

問題解決技法入門

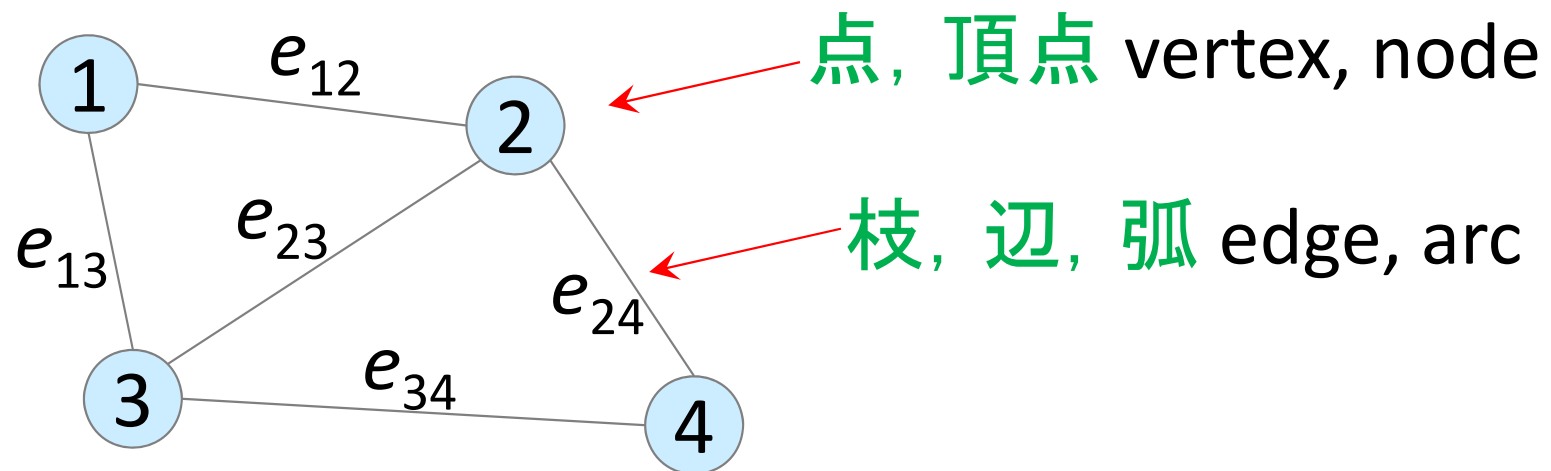
2. Graph

堀田 敬介

Graph

厳密には
 $G=(f, V, E)$
 $f: E \rightarrow V \times V$

- グラフ Graph $G=(V, E)$
 - 点と枝, およびその接続関係

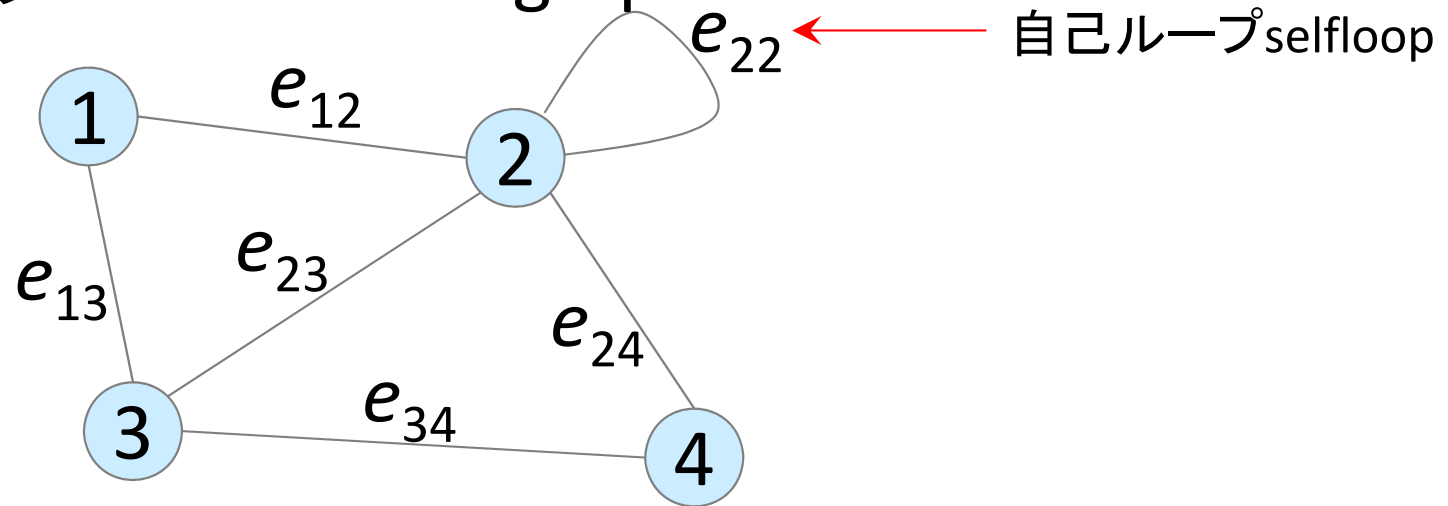


- 点集合 $V = (1, 2, \dots, n)$
- 枝集合 $E = (e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots)$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 e_{12} は点1に接続している (An edge e_{12} is incident to 1.)

