

問題解決技法入門

2. 社会的選択：安定性 安定結婚問題

堀田 敬介

浮気しない？カップル

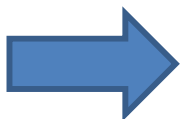
- 6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の**好き嫌い**を考えずに強引にくっつけちゃうと、**浮気する人**が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？



どうすれば浮気しないの？

浮気しないってどういうこと？

浮気ってどういう状況で起こる？

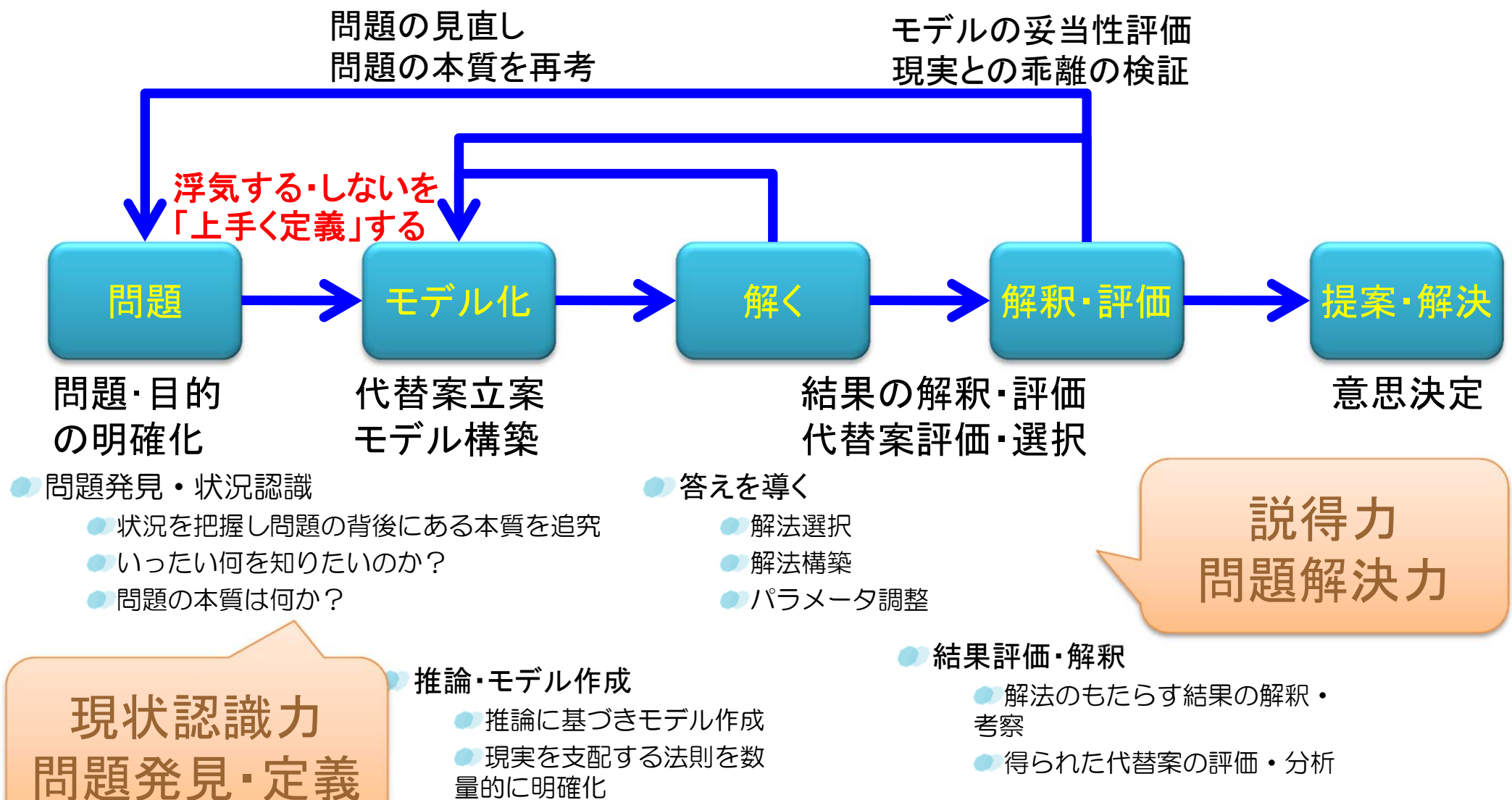


浮気する・しないを「**上手く定義**」する

問題解決

論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけない.

