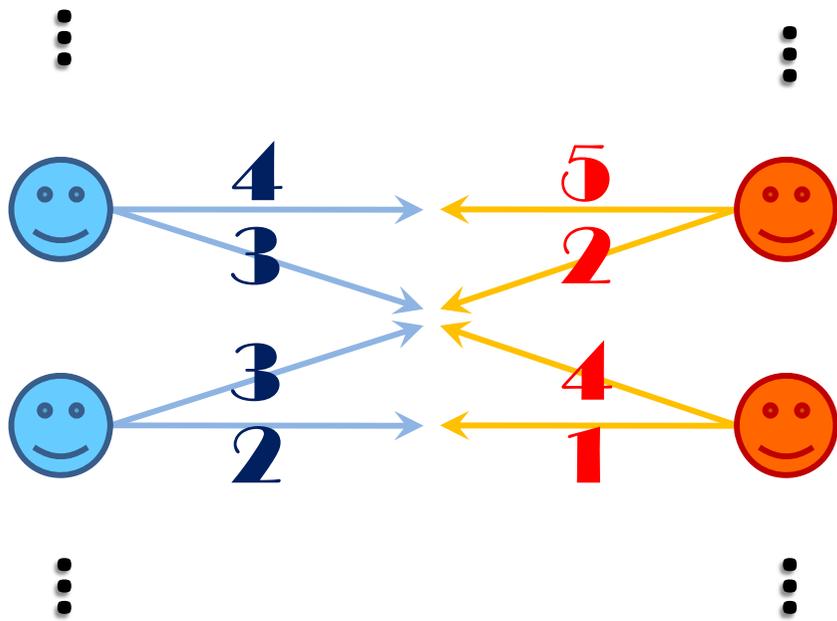
※男女が同数でない場合は、完全マッチング (perfect matching) は存在しないので、最大マッチング (maximum matching) を求めます。

# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と、 $m$ 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つけない。



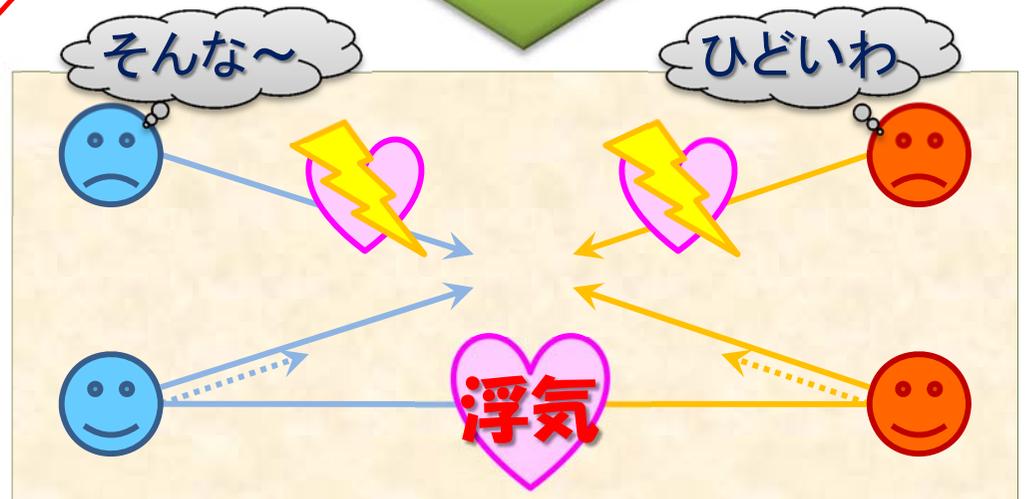
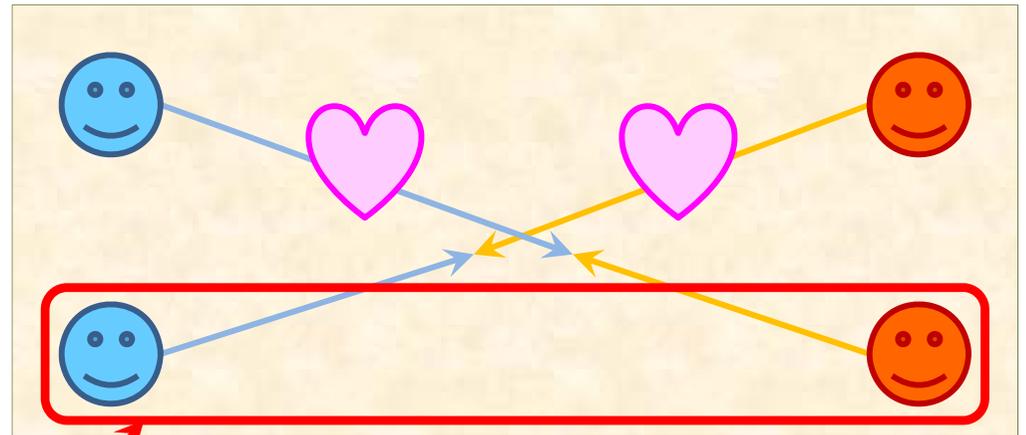
# 浮気する(不安定な)カップルとは？



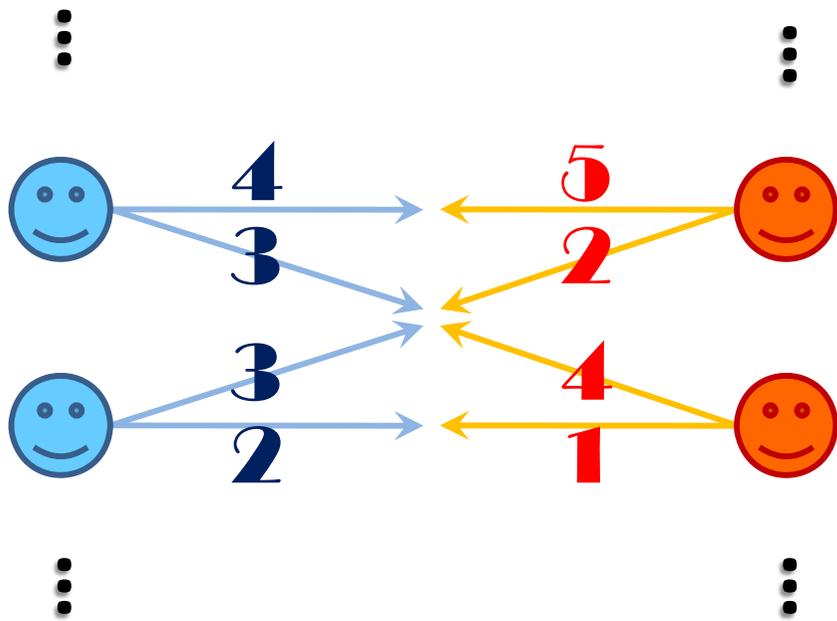
このマッチングは不安定！  
なぜなら

ブロッキング・ペア  
が存在するから！

こんな2組のカップル(マッチング)を  
作ってしまったら...