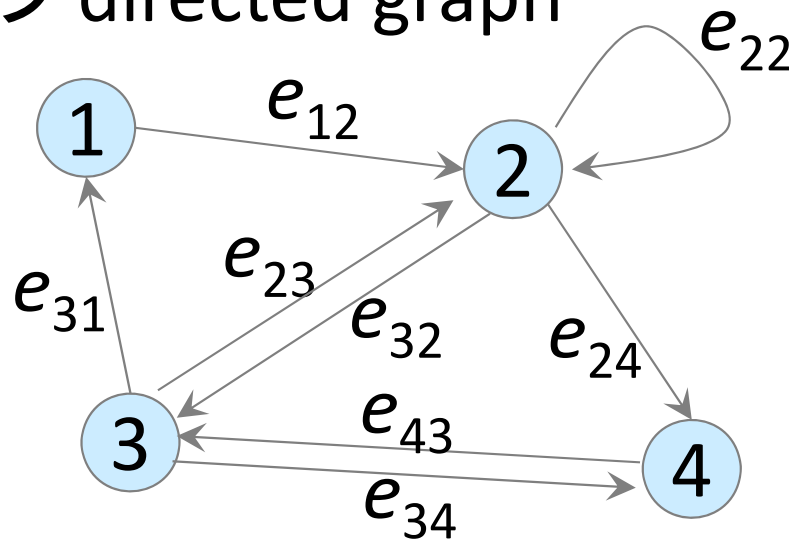
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- 無向グラフ undirected graph



- 有向グラフ directed graph

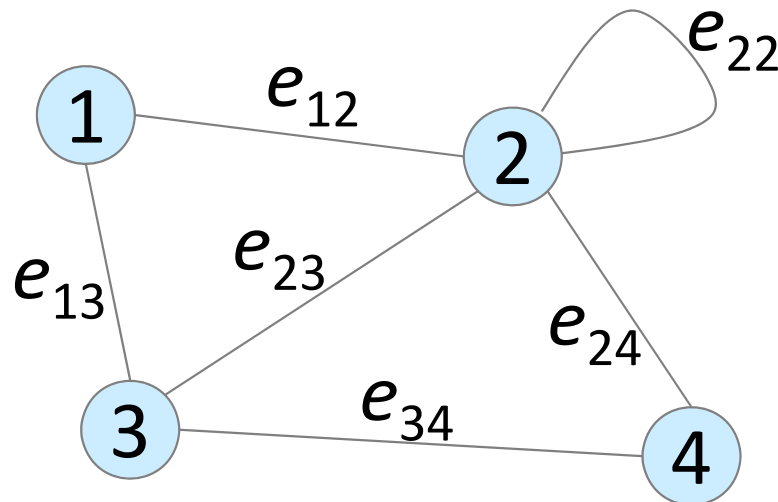


Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- **次数** degree ... 点に接続している枝の本数

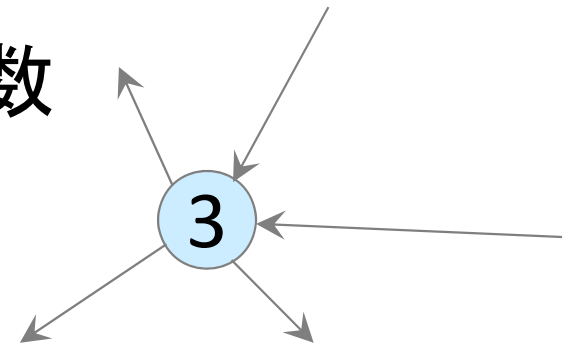
- Ex) 点1の次数は2
 - Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)