安定マッチング



浮気できない

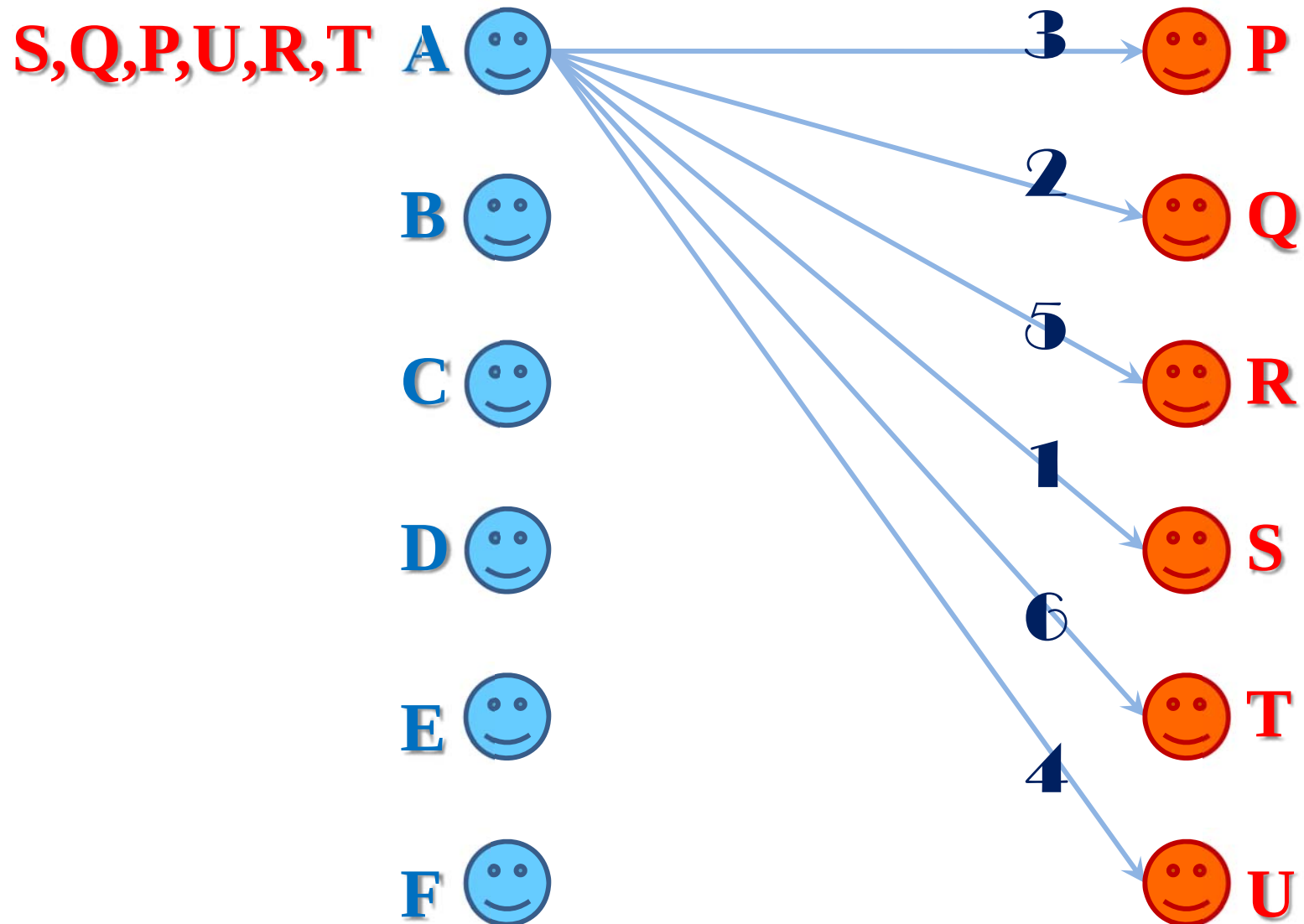
不安定なマッチング



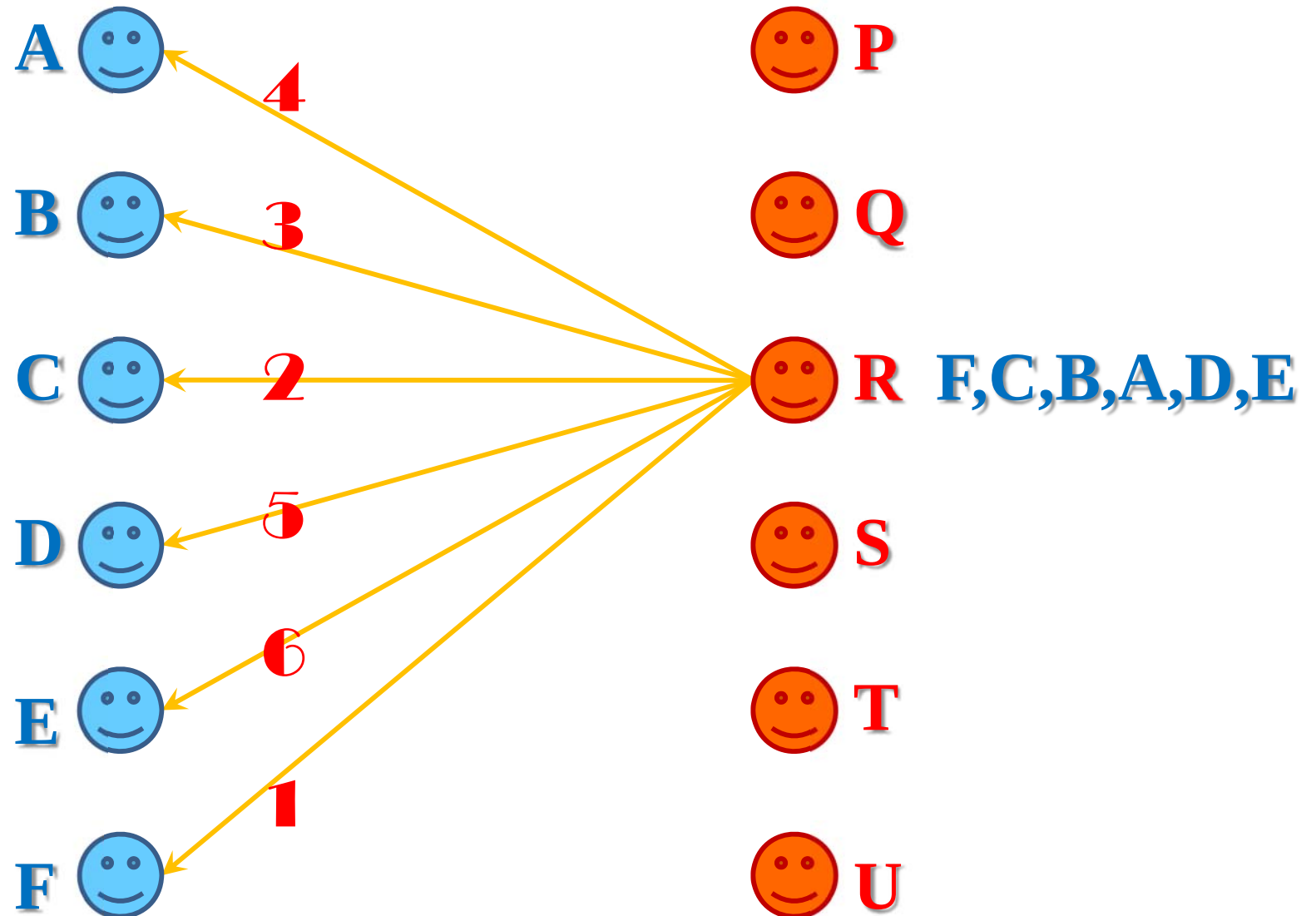
浮気できる



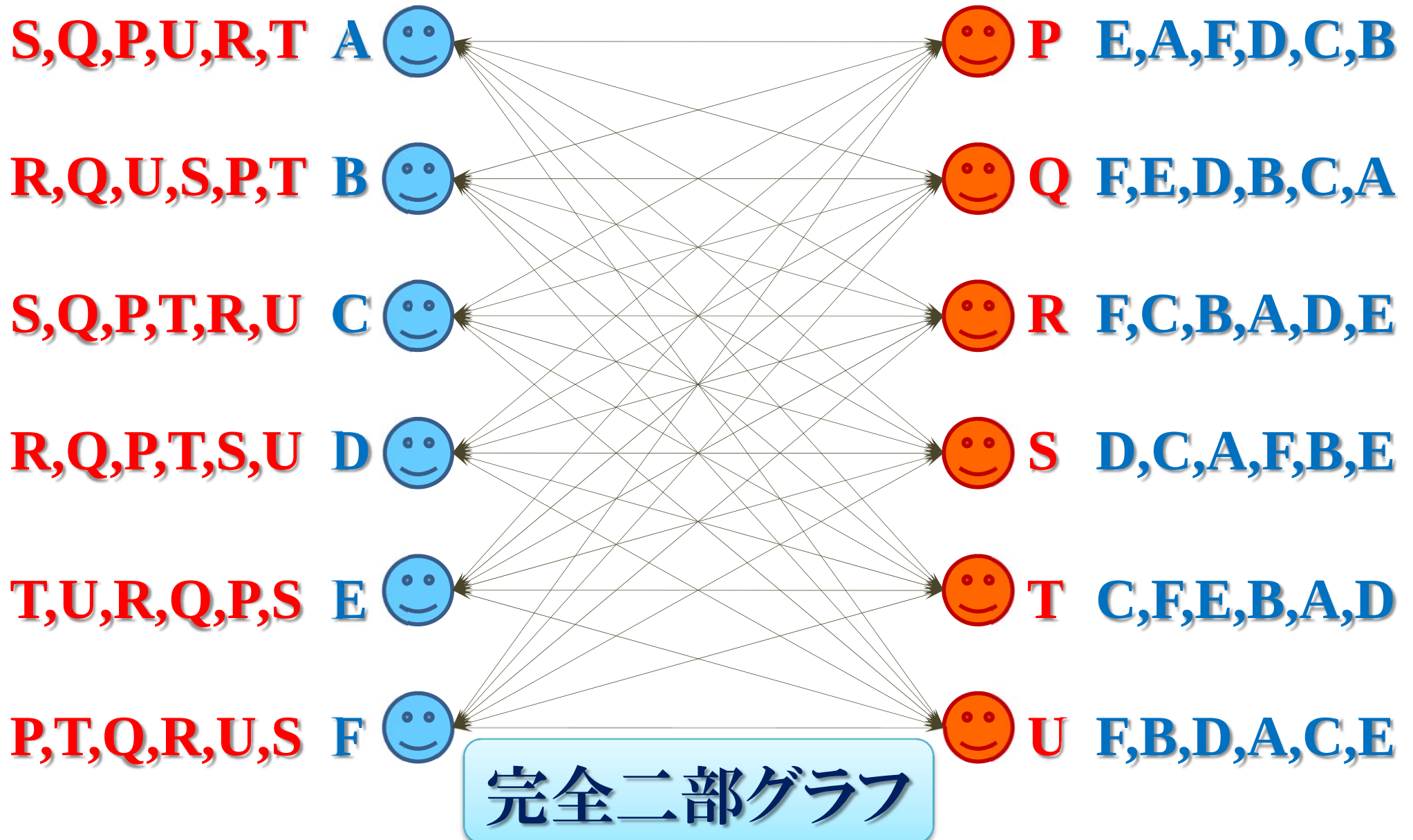
安定結婚問題（各自の選好順序）



安定結婚問題（各自の選好順序）

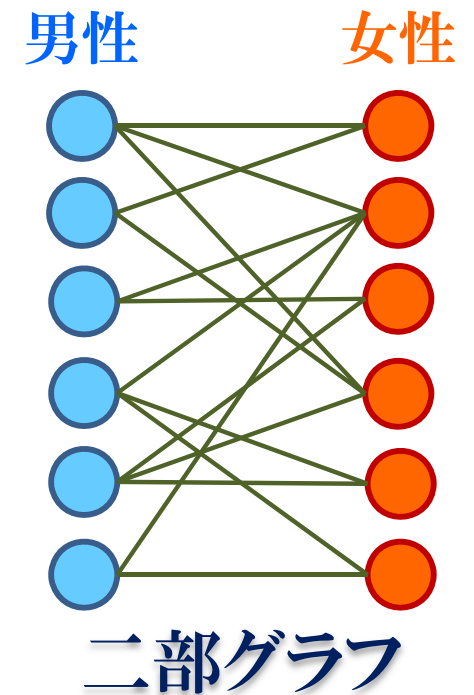
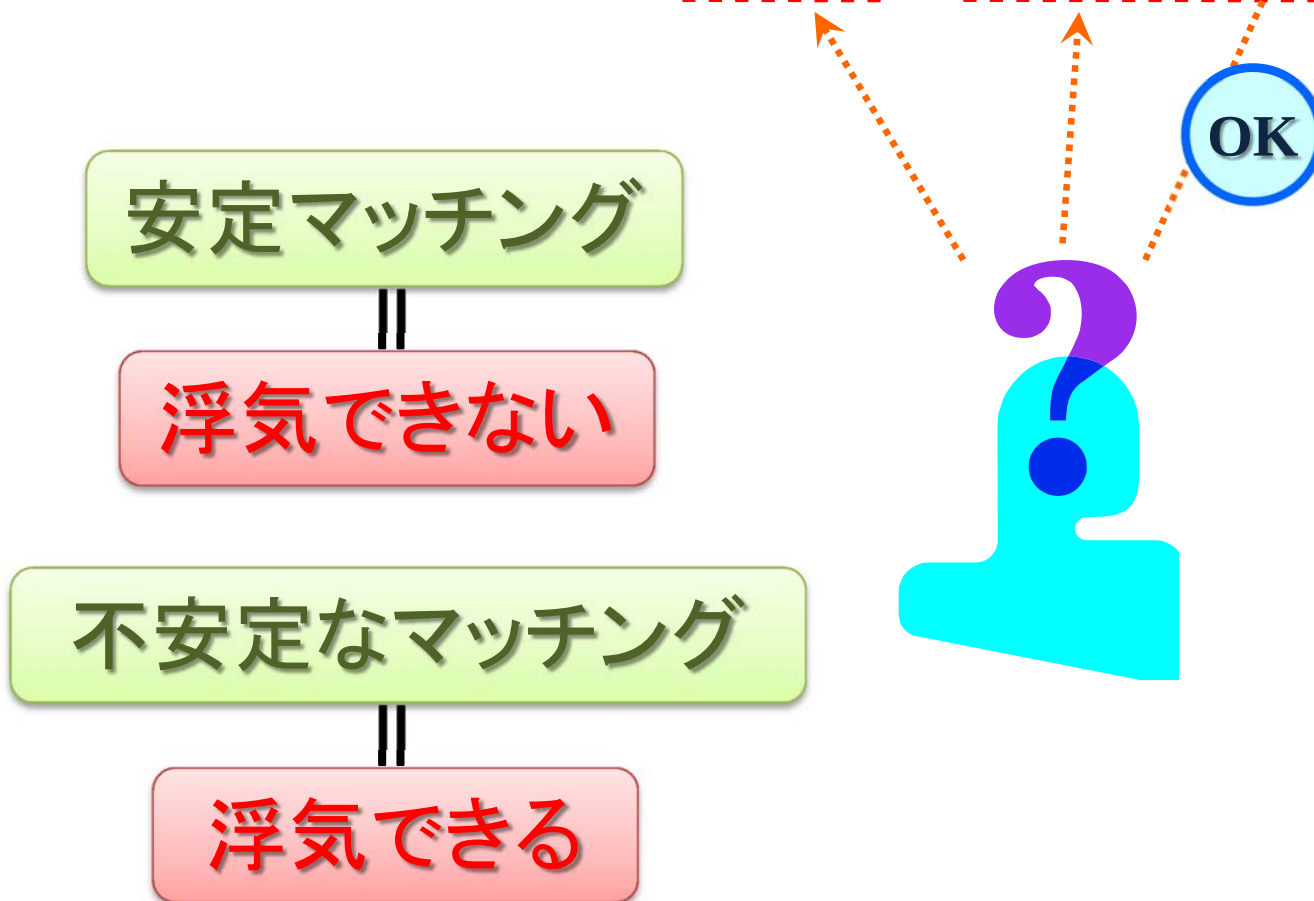


安定結婚問題（各自の選好順序）



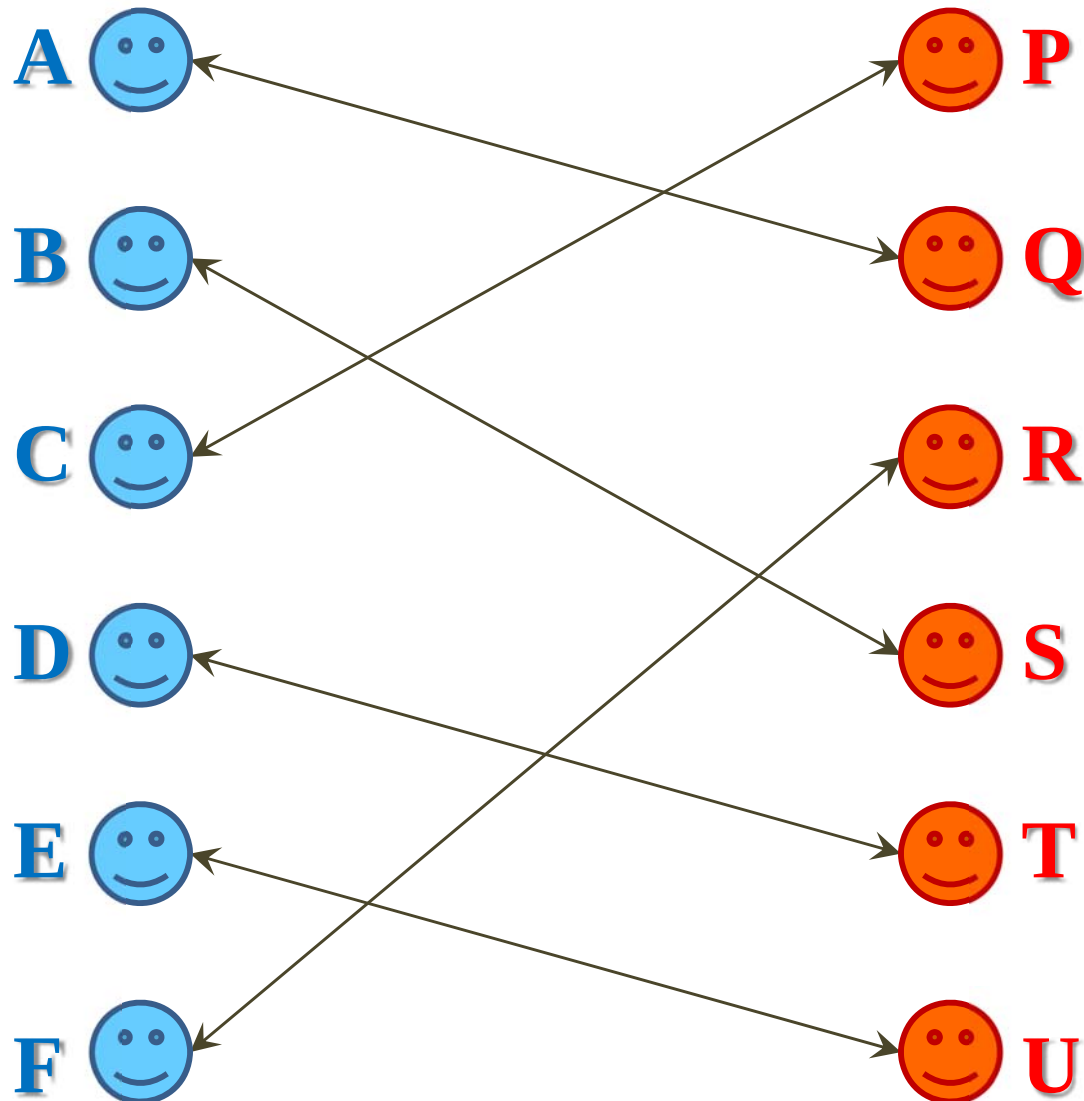
安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけない.



男性：点集合 V_1
女性：点集合 V_2

安定結婚問題 (マッチング)



マッチング

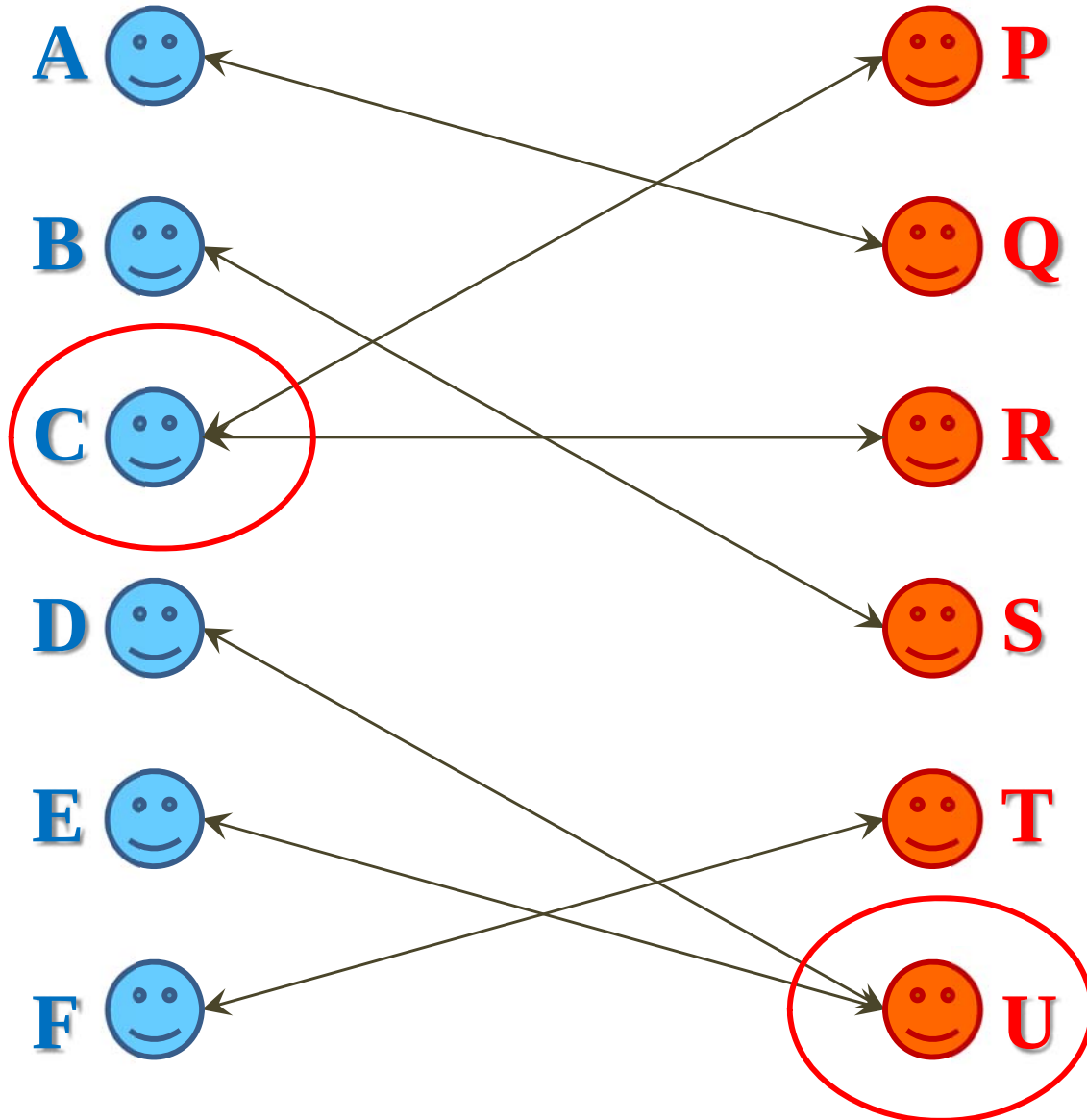
端点を共有しない枝の集合

つまり, どの点 (node) も
高々1本の枝 (edge) にのみ
接続 (incident to) している

完全マッチング

全ての点 (node) が, マッチ
ング (matching) の枝 (edge)
に接続しているとき, その
マッチングを完全マッチング
という

安定結婚問題 (マッチング)