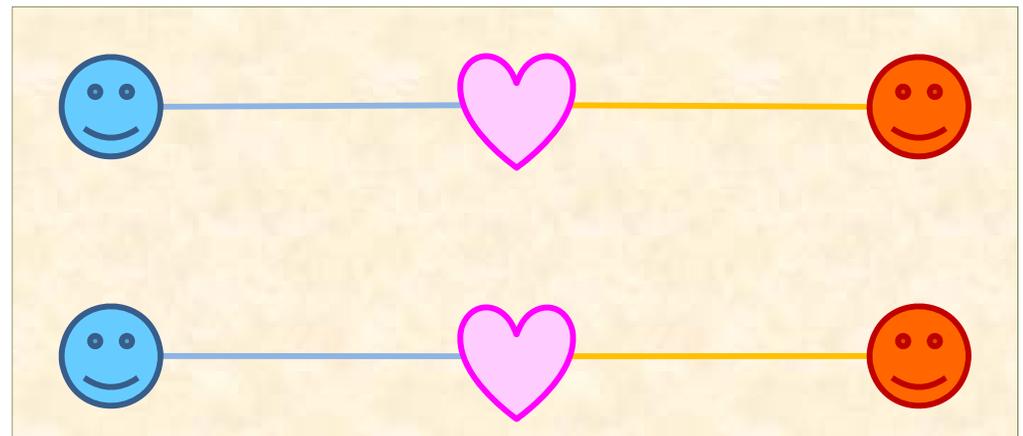
# 浮気しない(安定な)恋人たち



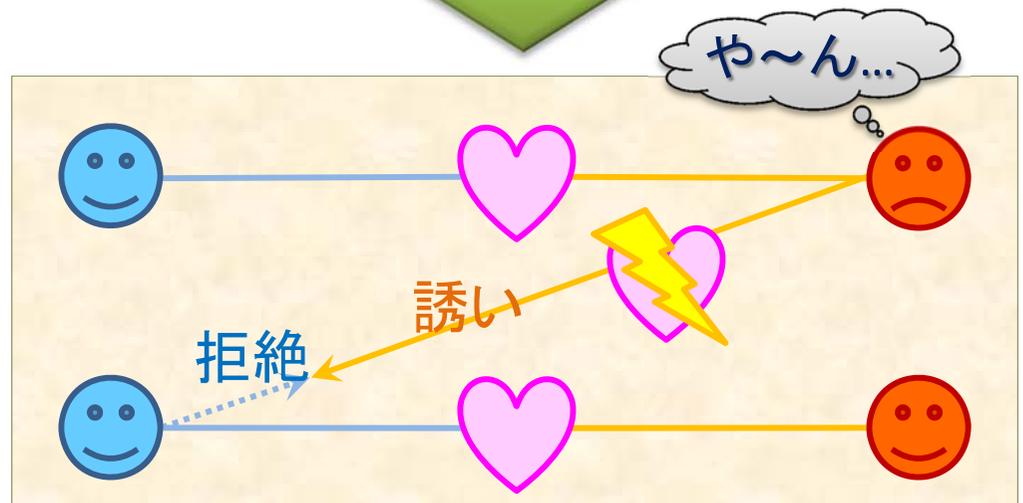
このマッチングは安定！  
なぜなら

ブロッキング・ペア  
が存在しないから

浮気しない(できない)恋人たち

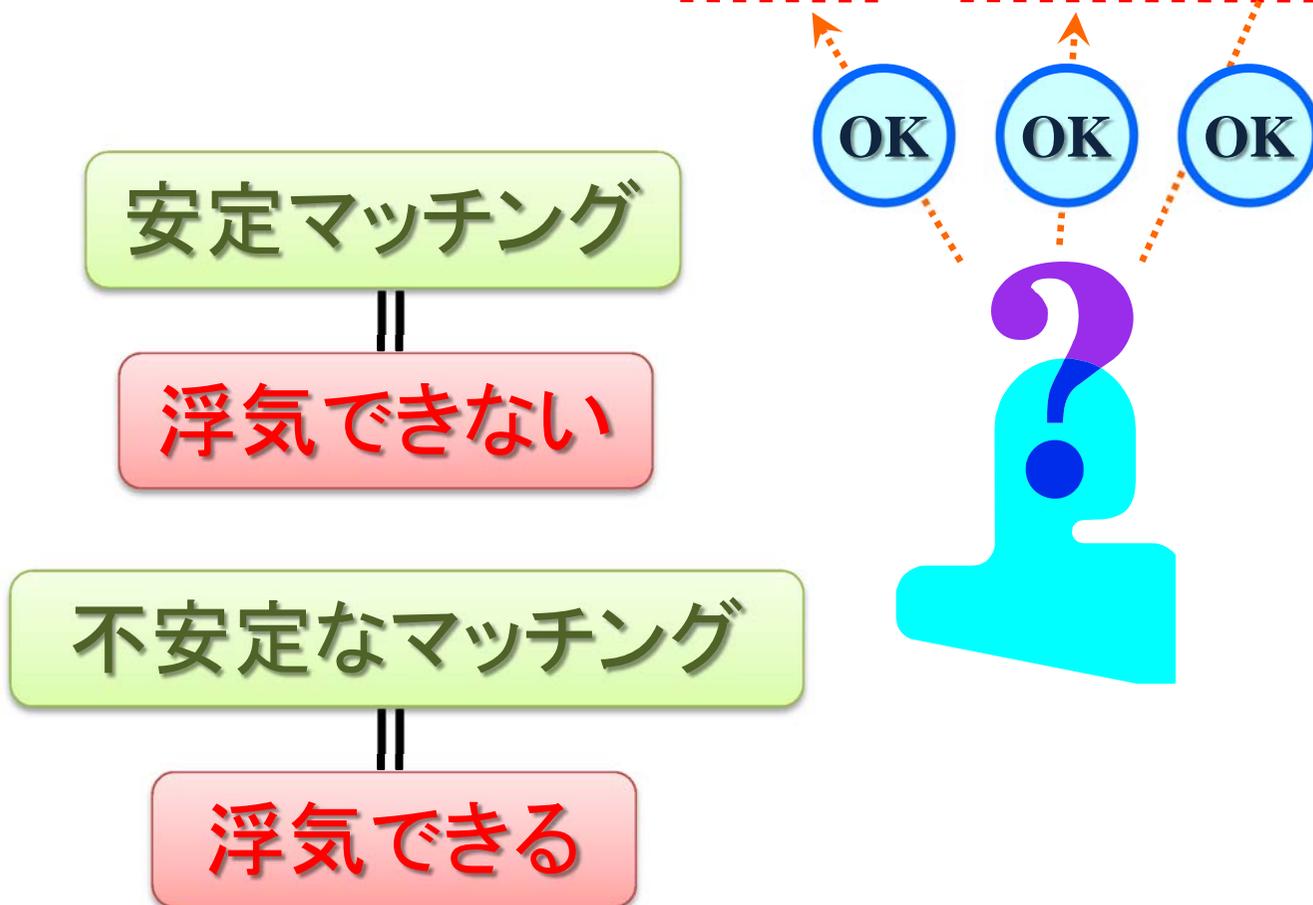


浮気を試みるも...

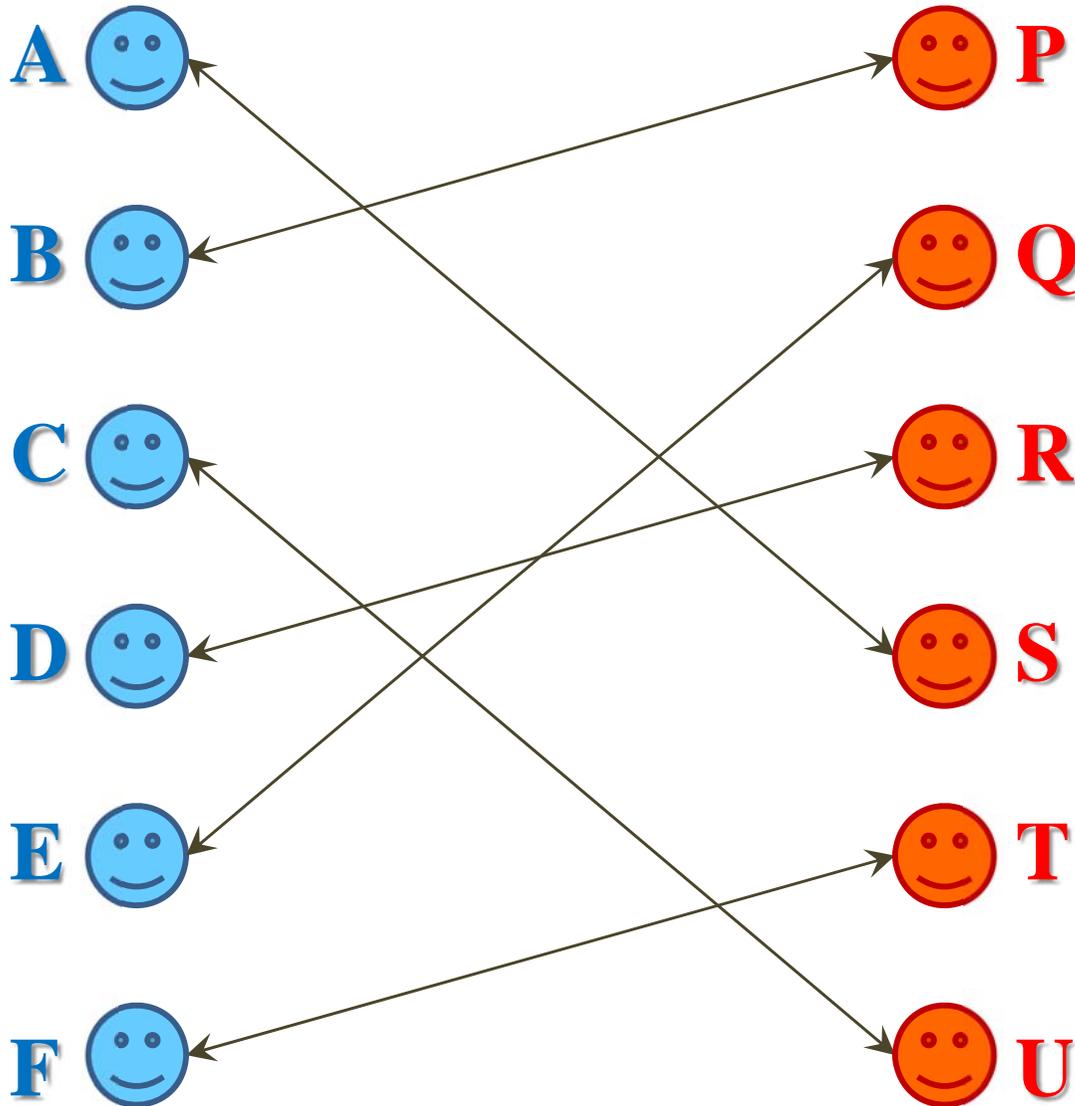


# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と、 $m$ 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つけない。