- **入次数**...有向グラフで入ってくる枝の本数

- **出次数**...有向グラフで出ていく枝の本数

- Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

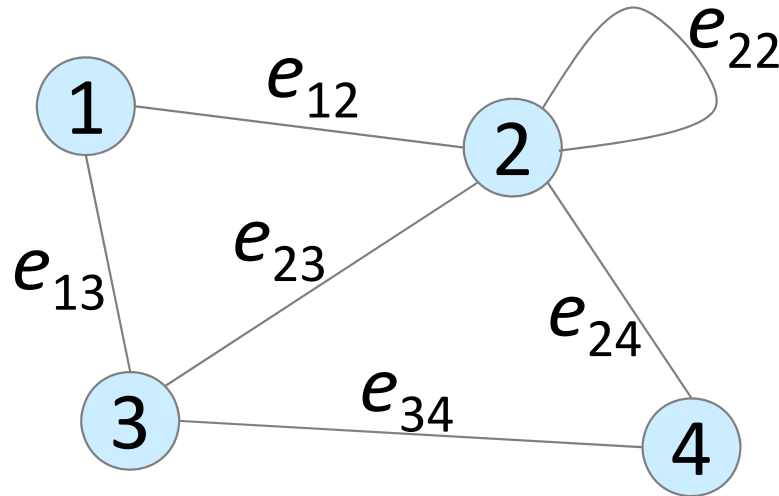


Graph

• グラフ $G=(V,E)$ の行列表現

注)どんなグラフも表現出来るわけではない

- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.



有向グラフの場合はどうなるか考えてみよう

- 枝が出る $\rightarrow -1$
- 枝が入る $\rightarrow +1$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

接続行列

incidence matrix

Graph

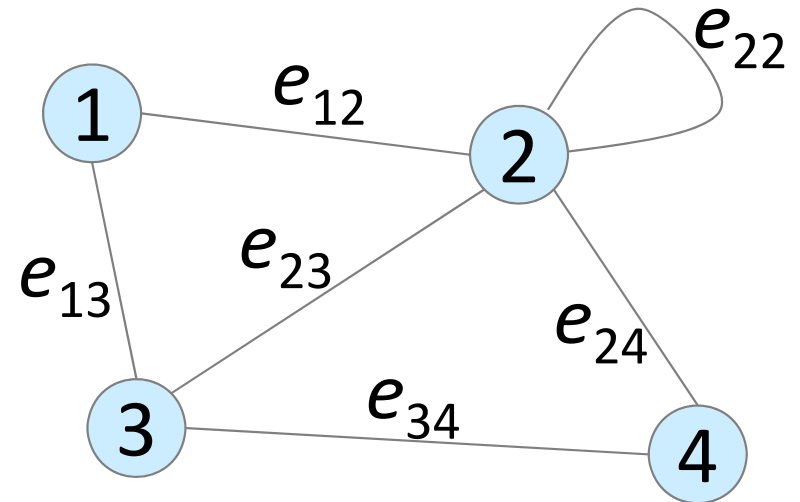
- グラフ $G=(V,E)$

- 路 path

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24}, 4$
 - Ex) $1, 3, 2, 4$
 - Ex) e_{13}, e_{23}, e_{24}

- 閉路 cycle

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12}, 1$
 - Ex) $1, 3, 2, 1$
 - Ex) e_{13}, e_{23}, e_{12}



もっと細かい定義もあるが、
ここでは簡単に述べている

もっと細かい話とは...