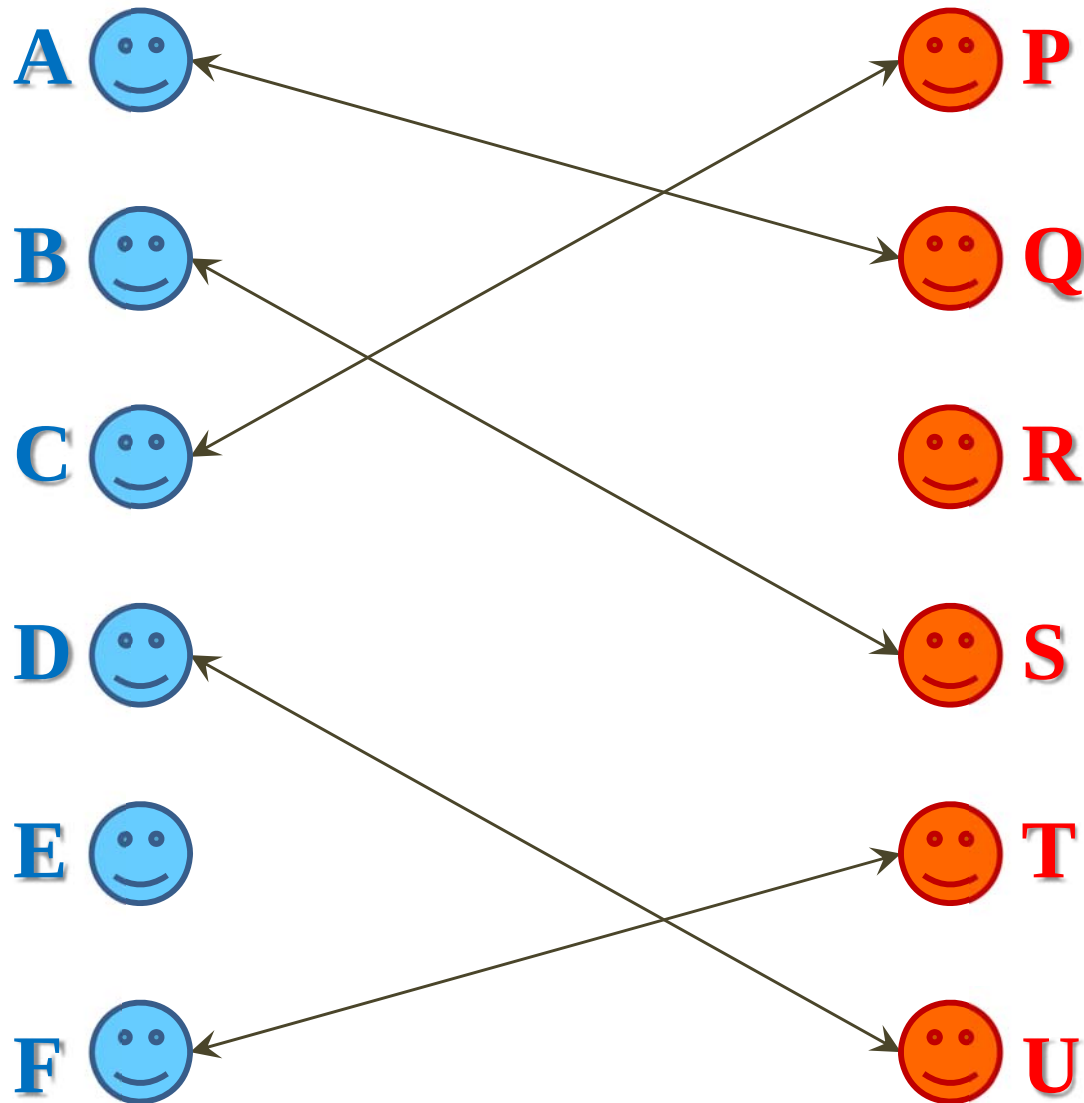
この枝集合は、マッチング
(matching)ではない

なぜだかわかる？

その通り！ マッチングで
はありません。

なぜなら、端点を共有する
枝がある(二股をかけてい
る人がいる)から

安定結婚問題 (マッチング)



この枝集合は、マッチング
(matching)だろうか？

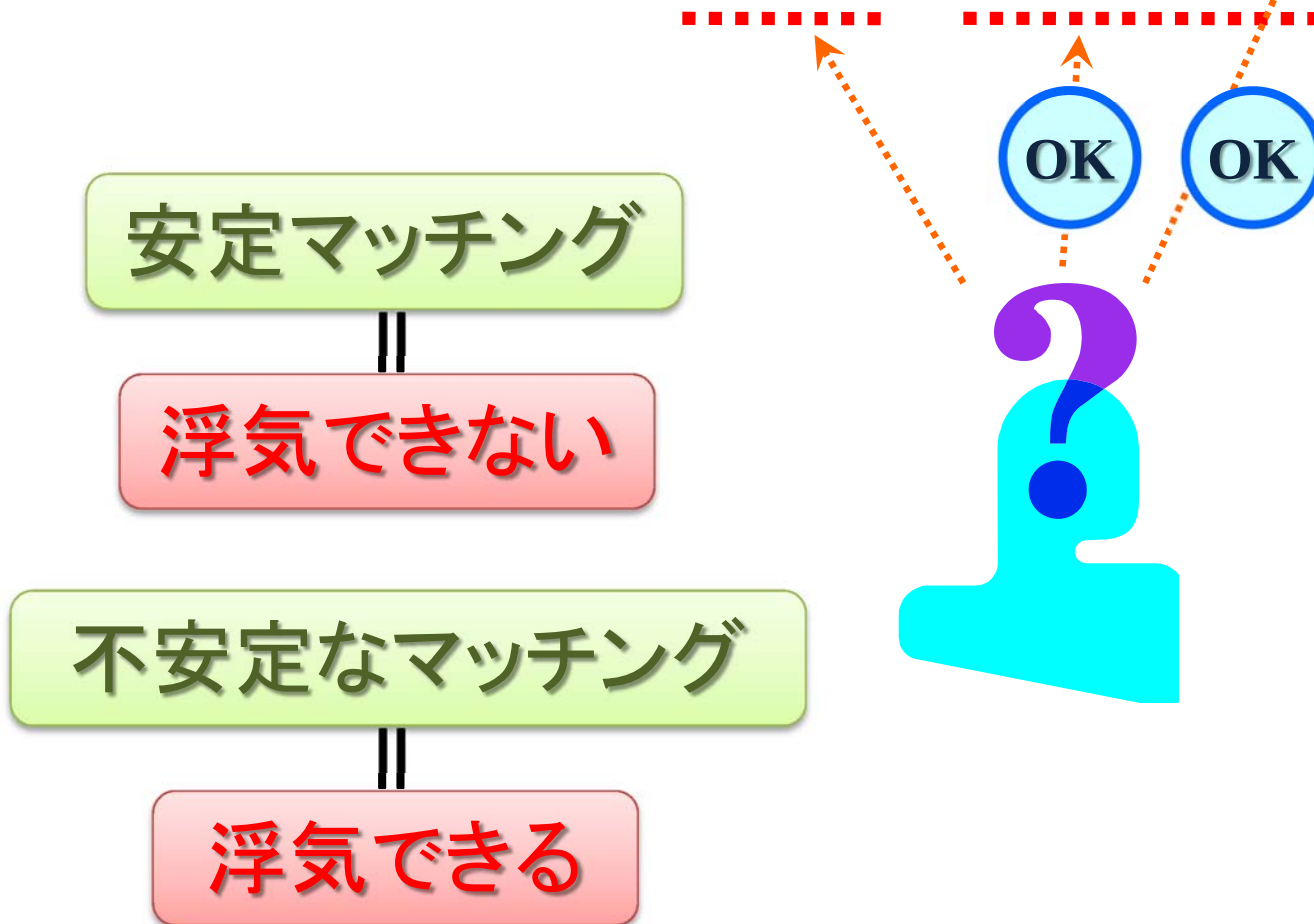
マッチング (matching) です。
でも、完全マッチング
(perfect matching) ではない
ので、ペアを組んでない人
がいるね。

つまり、我々は完全マッチング
を求めたいのだよ

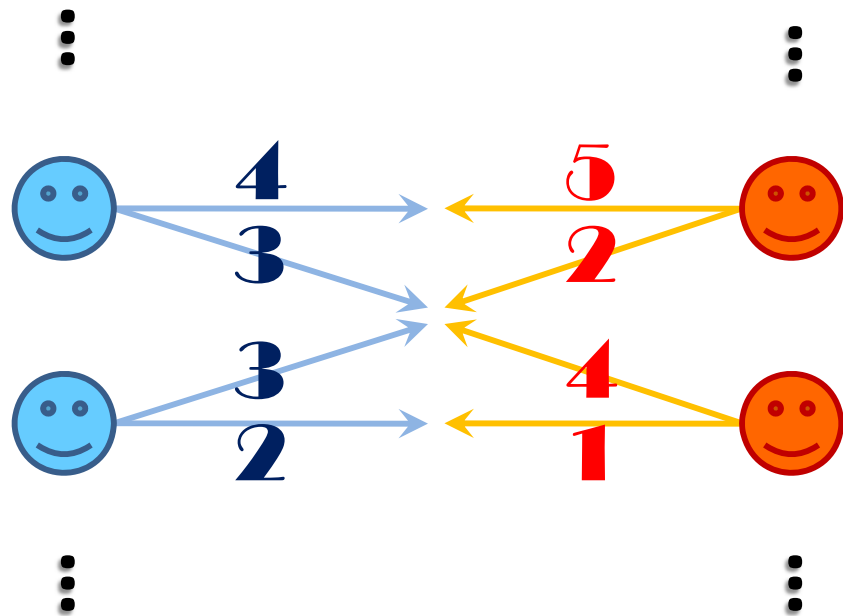
※男女が同数でない場合は、完全マッチング
(perfect matching) は存在しないので、最大マッチン
グ (maximum matching) を求めます。

安定結婚問題

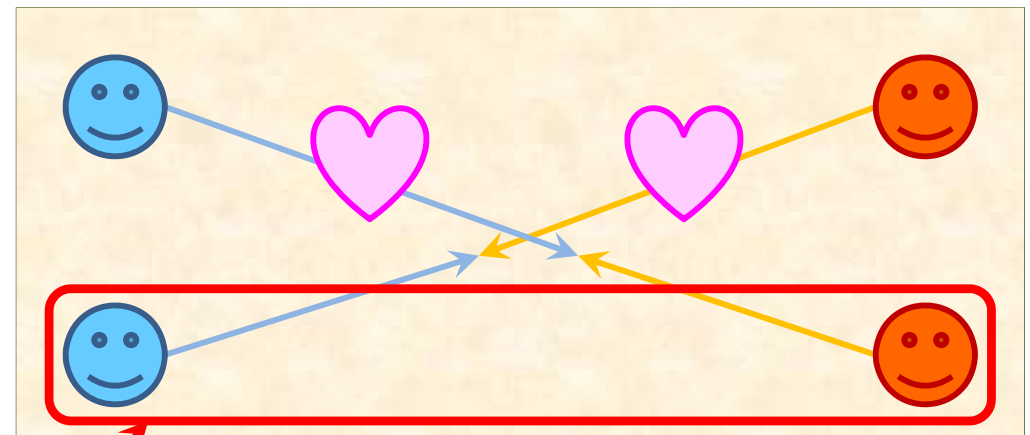
- n 人の男性の集合と、 m 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つけない。



浮気する(不安定な)カップルとは？

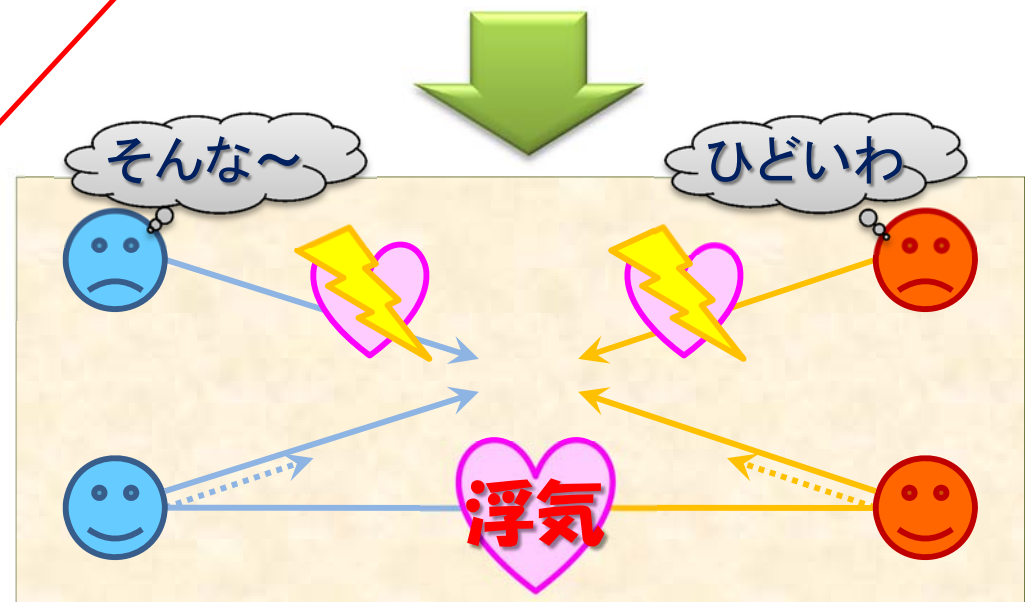


こんな2組のカップル(マッチング)を作ってしまったら...