# 安定結婚問題(まとめ)



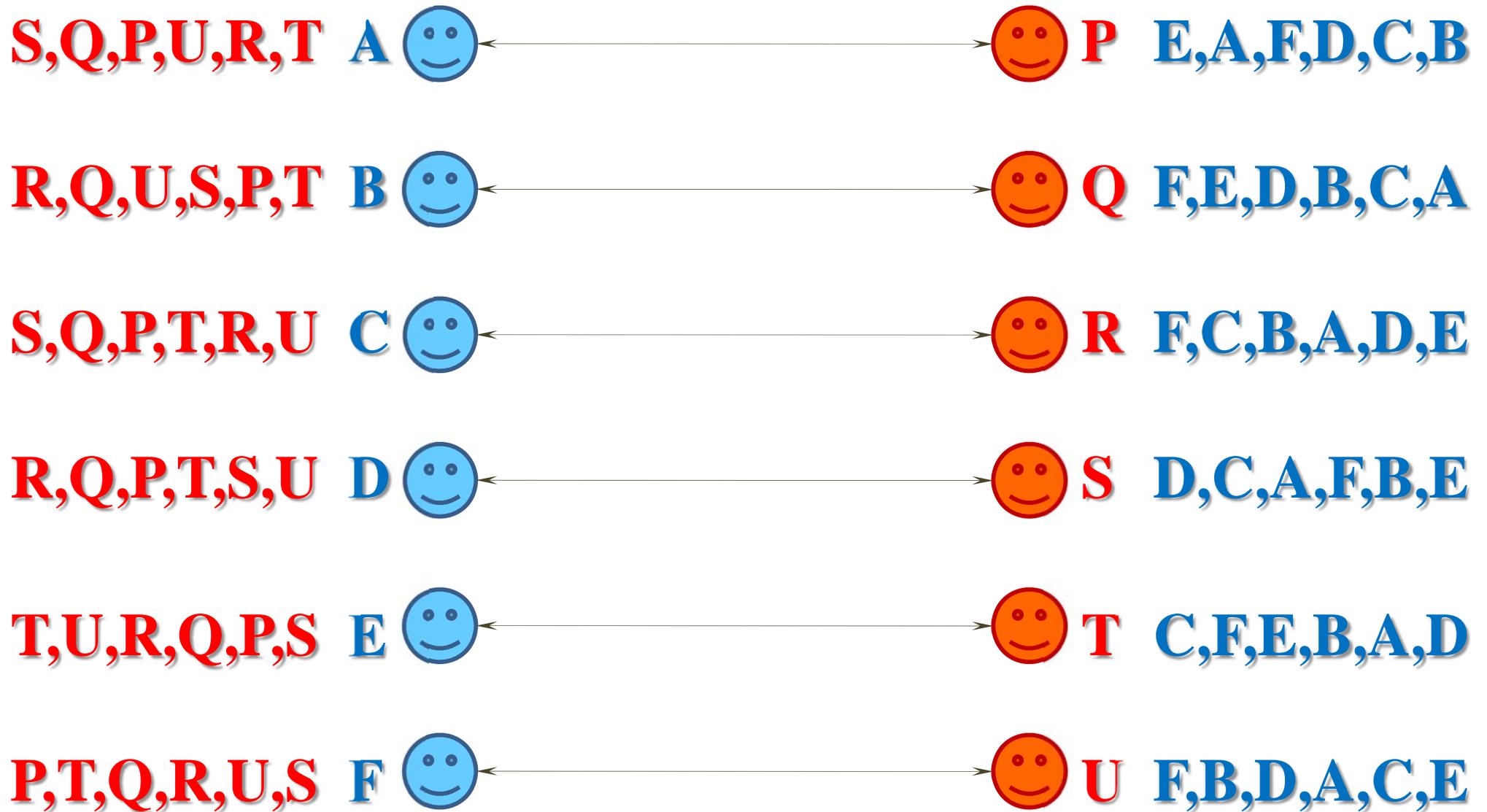
浮気しないカップルをつくる(安定結婚問題を解く)ということは,

(ブロッキング・ペアが存在しない) **安定**な完全マッチングを求める

こと

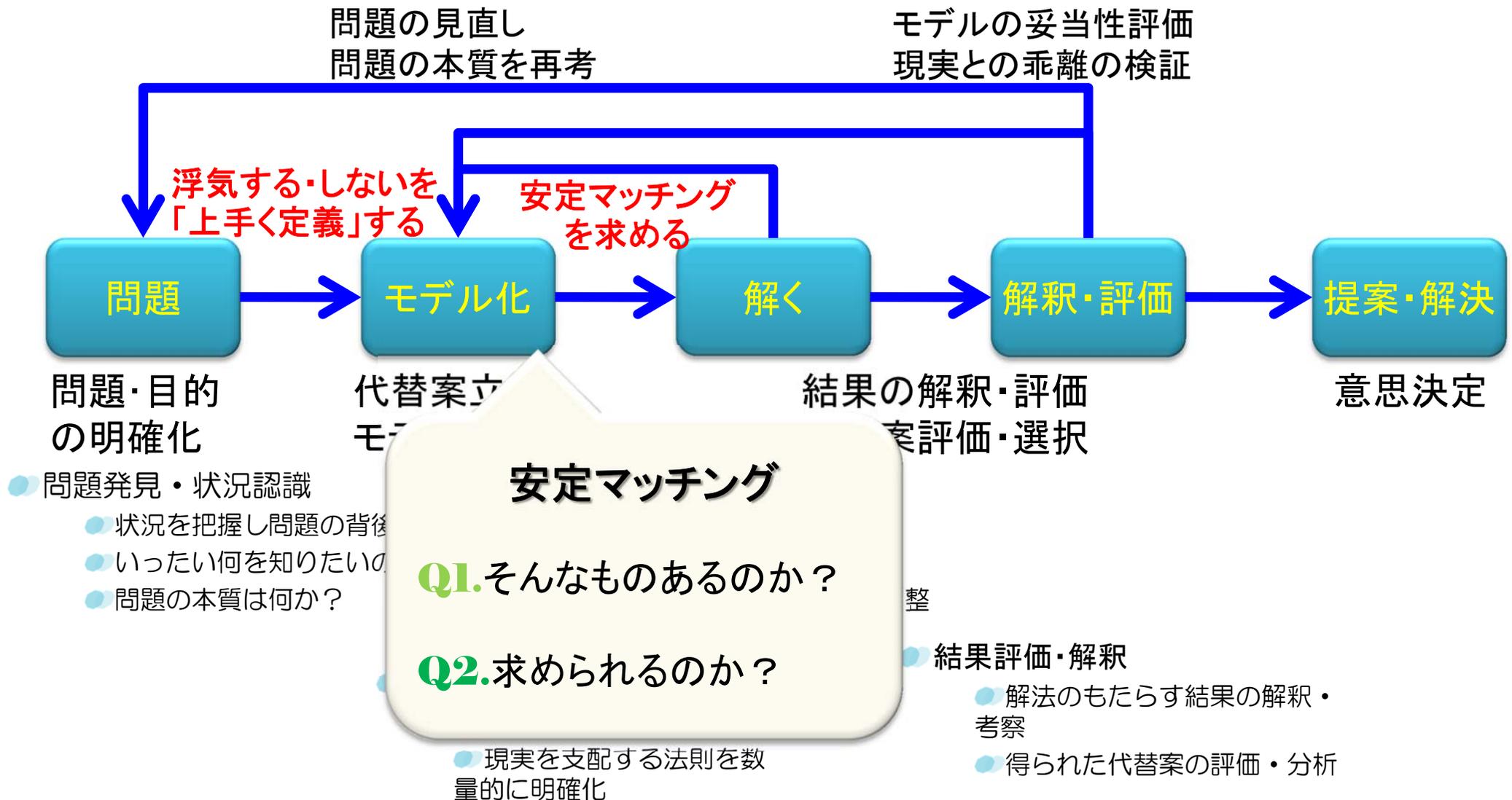
※男女が同数でない場合は, 完全マッチング(perfect matching)は存在しないので, 最大マッチング(maximum matching)を求めます.