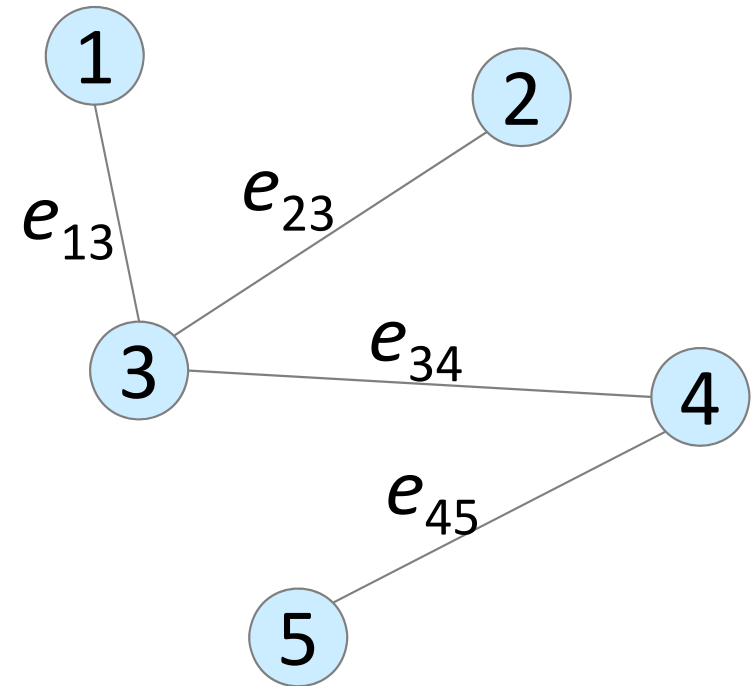
- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

Graph

- グラフ $G=(V,E)$

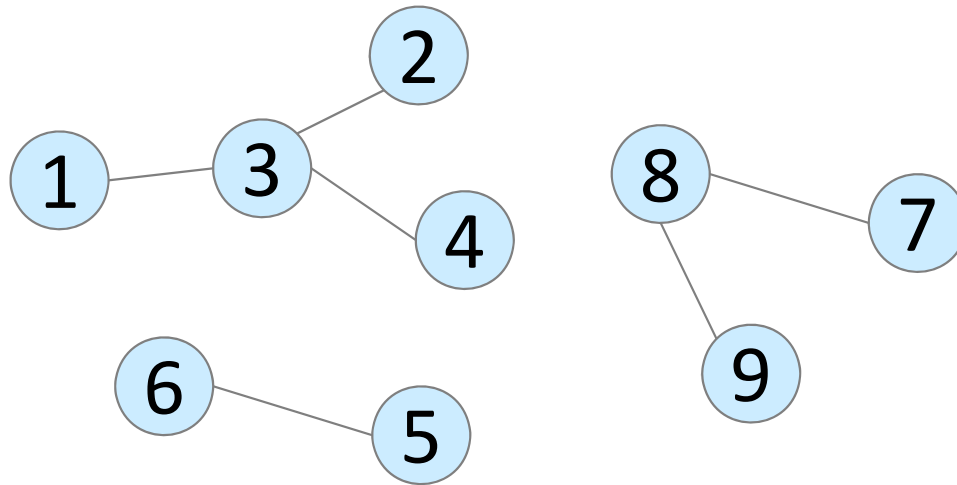
- 木 tree

- 連結で閉路を含まない無向グラフ



- 森 forest

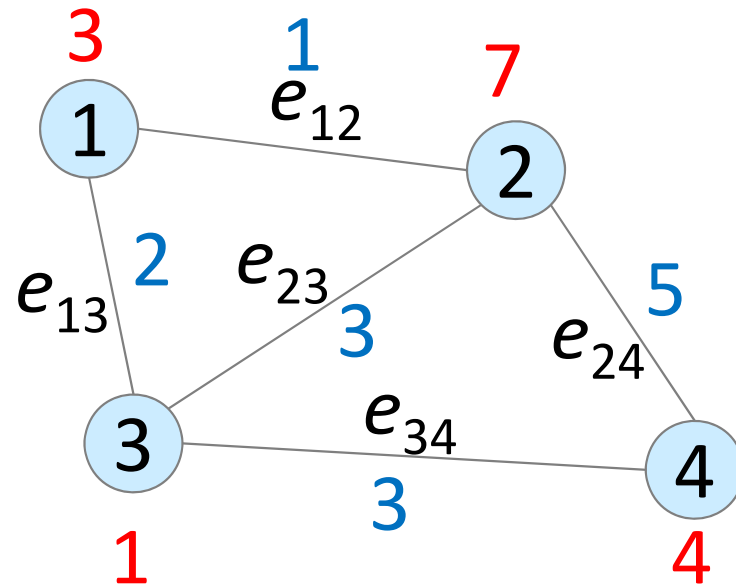
- 閉路を含まない無向グラフ



- 連結成分 connected component

Graph

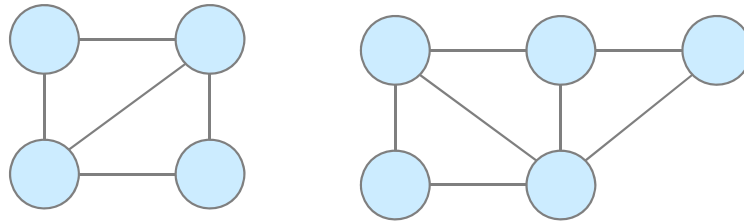
- ネットワーク network
 - コスト cost
 - ラベル label
 - ポテンシャル potential
 - etc.