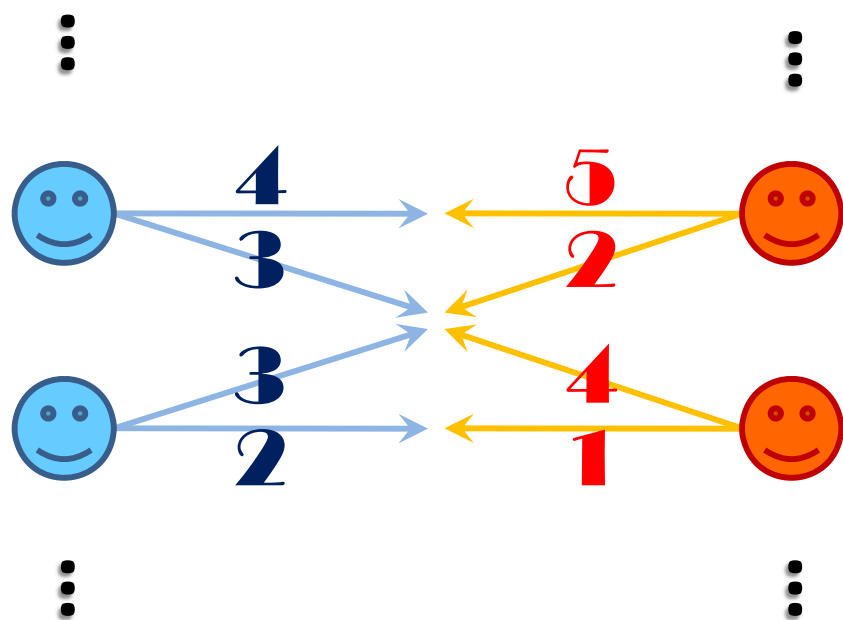


このマッチングは不安定！
なぜなら

ブロッキング・ペア
が存在するから！



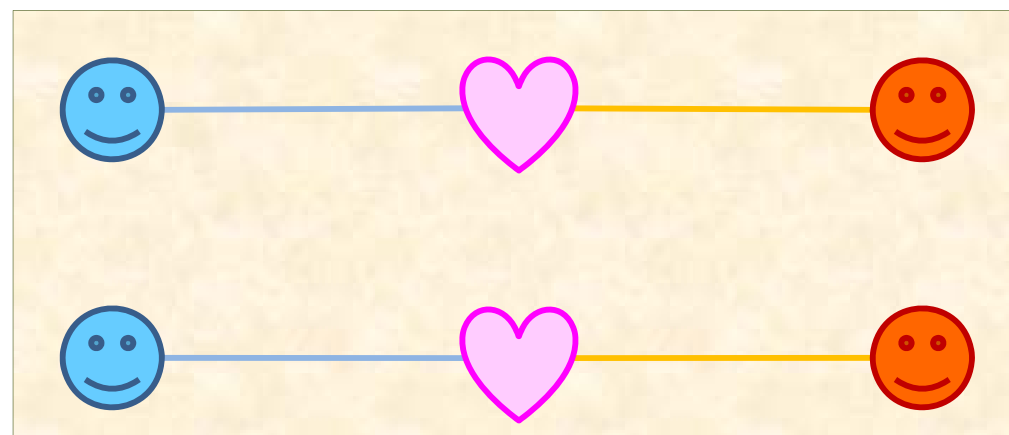
浮気しない(安定な)恋人たち



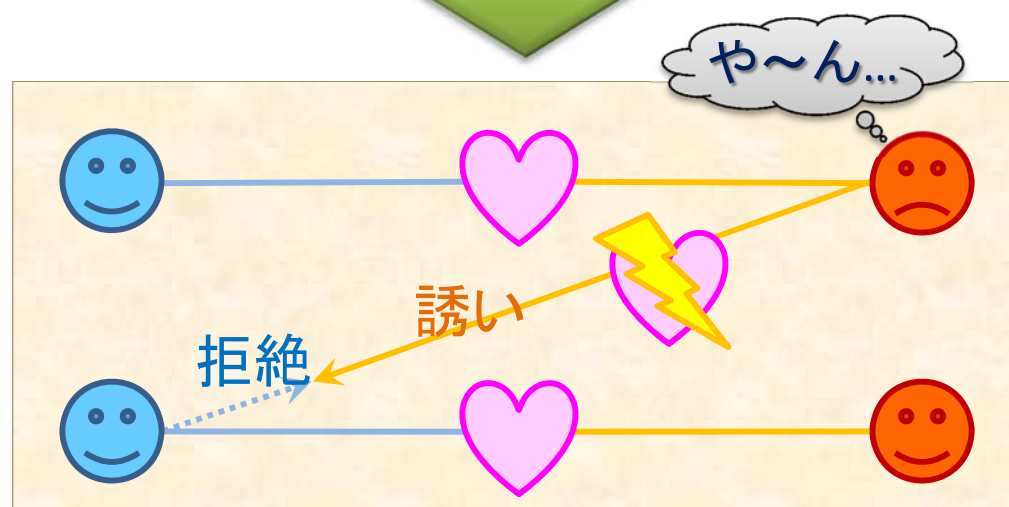
このマッチングは安定！
なぜなら

ブロッキング・ペア
が存在しないから

浮気しない(できない)恋人たち

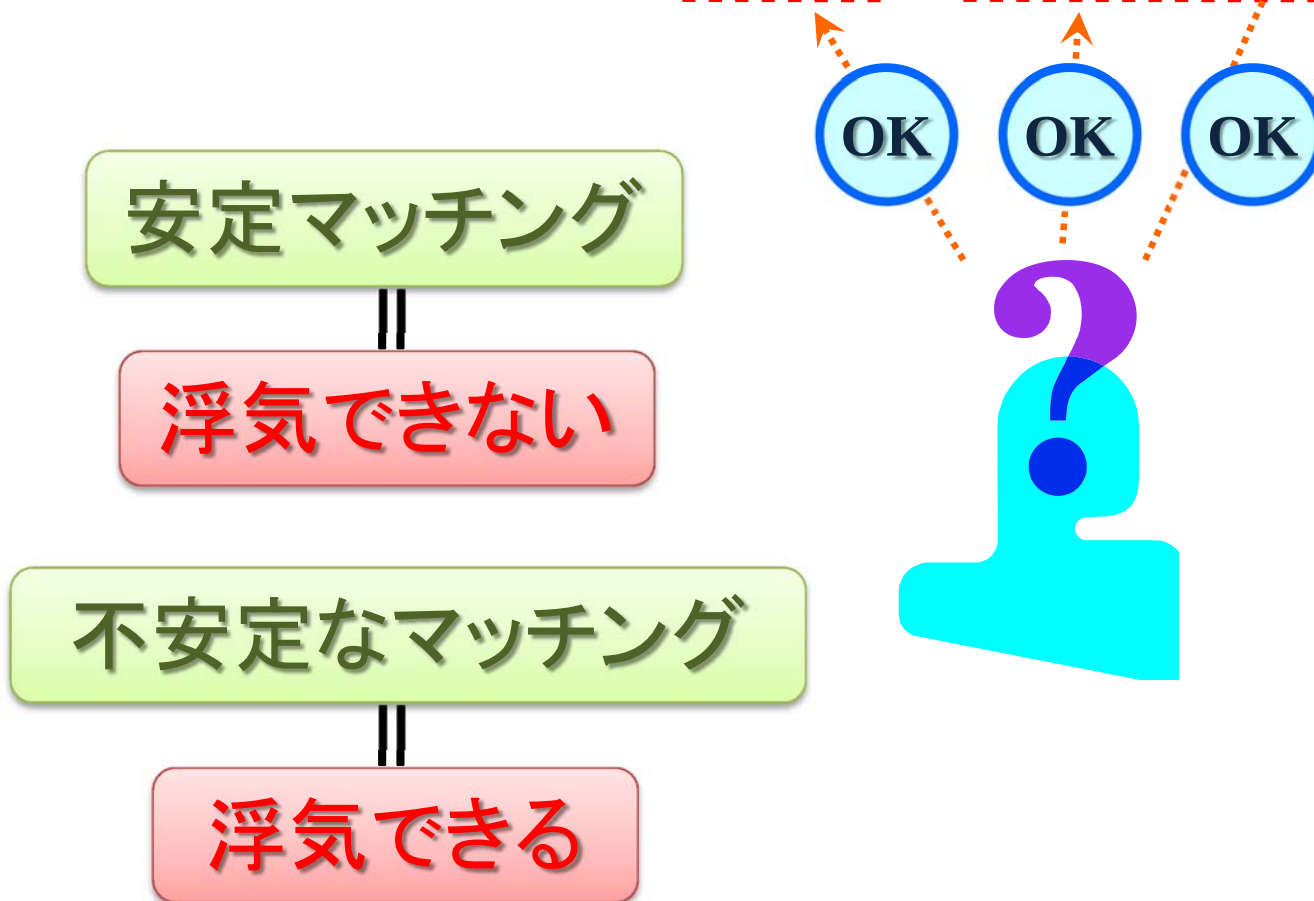


浮気を試みるも...

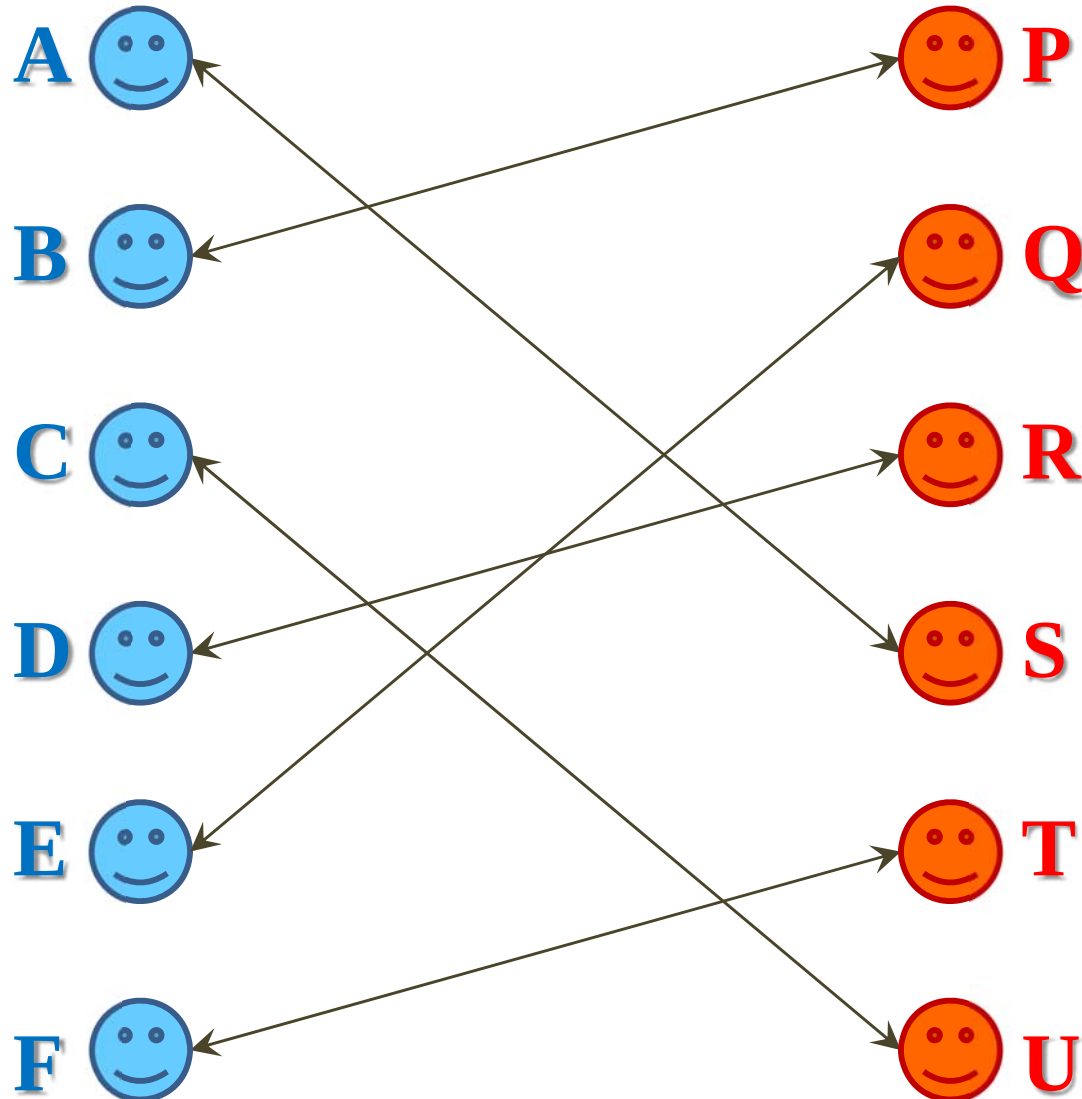


安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の**選好順序**をもっている. このとき, **安定なマッチング**を見つけない.