# 問題：このマッチングは安定？

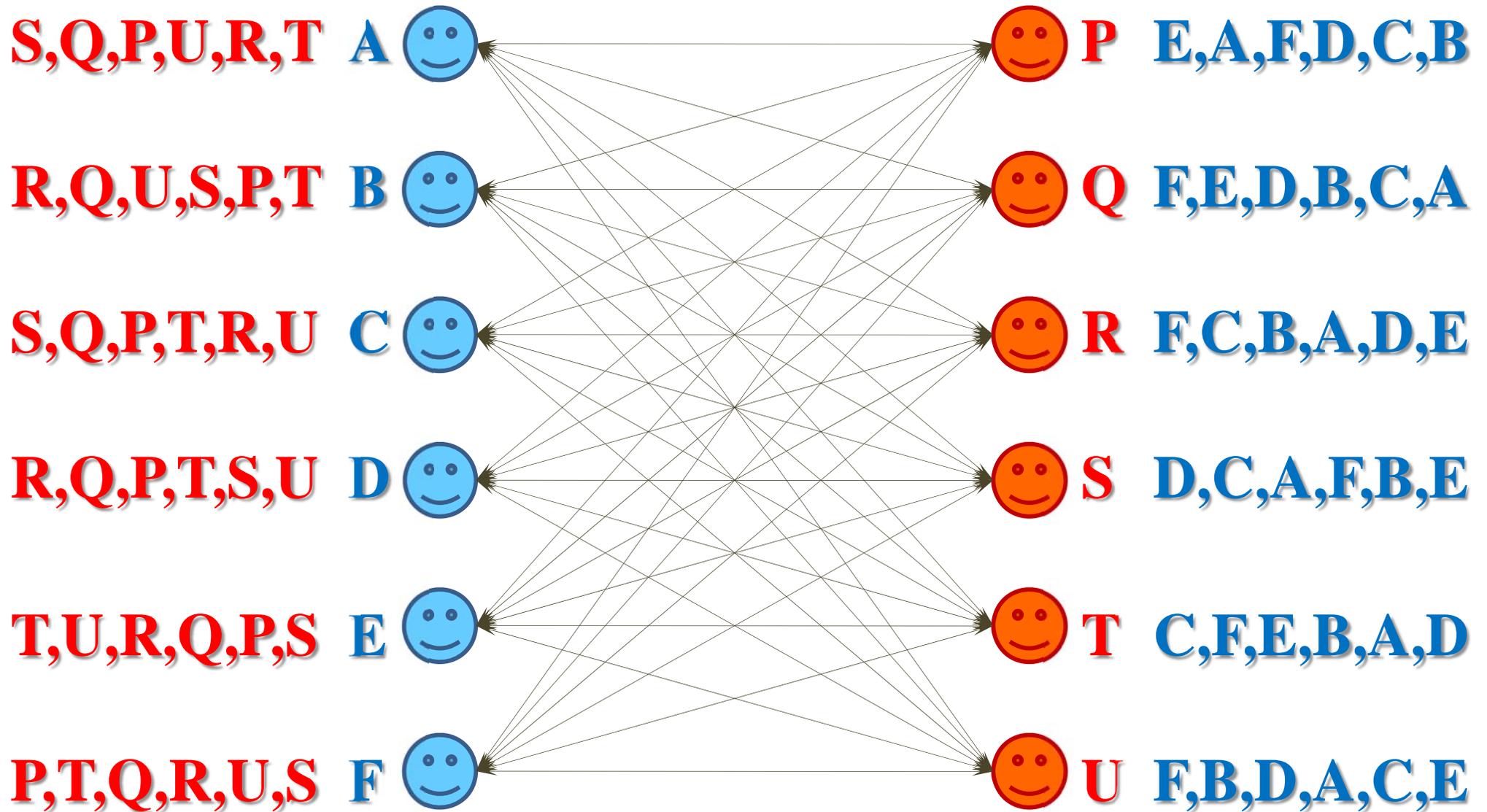


# 問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



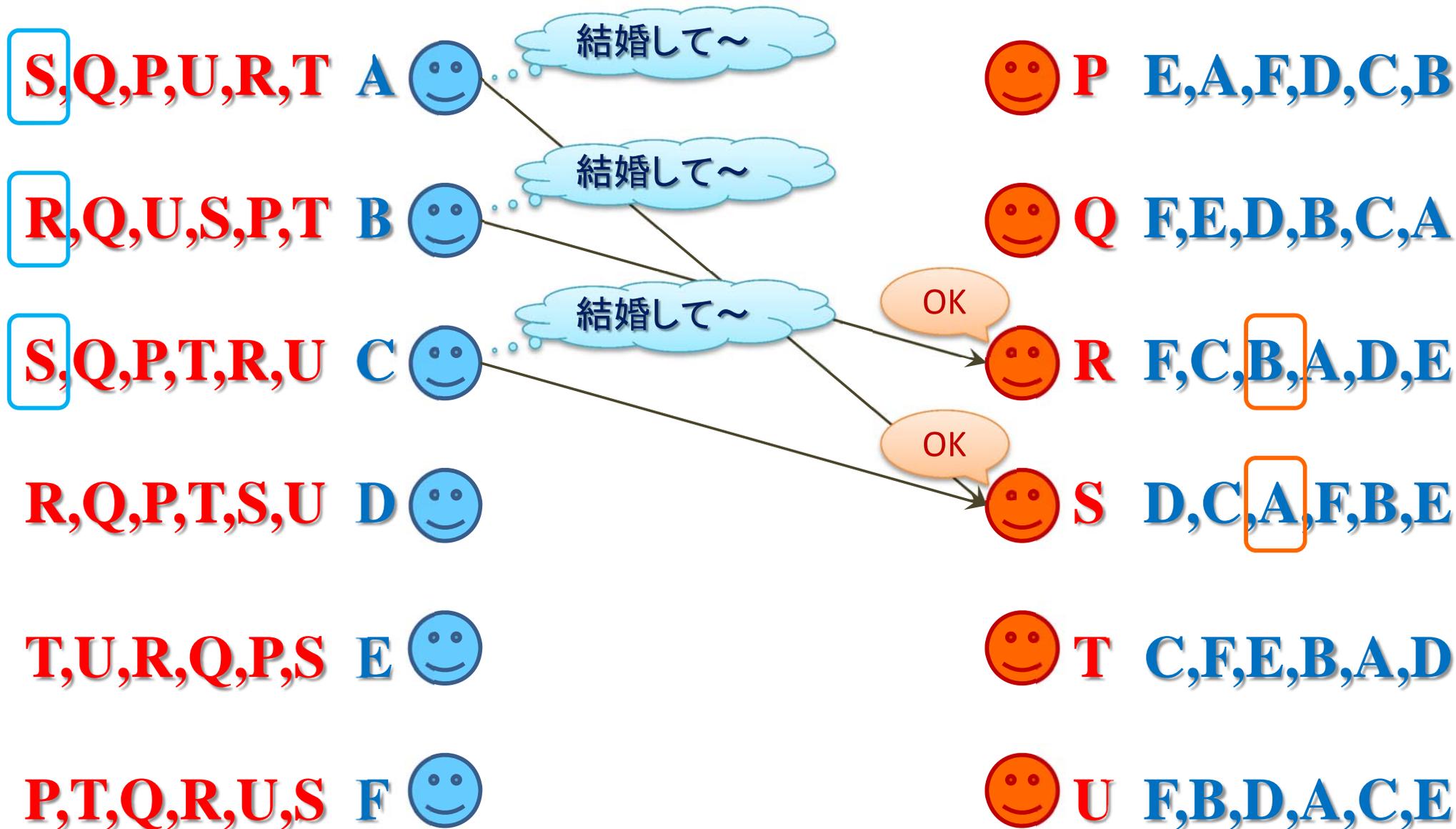
# 演習：やってみよう



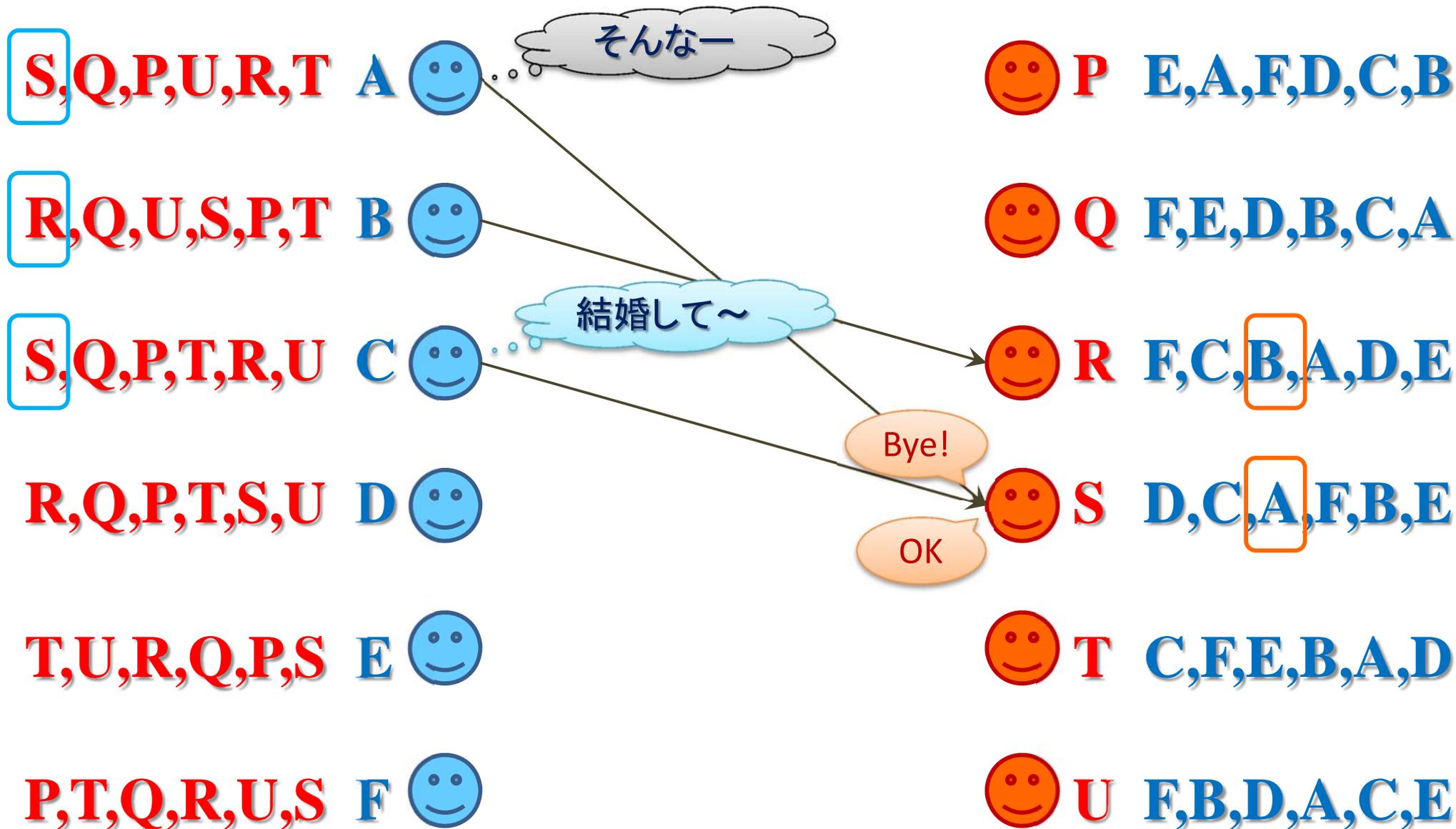
安定結婚問題を解く

Gale-Shapley アルゴリズム

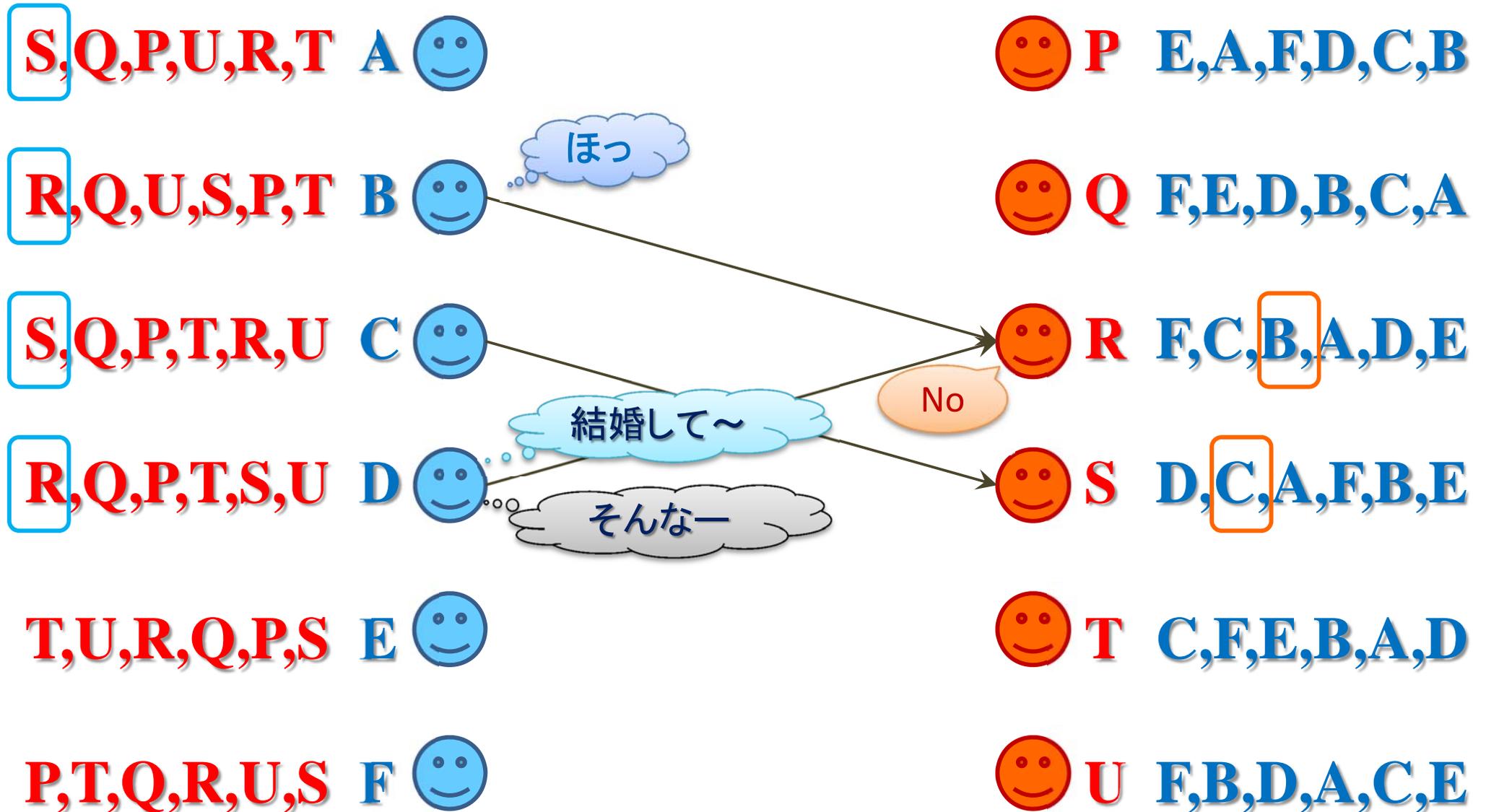
# Gale-Shapley アルゴリズム



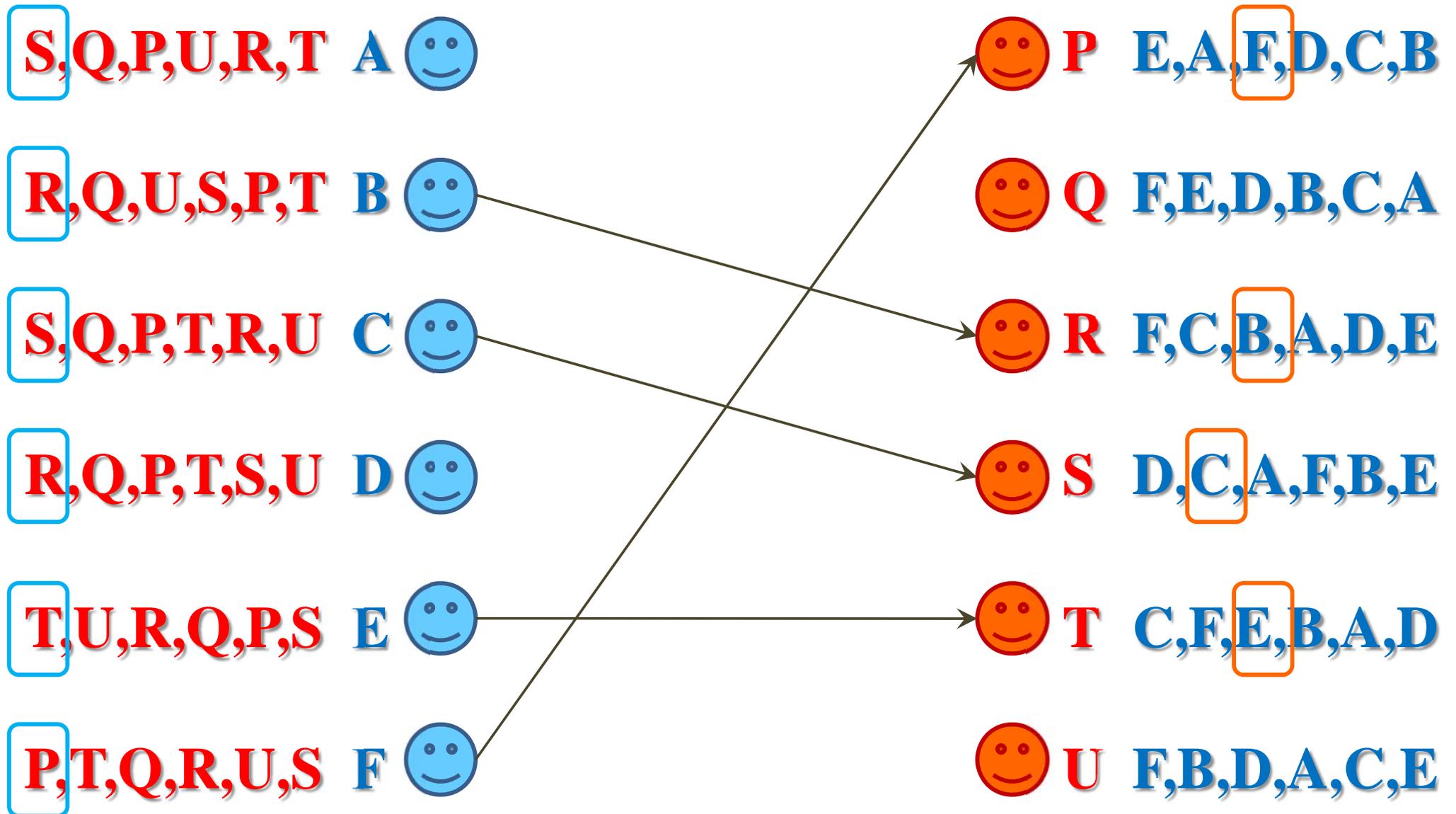