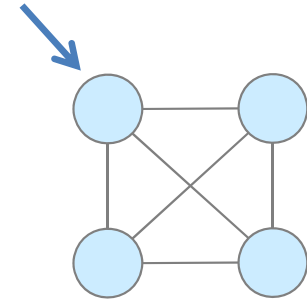
Graph

- 様々なグラフ

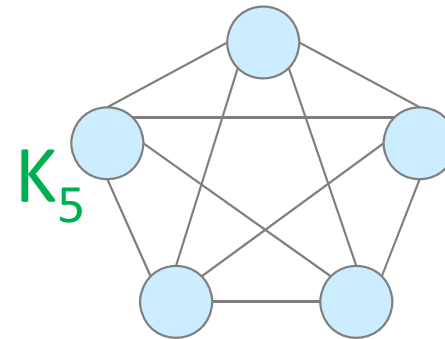
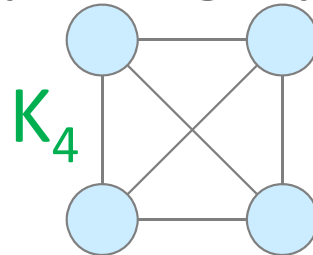
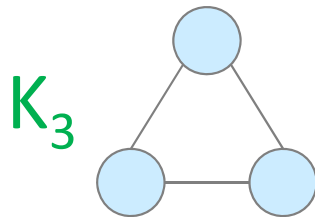
- 平面グラフ plane graph※



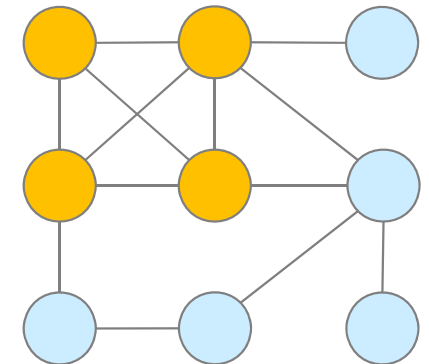
※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graphといいます