安定結婚問題(まとめ)



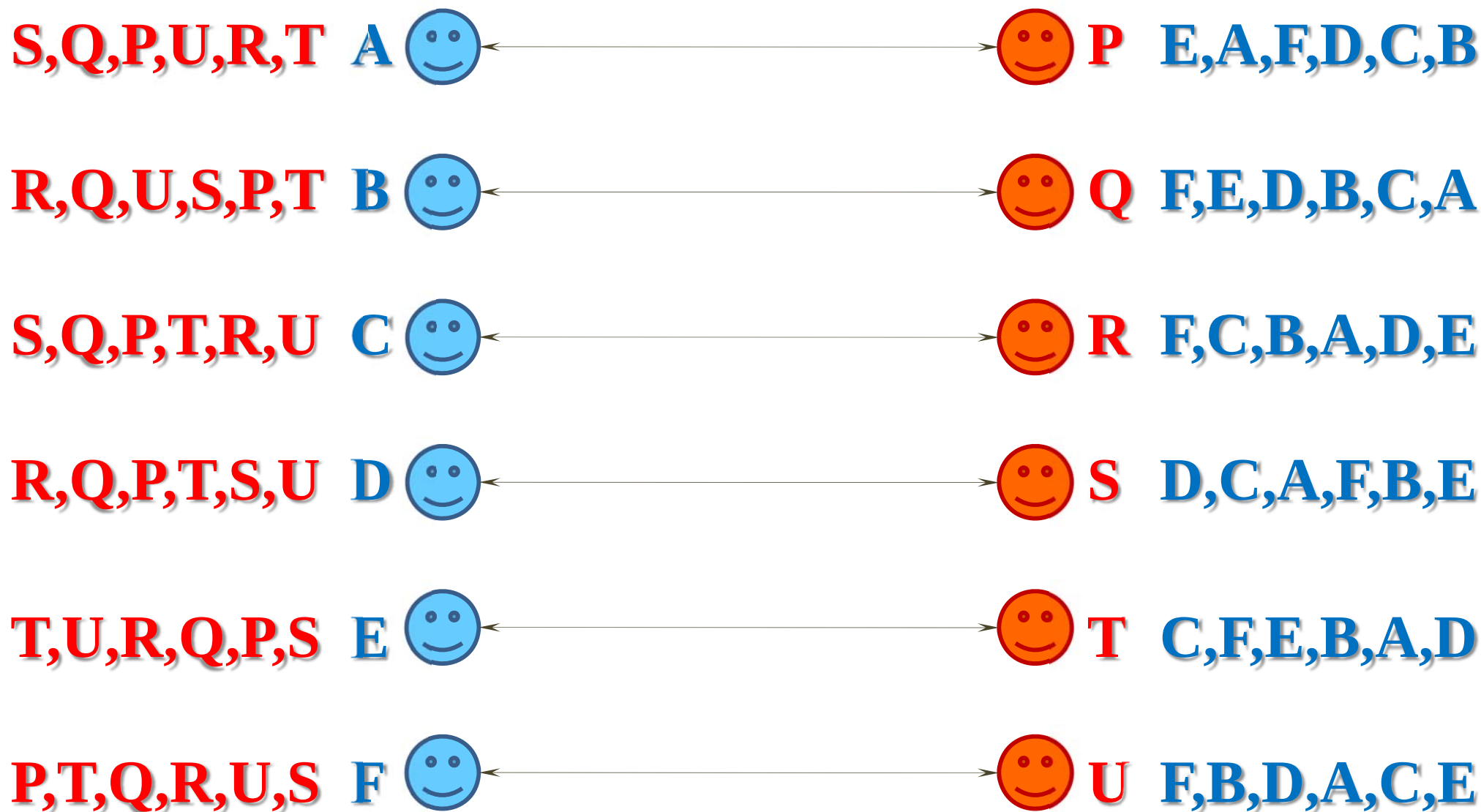
浮気しないカップルをつくる(安定結婚問題を解く)ということは,

(ブロッキング・ペアが存在しない) **安定**な完全マッチングを求める

こと

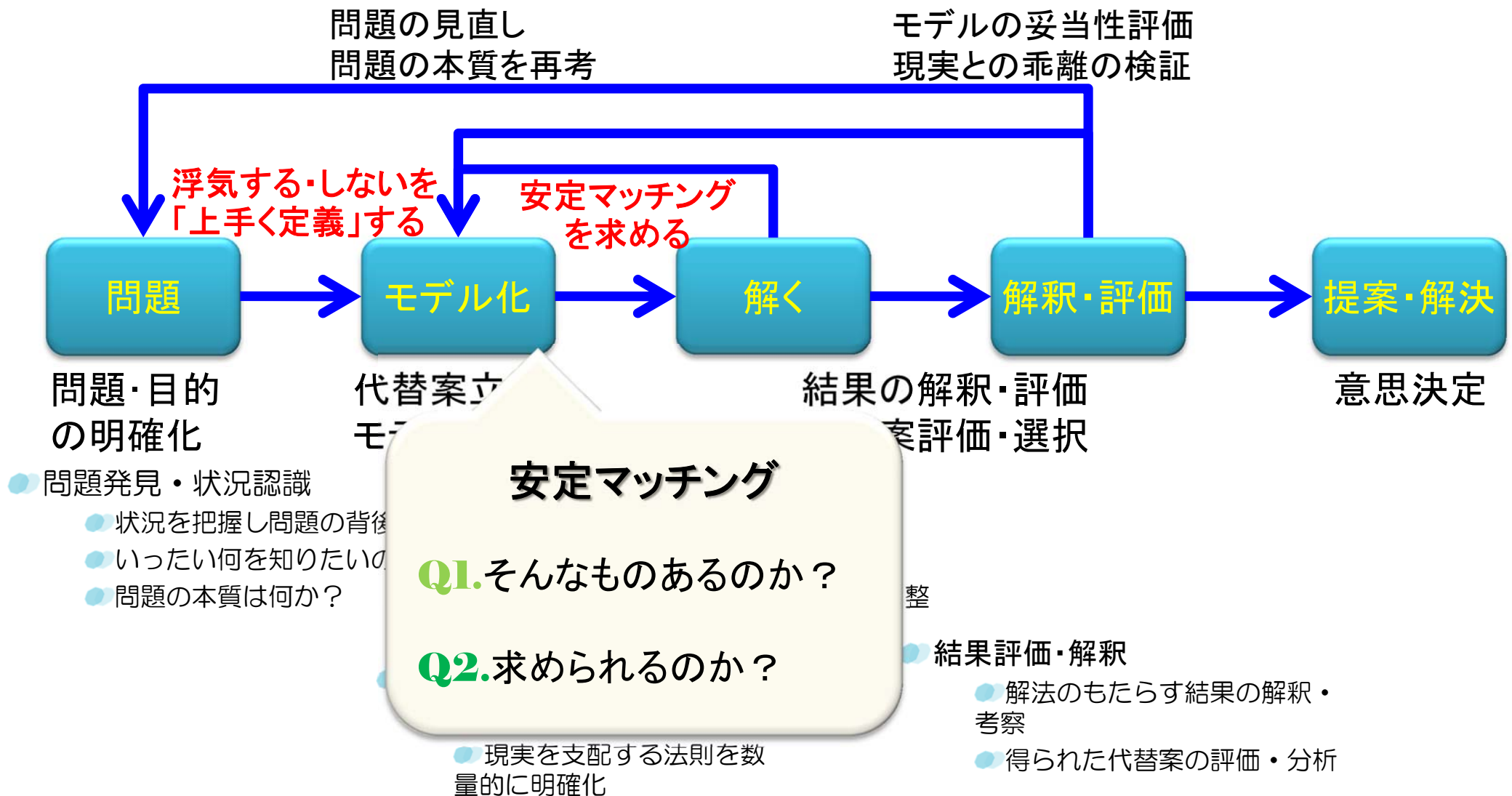
※男女が同数でない場合は, 完全マッチング(perfect matching)は存在しないので, 最大マッチング(maximum matching)を求めます.