# Gale-Shapley アルゴリズム



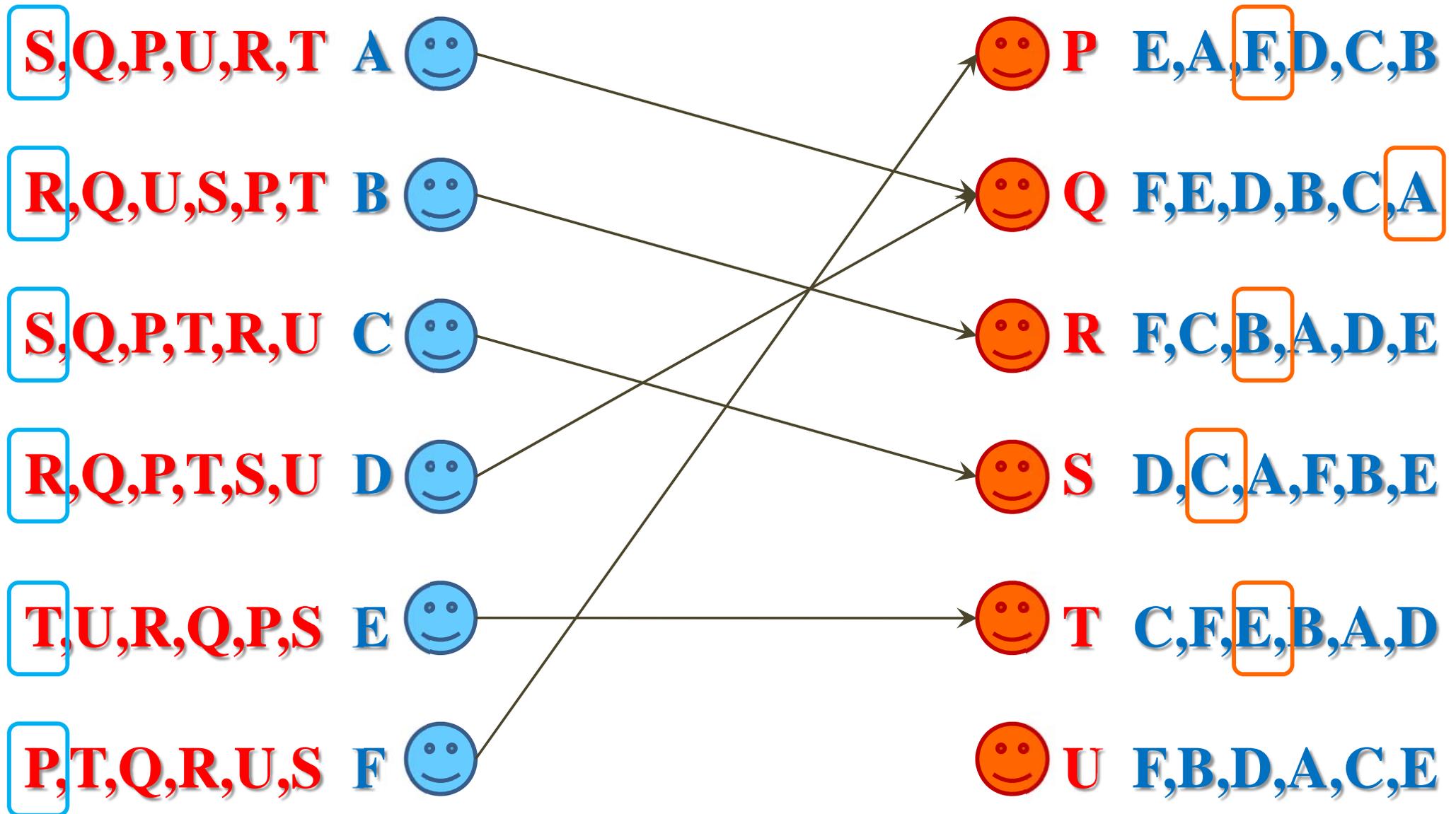
# Gale-Shapley アルゴリズム



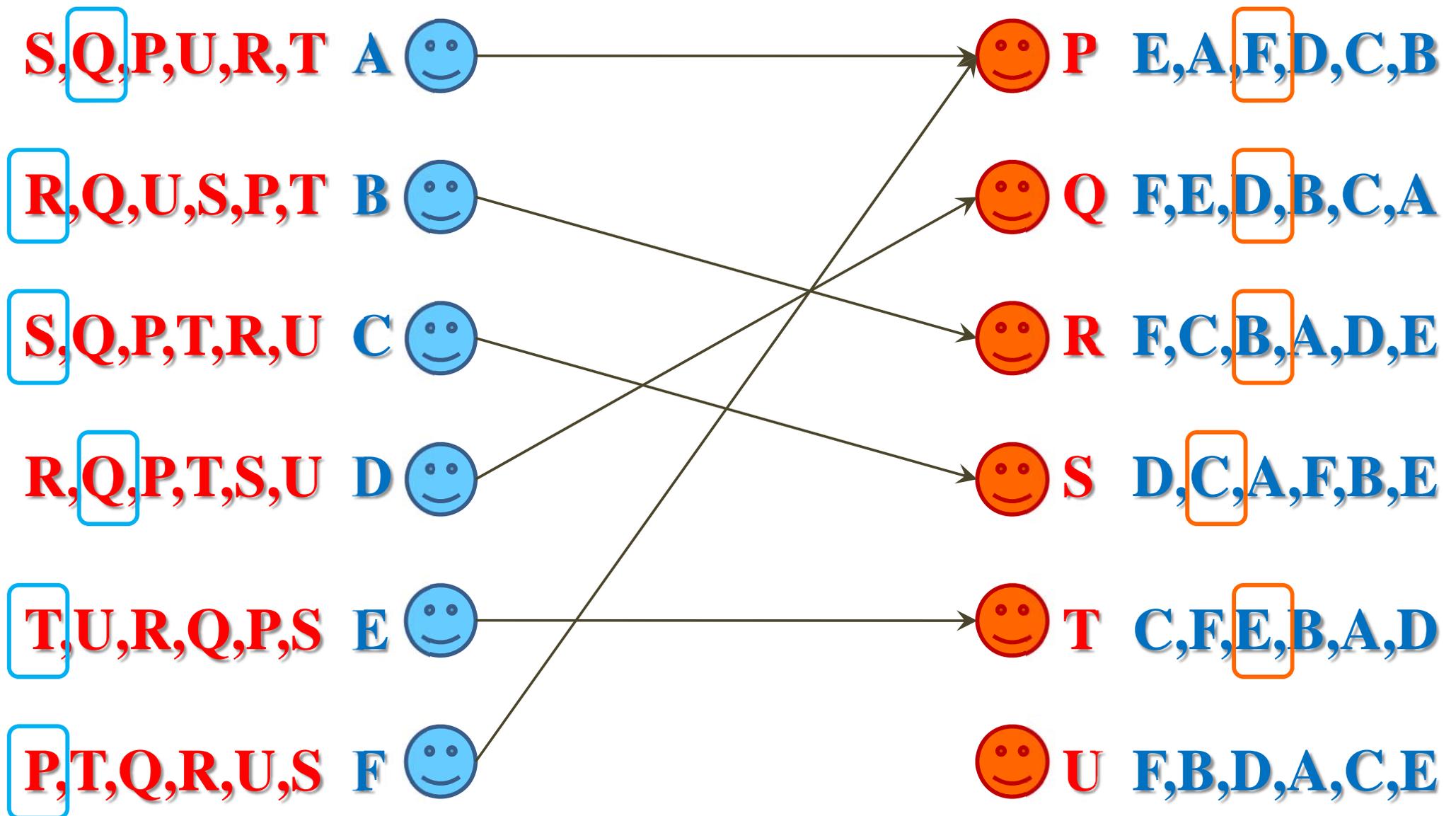
# Gale-Shapley アルゴリズム



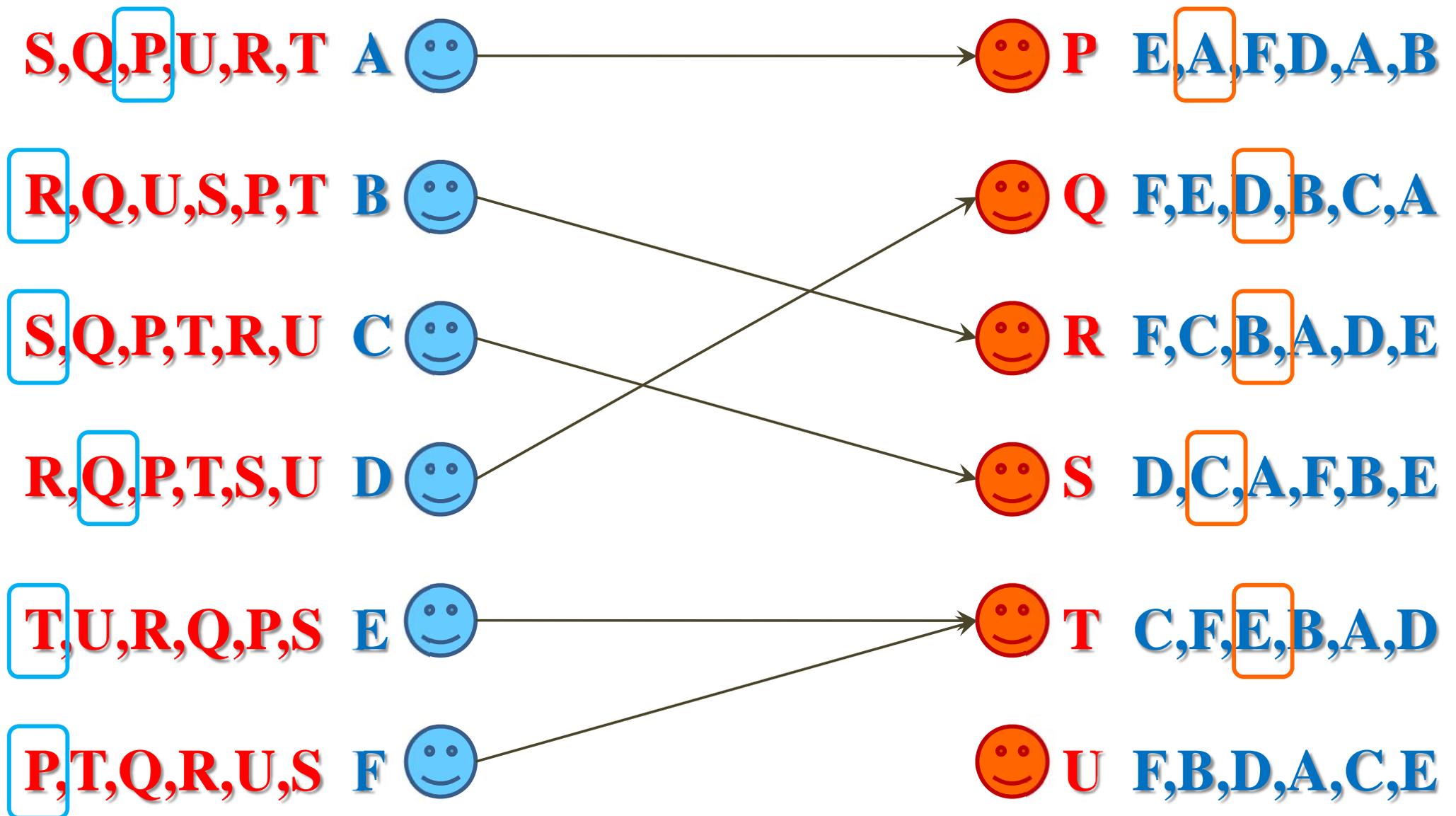
# Gale-Shapley アルゴリズム



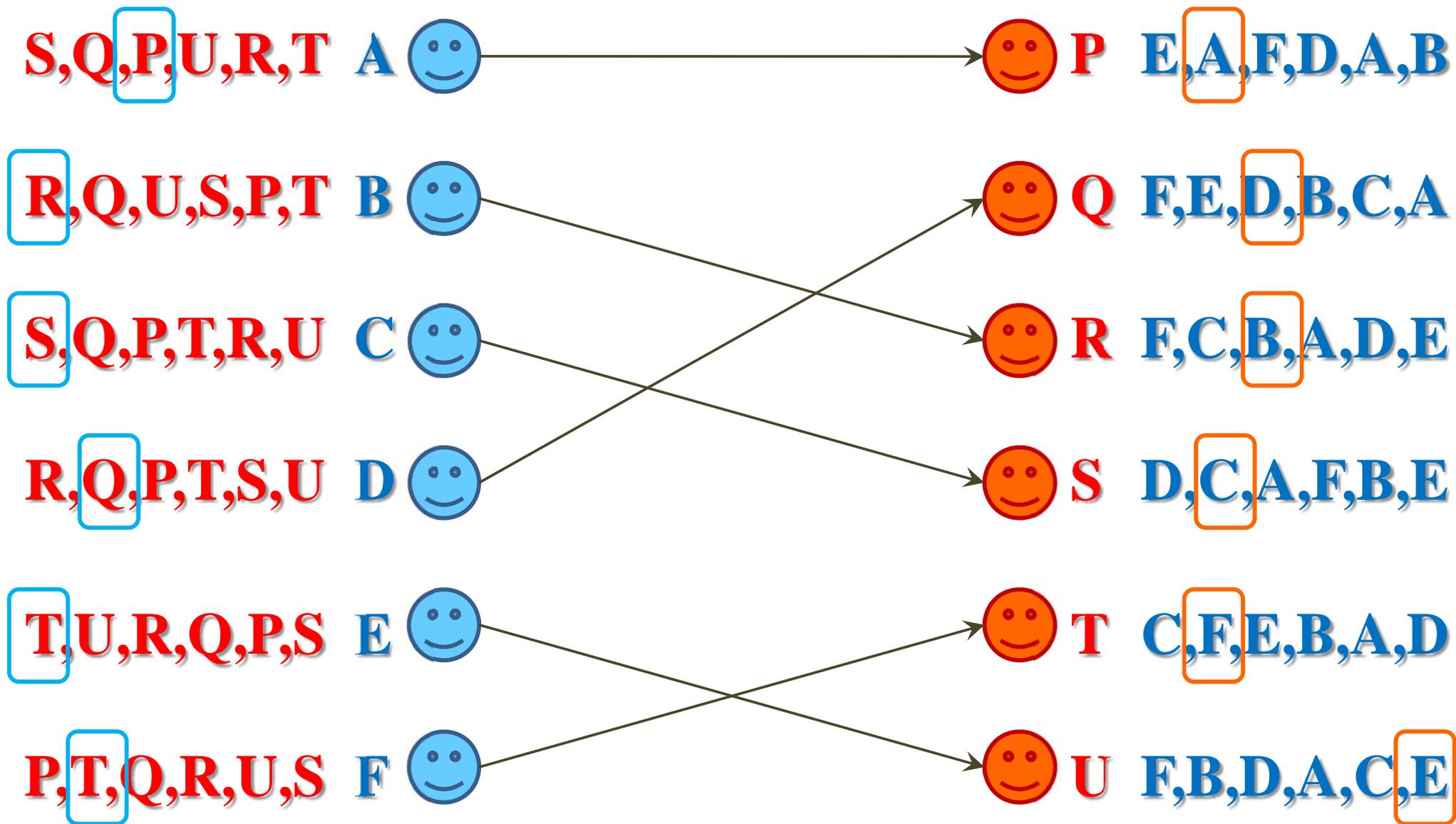
# Gale-Shapley アルゴリズム



# Gale-Shapley アルゴリズム



# Gale-Shapley アルゴリズム



# 問題解決

## 「問題の把握」から「意思

### アルゴリズムの評価

- Q1.