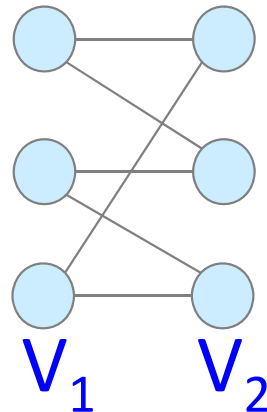
- 完全グラフ complete graph



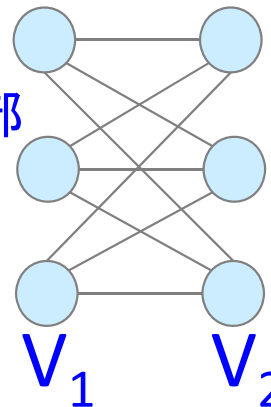
cf. クリーク clique



- 二部グラフ bipartite graph



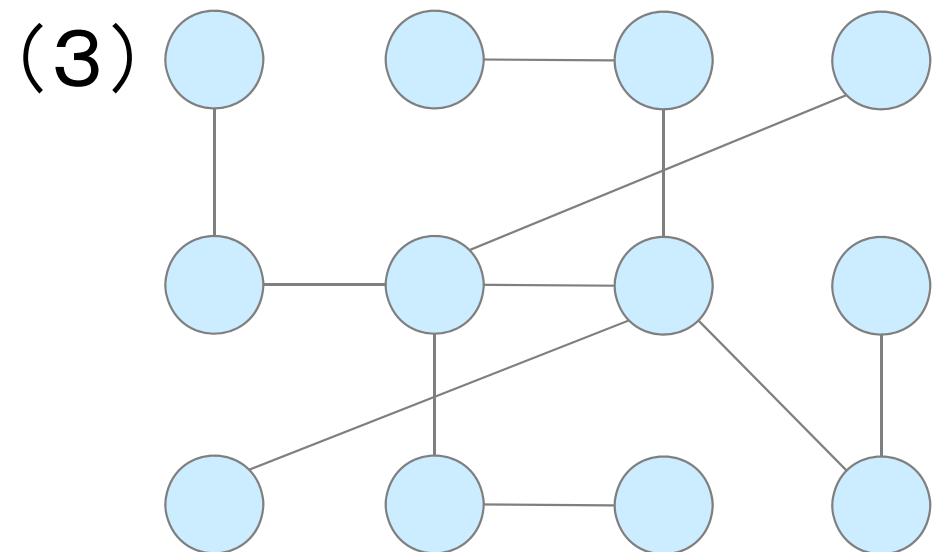
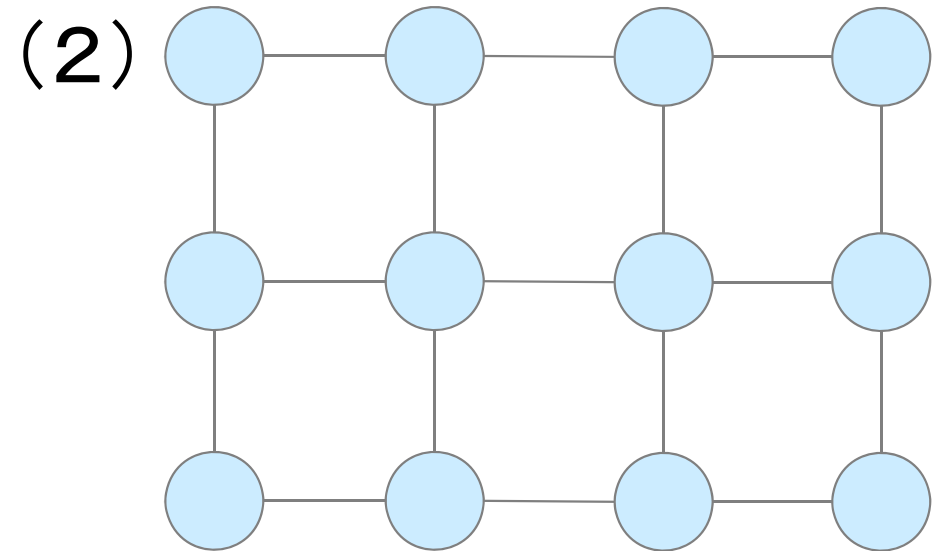
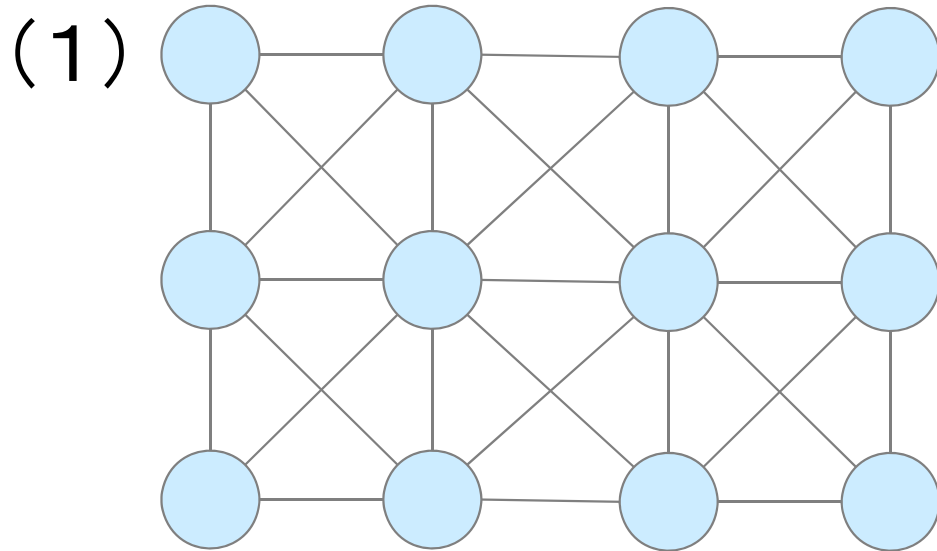
完全二部
グラフ
 $K_{3,3}$