問題：このマッチングは安定？

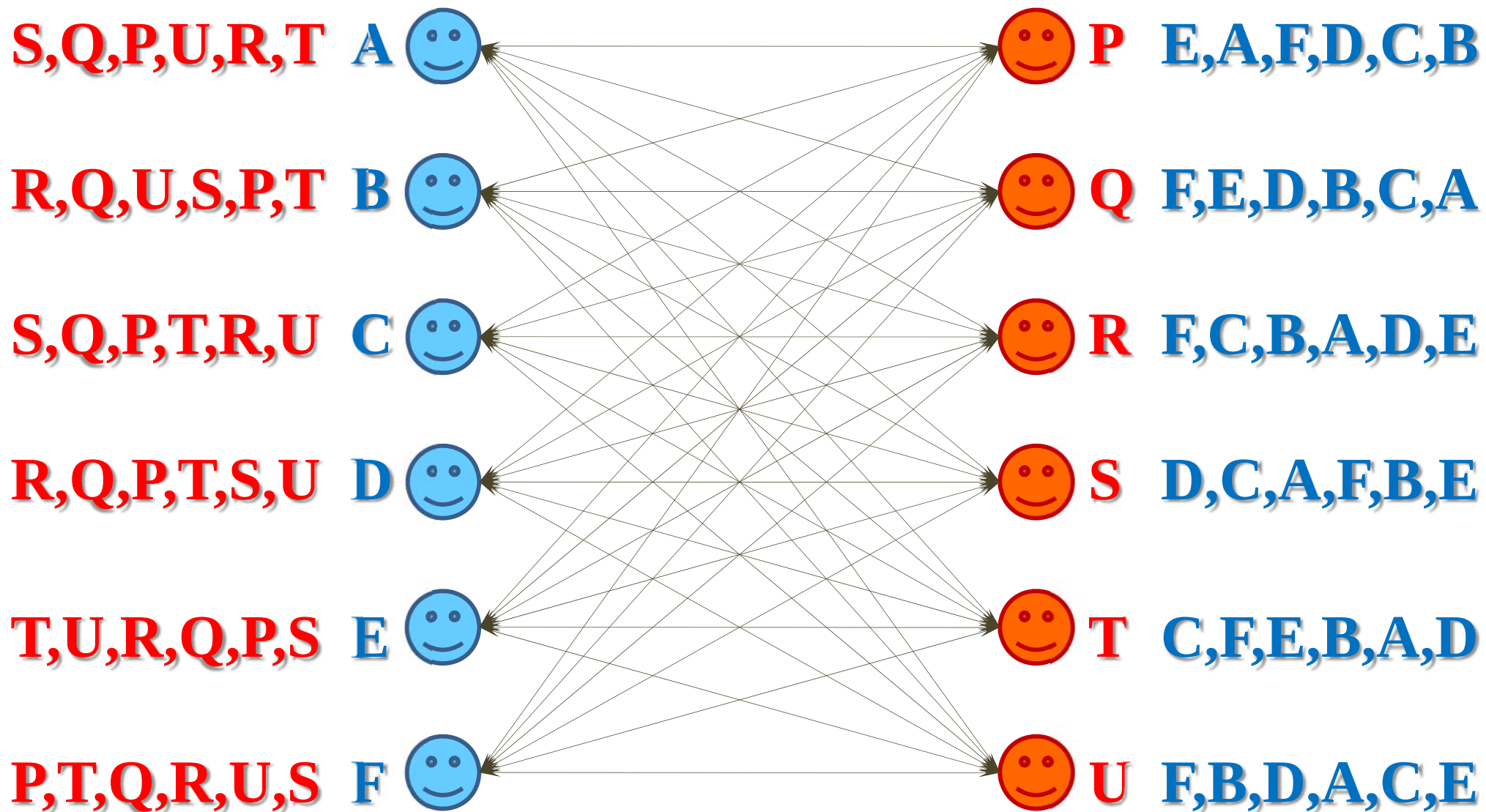


問題解決

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



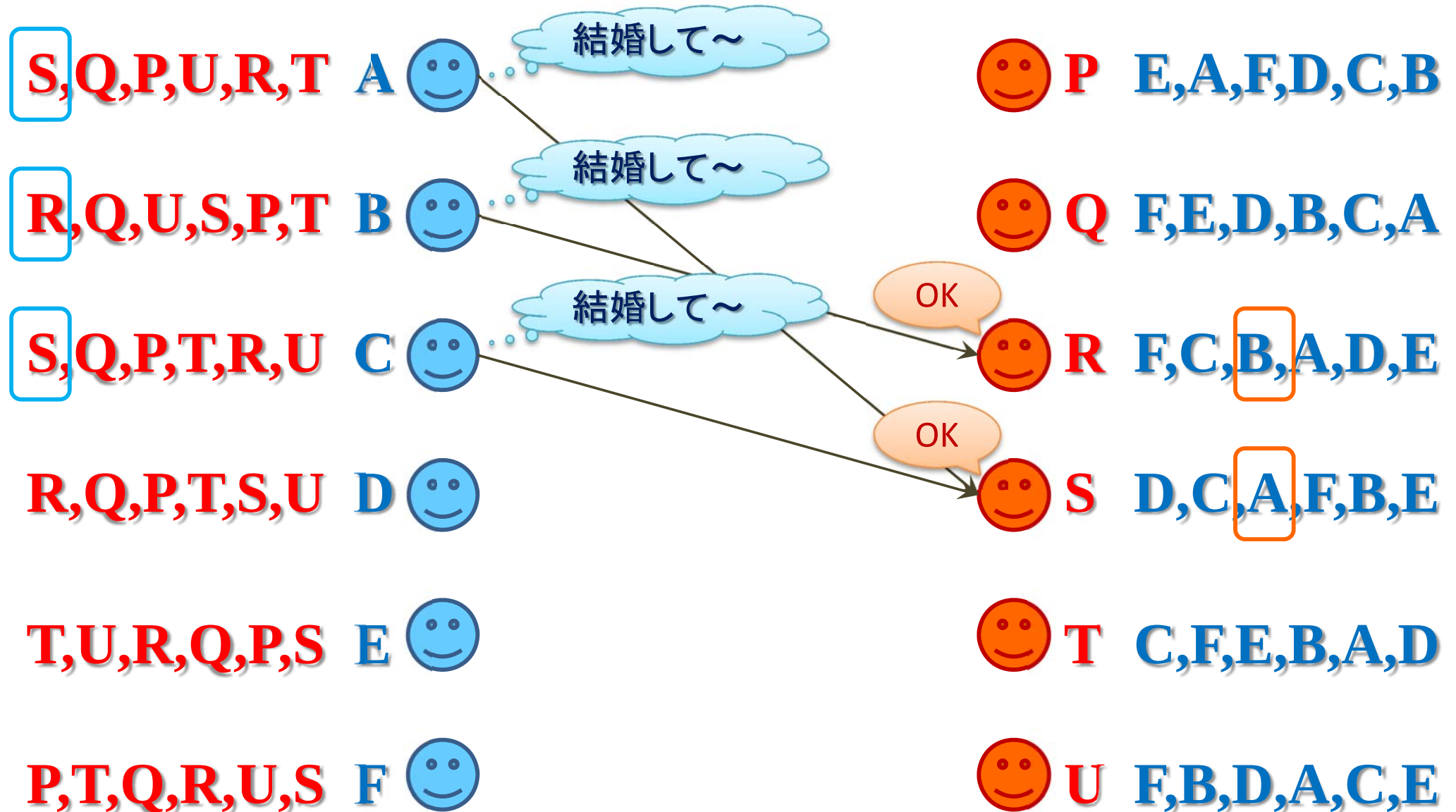
演習：やってみよう



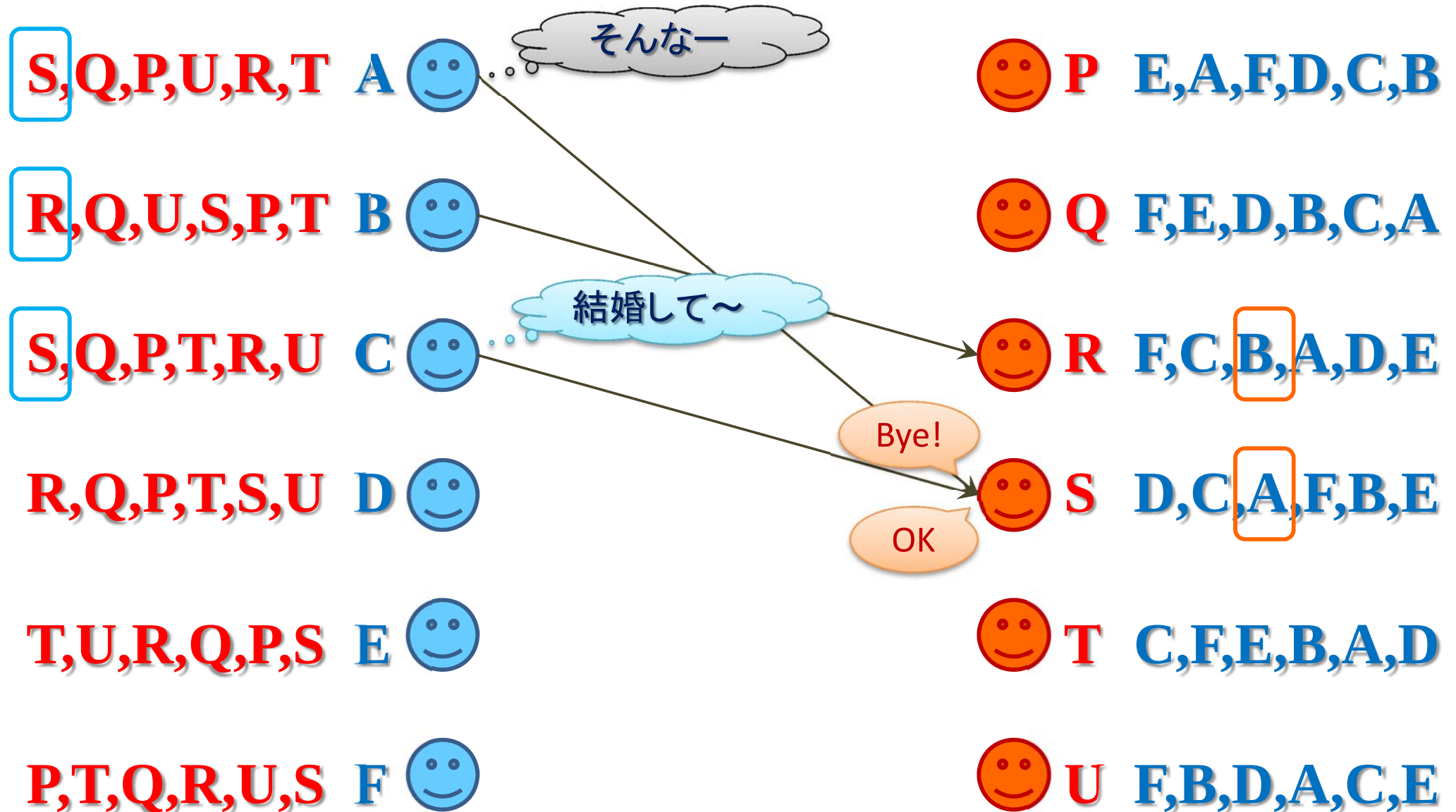
安定結婚問題を解く

Gale-Shapley アルゴリズム

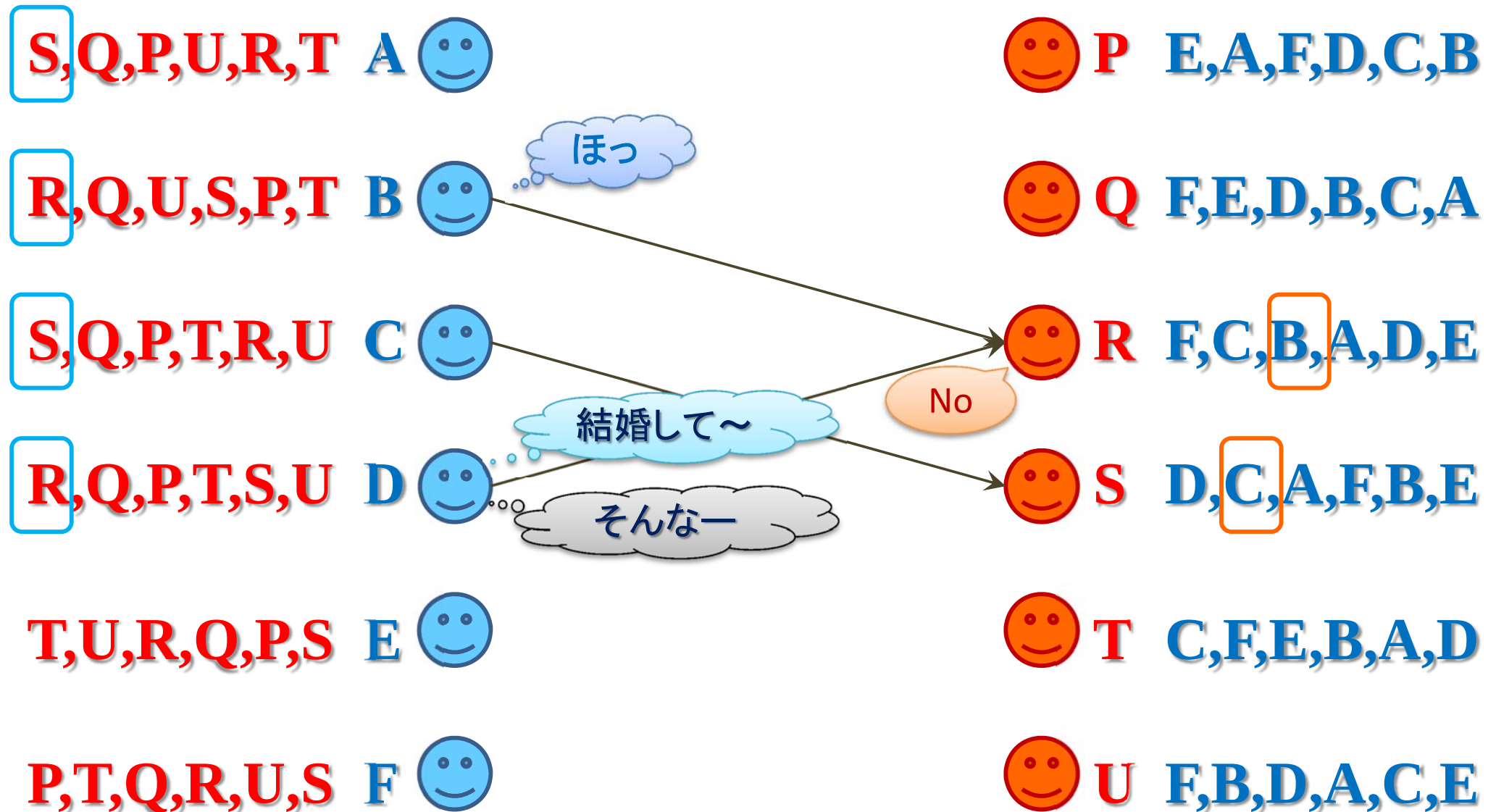
Gale-Shapley アルゴリズム



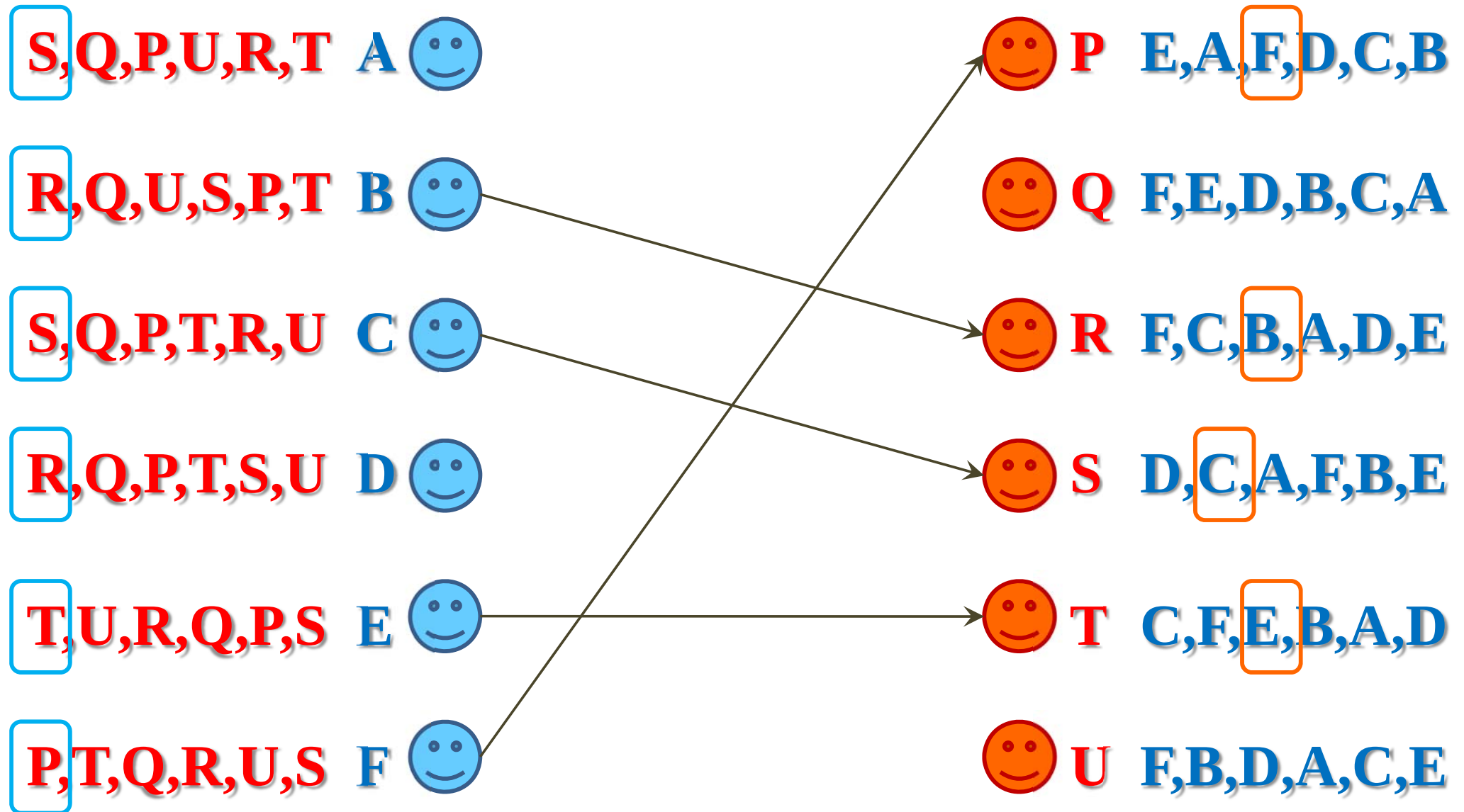
Gale-Shapley アルゴリズム



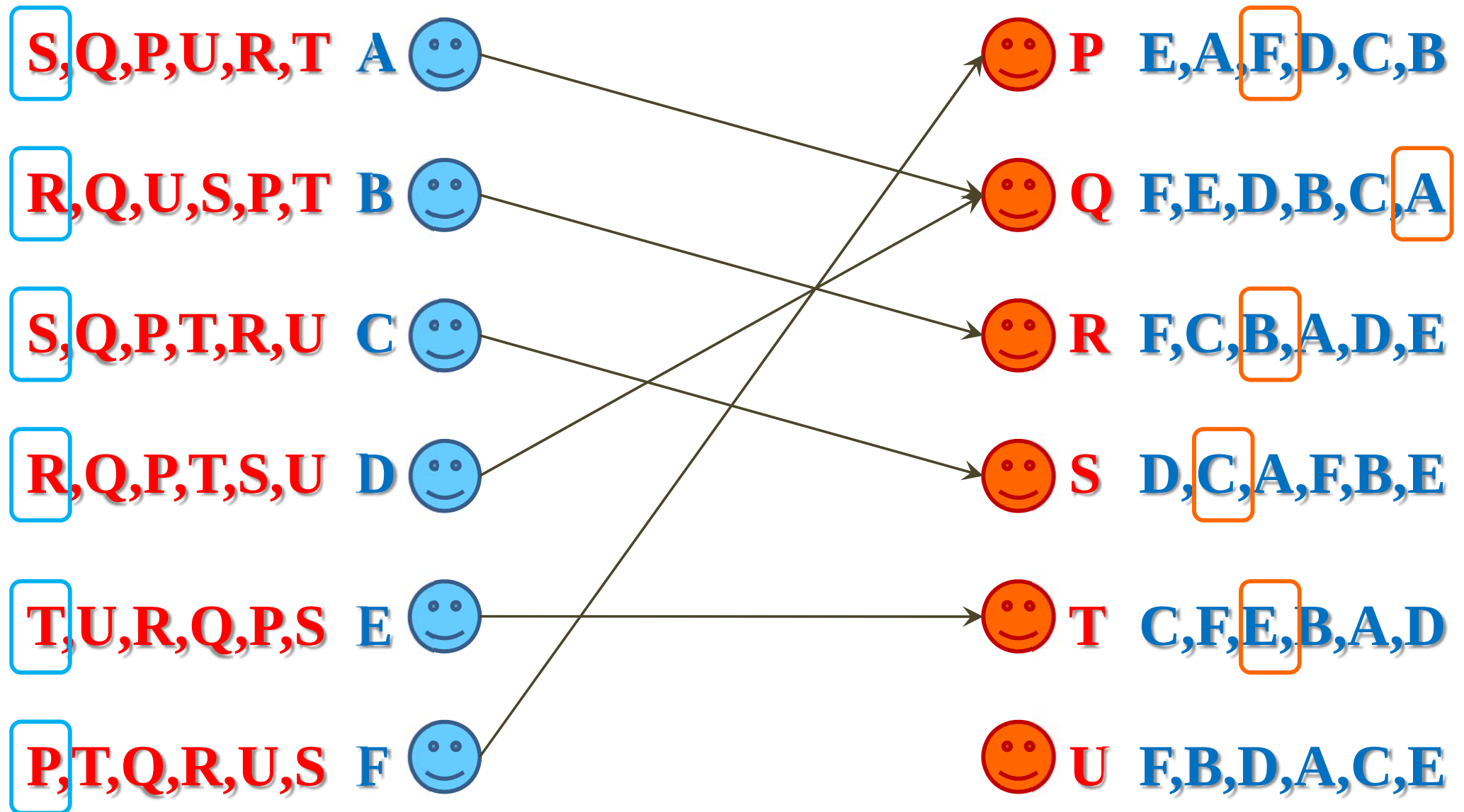
Gale-Shapley アルゴリズム



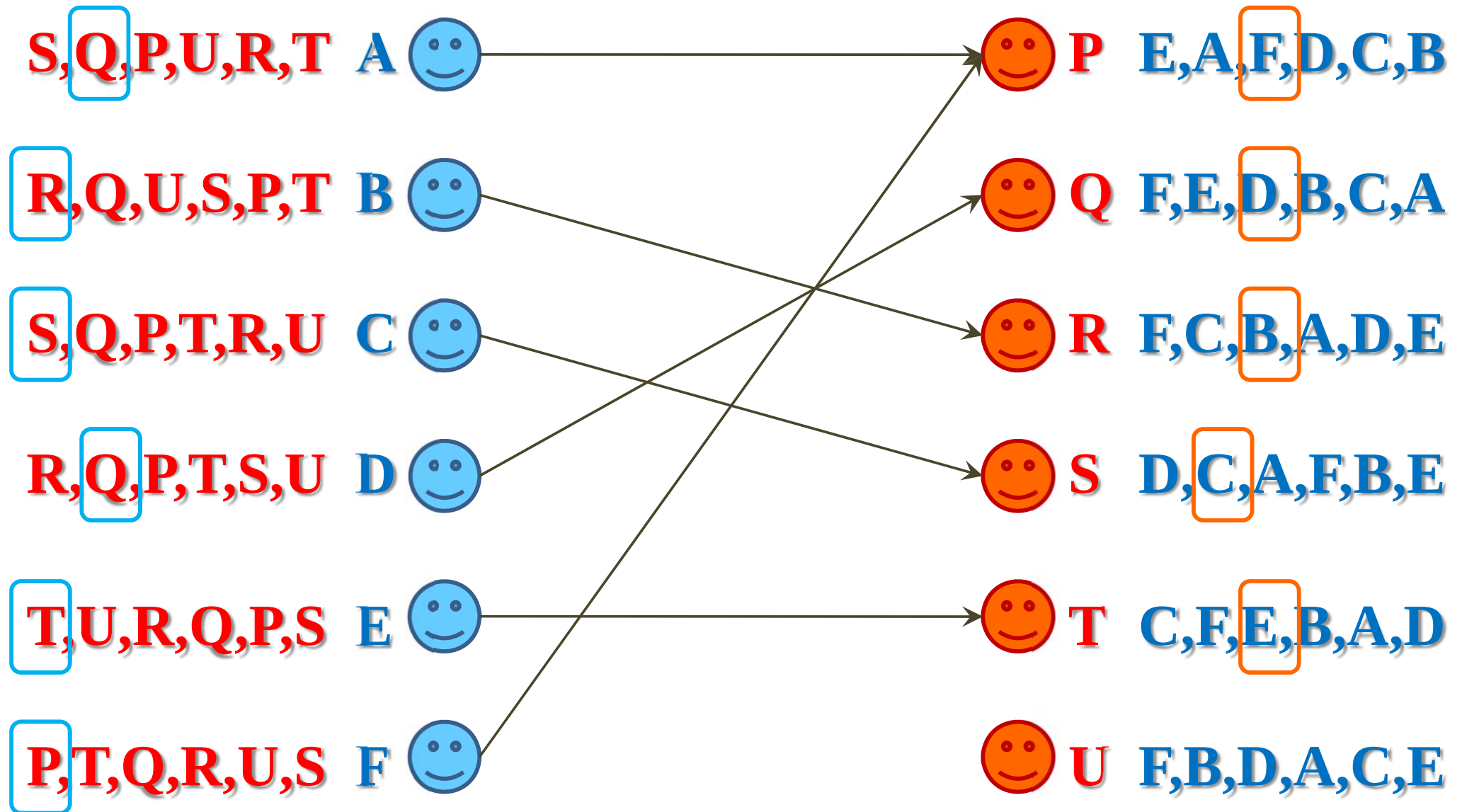
Gale-Shapley アルゴリズム



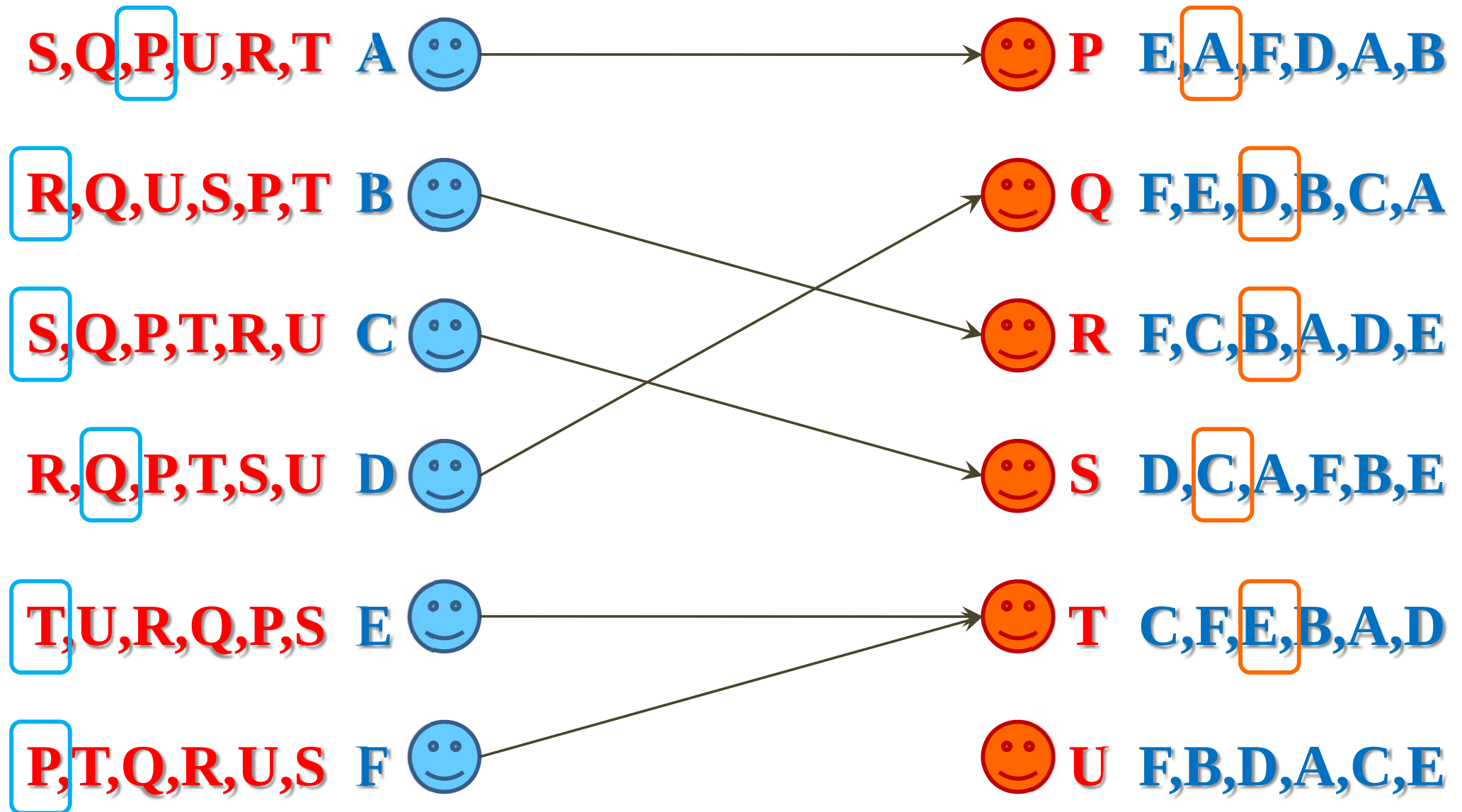
Gale-Shapley アルゴリズム



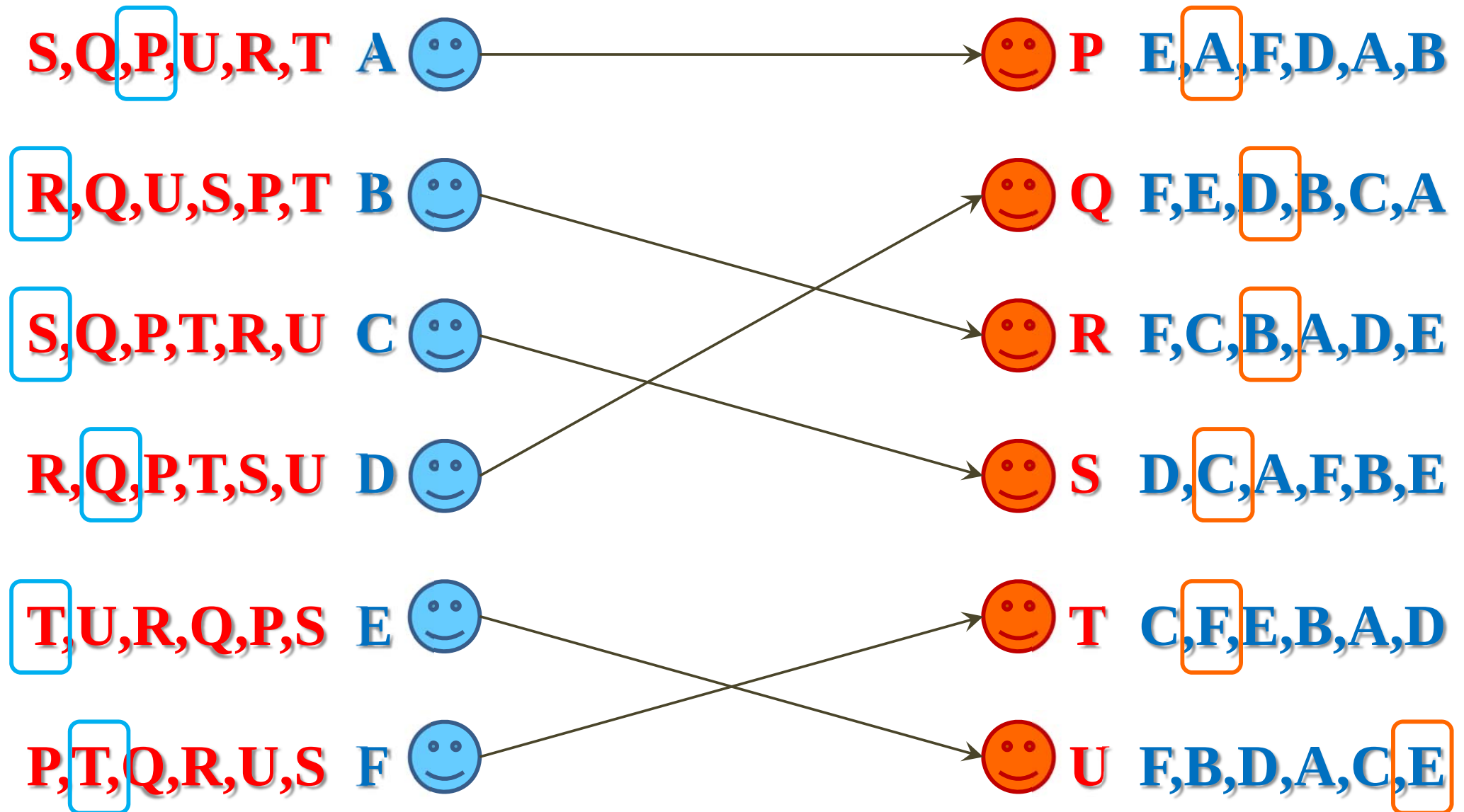
Gale-Shapley アルゴリズム