** アルゴリズムはちゃんと終わる？  
(無限に続くことはない?)
- Q2.** 完全マッチングを求めたのか？  
(全員がちゃんとカップルになる?)
- Q3.** 求めたマッチングは安定なの？  
(誰も浮気できない?)

問題の見直し  
問題の本質を再考

浮気する・しないを  
「上手く定義」する

安定マッチング  
を求める

Gale-Shapleyの  
アルゴリズム



#### ● 問題発見・状況認識

- 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
- いったい何を知りたいのか？
- 問題の本質は何か？

#### ● 答えを導く

- 解法選択
- 解法構築
- パラメータ調整

#### ● 推論・モデル作成

- 推論に基づきモデル作成
- 現実を支配する法則を数量的に明確化

#### ● 結果評価・解釈

- 解法のもたらす結果の解釈・考察
- 得られた代替案の評価・分析

# Gale-Shapley アルゴリズム

- **定理**: 与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し, Gale-Shapley アルゴリズムは 安定マッチング を導き終了する.



**A1.** きちんと終わるよ!

**A2.** 完全マッチングを求めるよ!

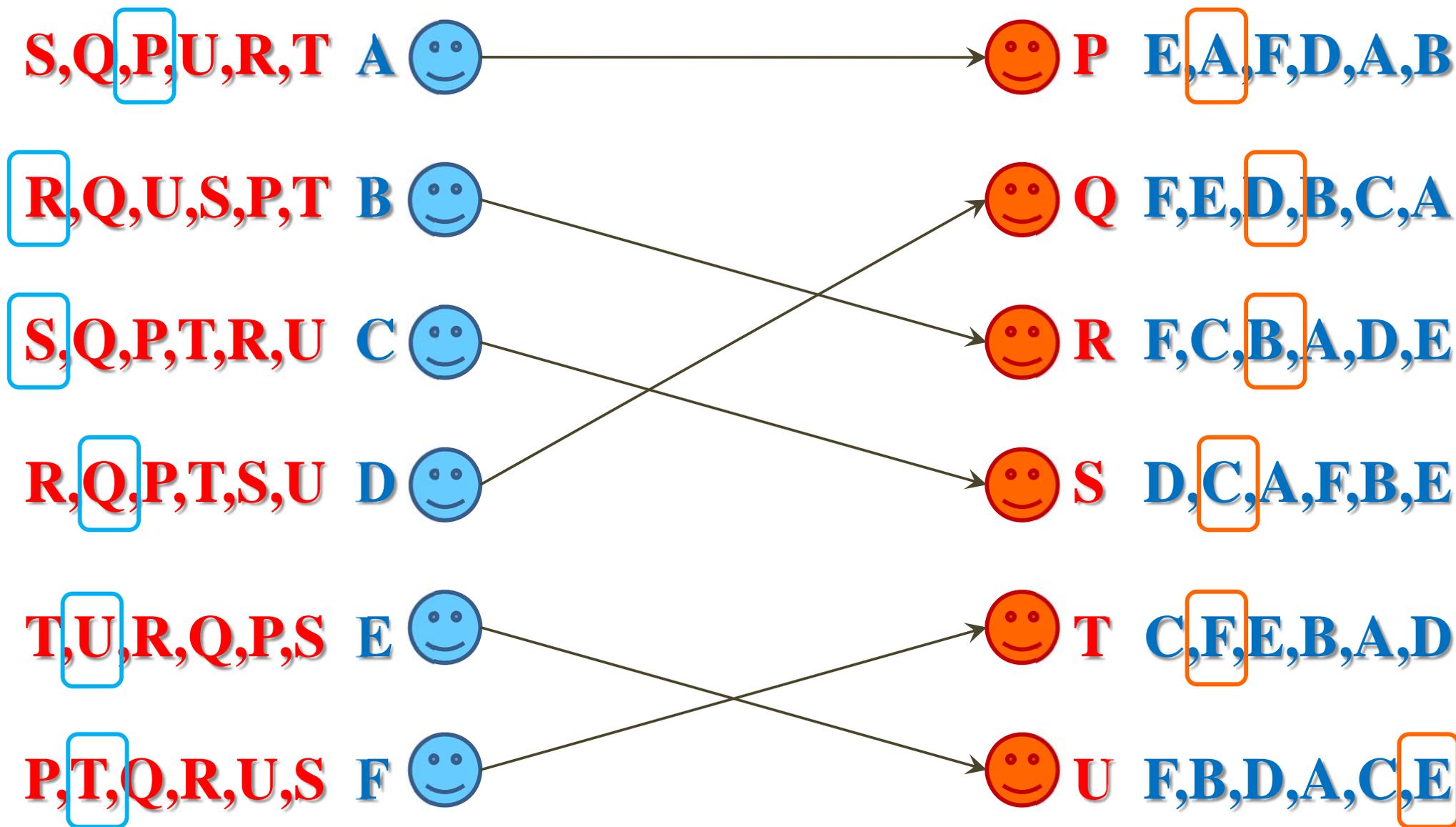
**A3.** 安定だよ!