- ✓ 最大クリーク
- ✓ 友達の集合
- ✓ 四色定理
- ✓ 点彩色・辺彩色

練習

- 問:これは何？

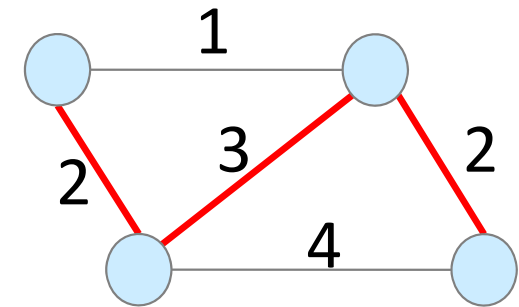


- これは木？
- これは平面グラフ？
- これは完全グラフ？
- これは二部グラフ？

Graph

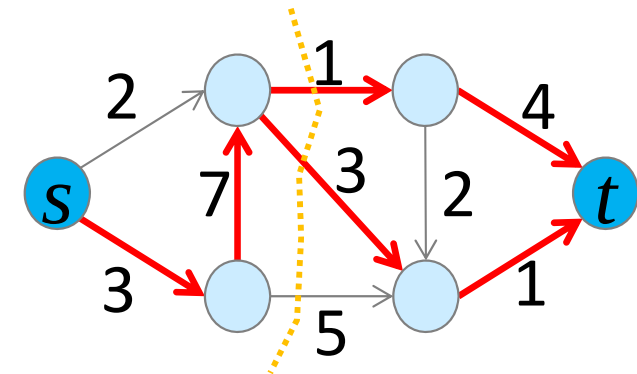
- 全域木 spanning tree

- 最小全域木 minimum spanning tree



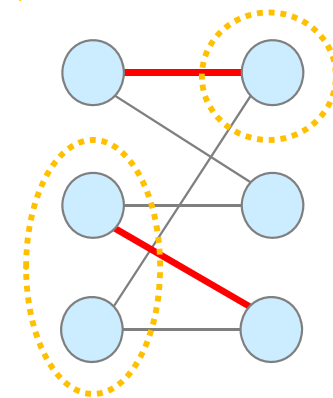
- フロー flow, カット cut

- 最大流 maximum flow
- 最小カット minimum cut
- 最小費用流 minimum cost flow



- マッチング matching, 被覆 cover

- 最大マッチング maximum matching
- 最小被覆 minimum cover



- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾーン分解
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ有線探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性: k 点連結, k 枝連結
- ✓ 強連結, 半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

Graph

- オイラー閉路 Eulerian cycle

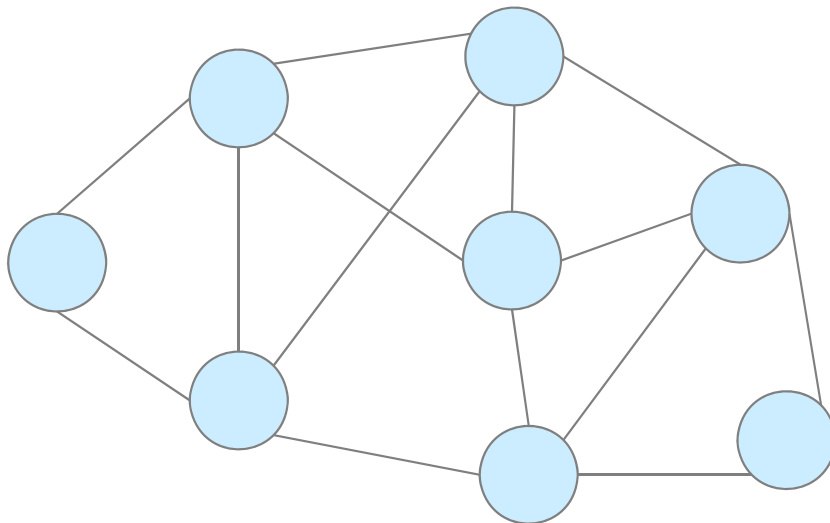
- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

注1) どの枝(点)から始めても構わない

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注2) スタート枝(点)とゴール枝(点)が異なる場合は、それぞれ、オイラー路, ハミルトン路とよぶ



※与えられたグラフで
オイラー閉路を求める問題は、
クラスPに属す(多項式時間で解ける)
ハミルトン閉路を求める問題は、
NP完全問題 NP complete problem

※NP完全問題とは、クラスNPに属し、かつ、NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題

※「P≠NP予想」未解決(7つのミレニアム問題の1つ)

参考文献

- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'',
Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'',
CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」
産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)

もっと知りたい人は...

- 関連する授業
 - ✓ 「ネットワークモデル分析」
 - ✓ 「最適化モデル分析」
 - ✓ etc.