Gale-Shapley アルゴリズム



Gale-Shapley アルゴリズム

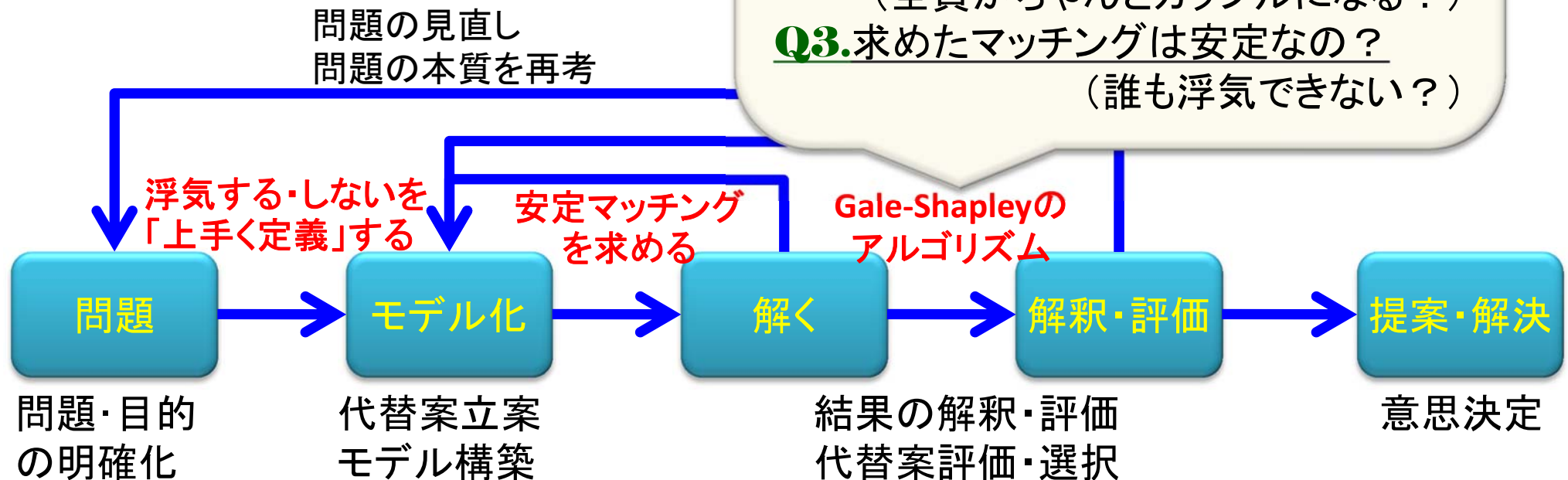


問題解決

「問題の把握」から「意思決定」まで

アルゴリズムの評価

- Q1.** アルゴリズムはちゃんと終わる？
(無限に続くことはない？)
- Q2.** 完全マッチングを求めたのか？
(全員がちゃんとカップルになる？)
- Q3.** 求めたマッチングは安定なの？
(誰も浮気できない？)



問題発見・状況認識

- 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
- いったい何を知りたいのか？
- 問題の本質は何か？

答えを導く

- 解法選択
- 解法構築
- パラメータ調整

推論・モデル作成

- 推論に基づきモデル作成
- 現実を支配する法則を数
量的に明確化

結果評価・解釈

- 解法のもたらす結果の解釈・
考察
- 得られた代替案の評価・分析

Gale-Shapley アルゴリズム

- **定理:** 与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し, Gale-Shapley アルゴリズムは 安定マッチング を導き終了する.



A1. きちんと終わるよ！

A2. 完全マッチングを求めるよ！

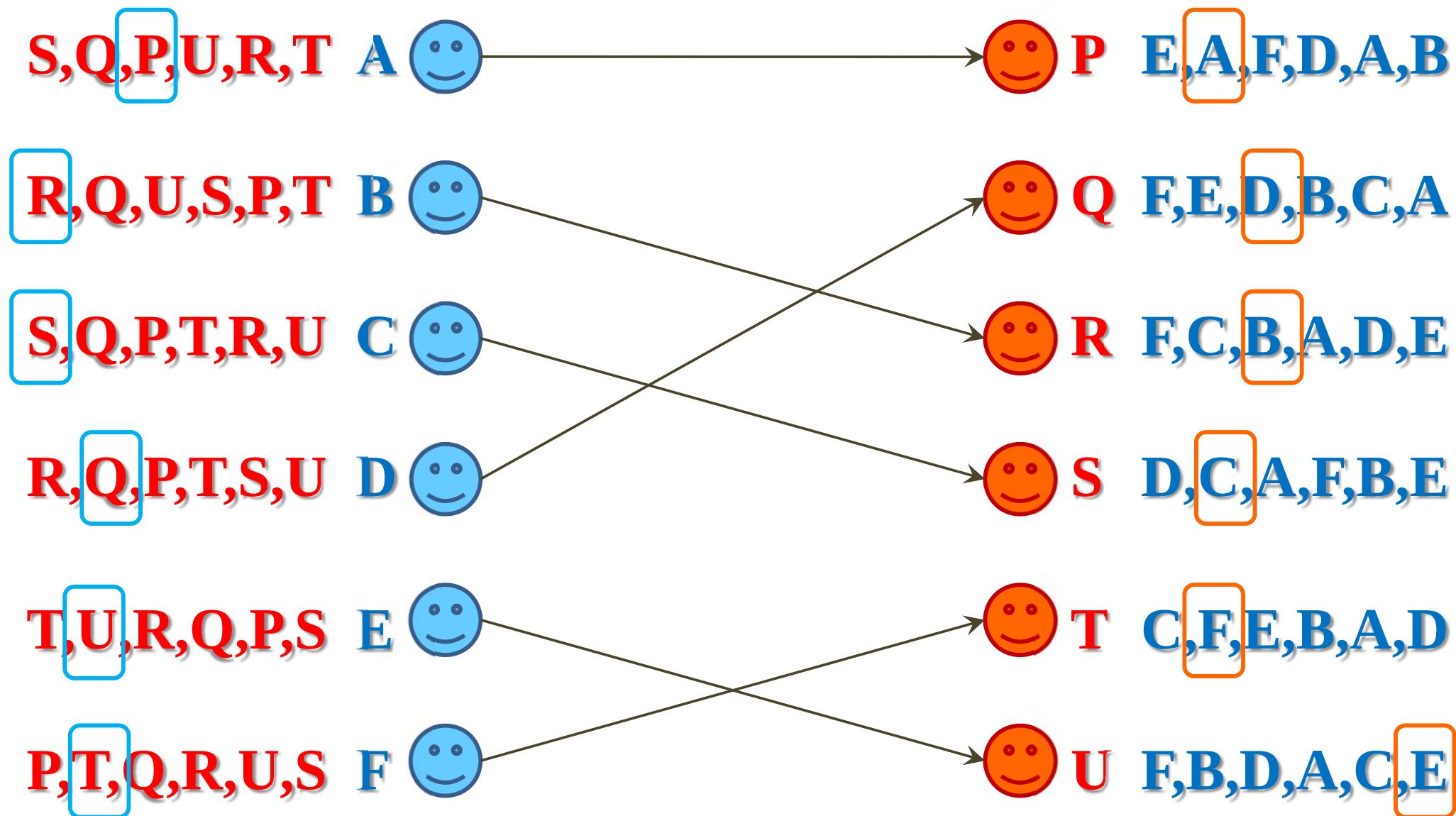