- **系**: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, 少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

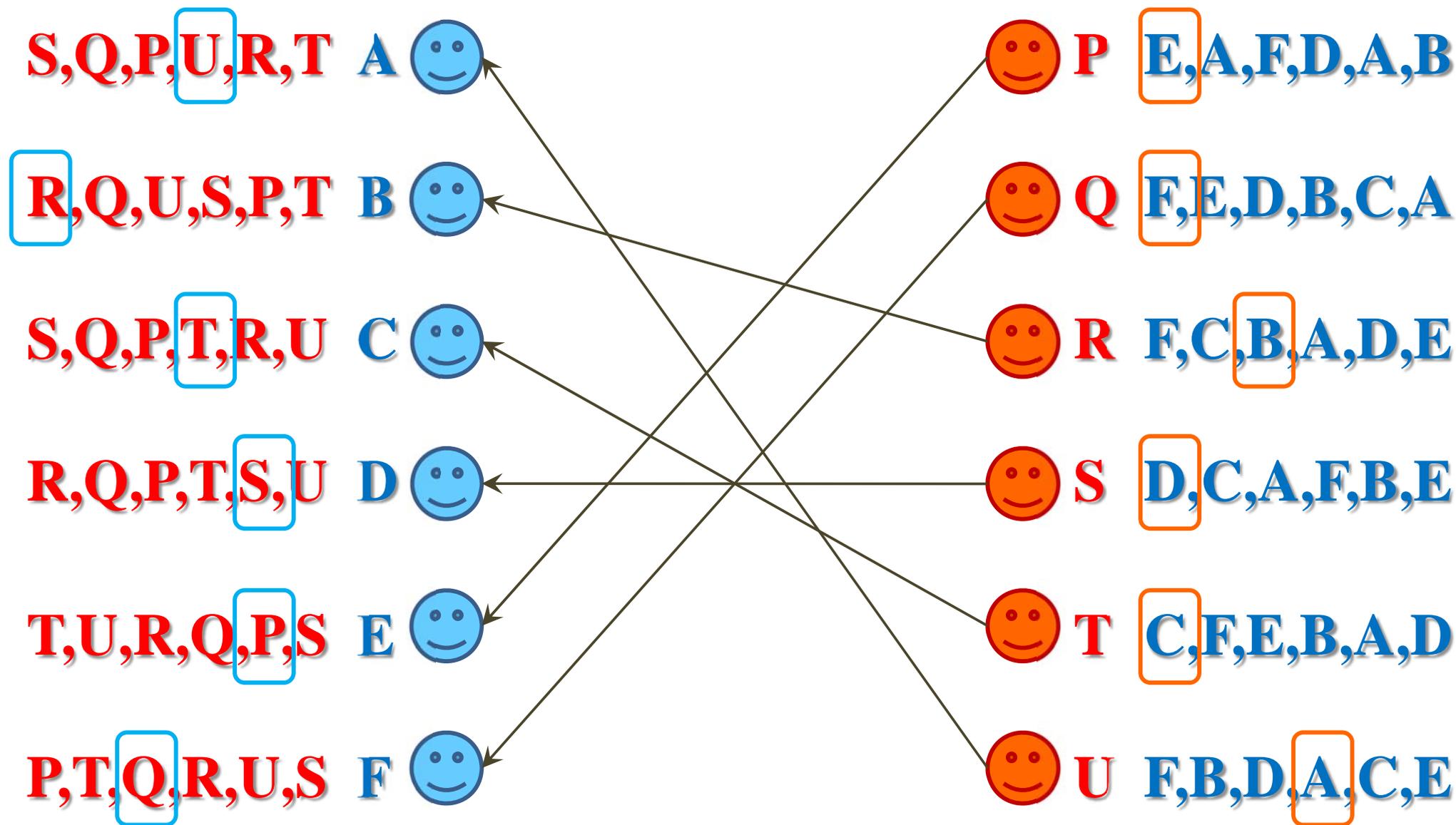
# Gale-Shapley アルゴリズム

- **定理**: 男性側のプロポーズの順番に関係なく, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く.
- **系**: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば男性最良安定マッチングを導く.

# 男性最良安定マッチング



# 女性最良安定マッチング



# Gale-Shapley アルゴリズム

- 与えられた安定結婚問題について、いくつかの安定マッチングが存在する場合、男性にとってより好ましい安定マッチング、女性にとってより好ましい安定マッチングなど、安定マッチングの**好ましさにある種の順序付け**ができる。

- **定理**: 与えられた安定結婚問題について、  
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング  
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング  
である。

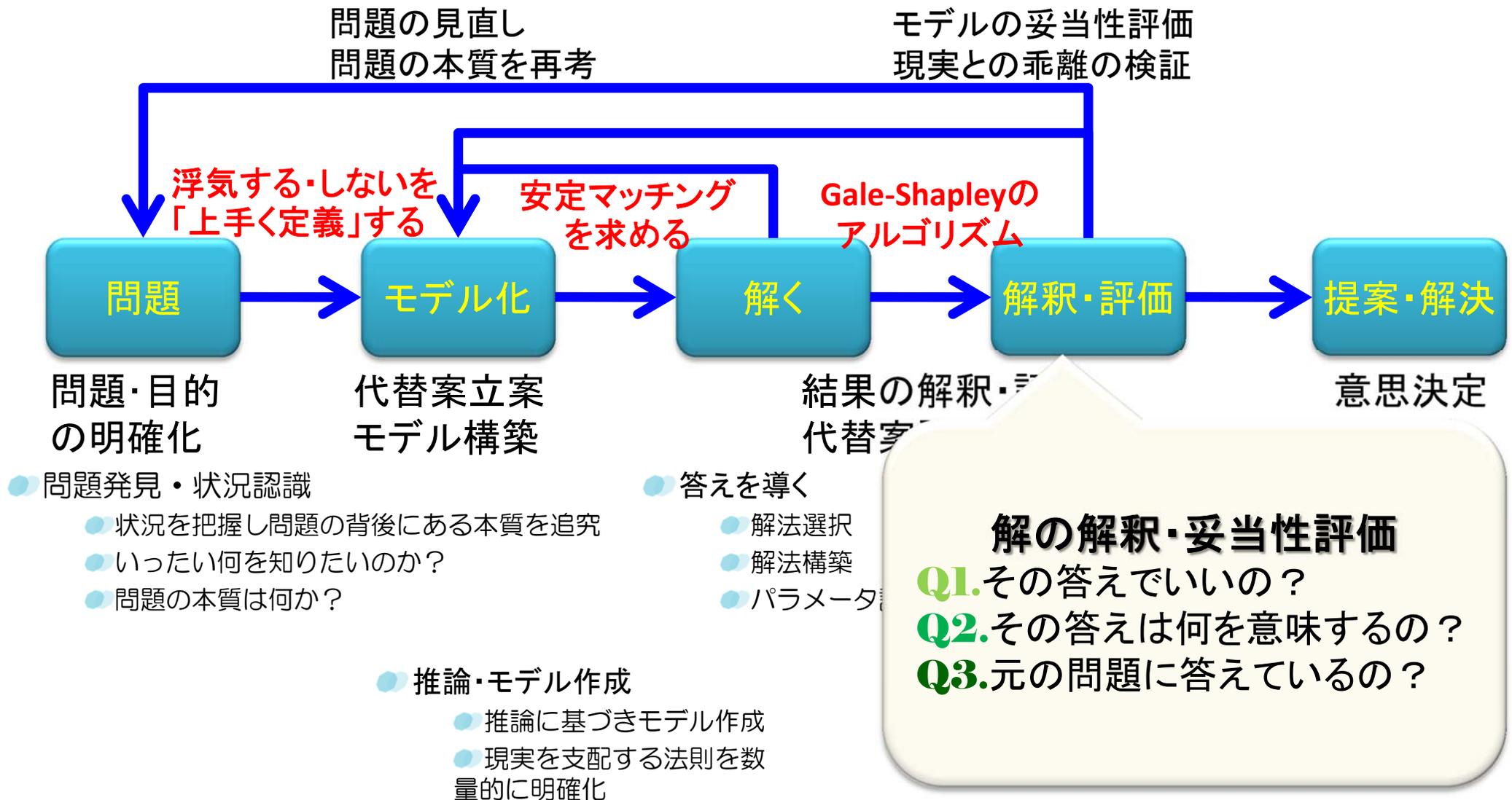


教訓!? 『待ってちゃダメ！

好きになったら自分から告白しなさい』

# 問題解決

## 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



# もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書

- 久保, 松井「**組合せ最適化『短編集』**」朝倉書店(1999)
- 山本, 久保「**巡回セールスマン問題への招待**」朝倉書店(1997)
- グリッツマン, ブランデンベルク「**最短経路の本**」シュプリンガー(2008)
- 松井, 根本, 宇野「**入門オペレーションズ・リサーチ**」東海大出版(2008)
- W.J.クック「**驚きの数学 巡回セールスマン問題**」青土社(2013)

- さらに詳しい内容を勉強したい人は

- 根本「**安定結婚問題**」(久保, 田村, 松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)

- 関連する経営学科の授業

- 「**ネットワークモデル分析**」(4セメ)
- 「**最適化モデル分析**」(5セメ)
- 「**意思決定科学**」(6セメ)                      etc...