A3. 安定だよ！

- **系:** 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, 少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

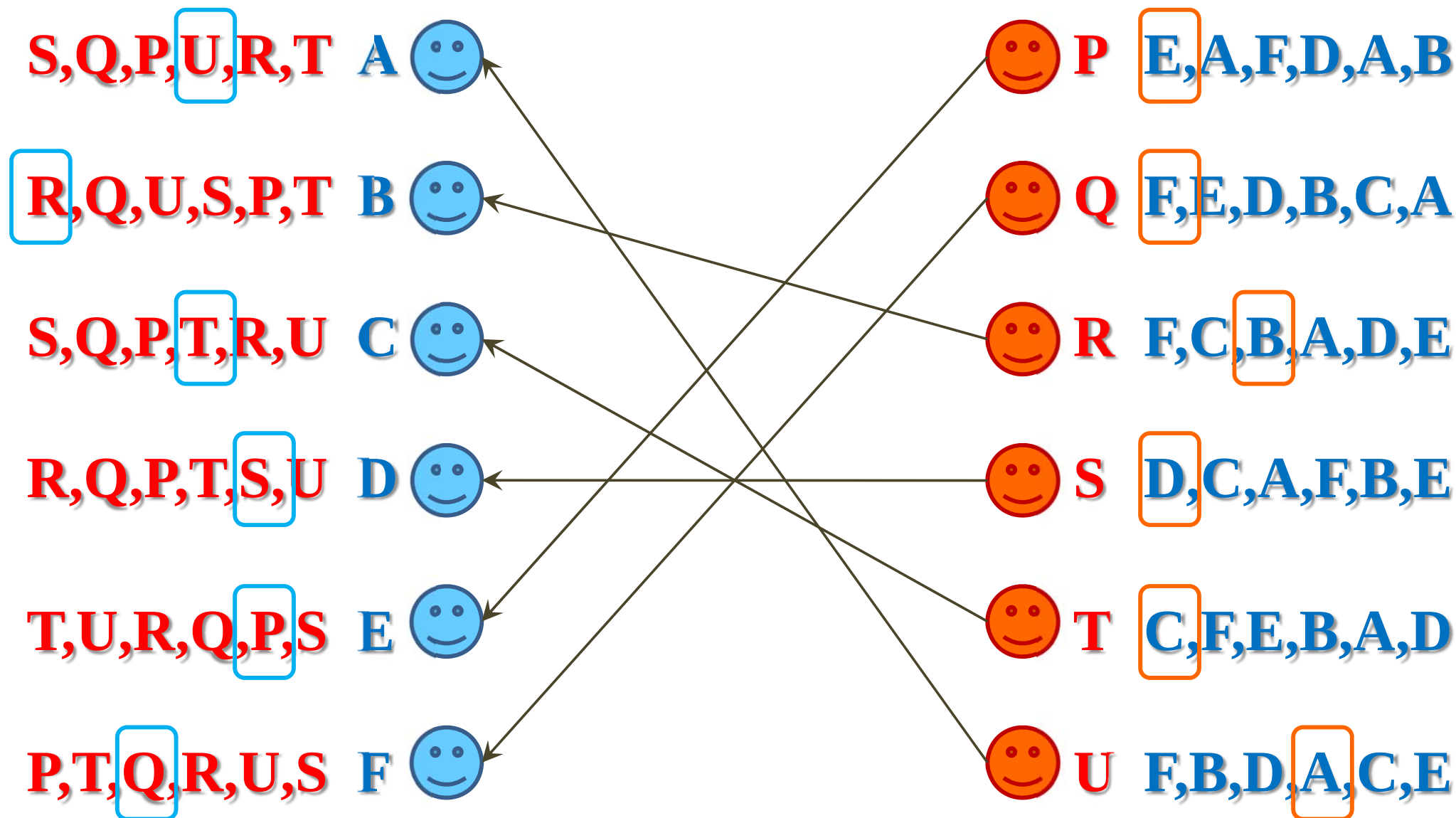
Gale-Shapley アルゴリズム

- **定理**: 男性側のプロポーズの順番に関係なく, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く.
- **系**: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば男性最良安定マッチングを導く.

男性最良安定マッチング



女性最良安定マッチング



Gale-Shapley アルゴリズム

- 与えられた安定結婚問題について、いくつかの安定マッチングが存在する場合、男性にとってより好ましい安定マッチング、女性にとってより好ましい安定マッチングなど、安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる。
- 定理:** 与えられた安定結婚問題について、
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング
である。

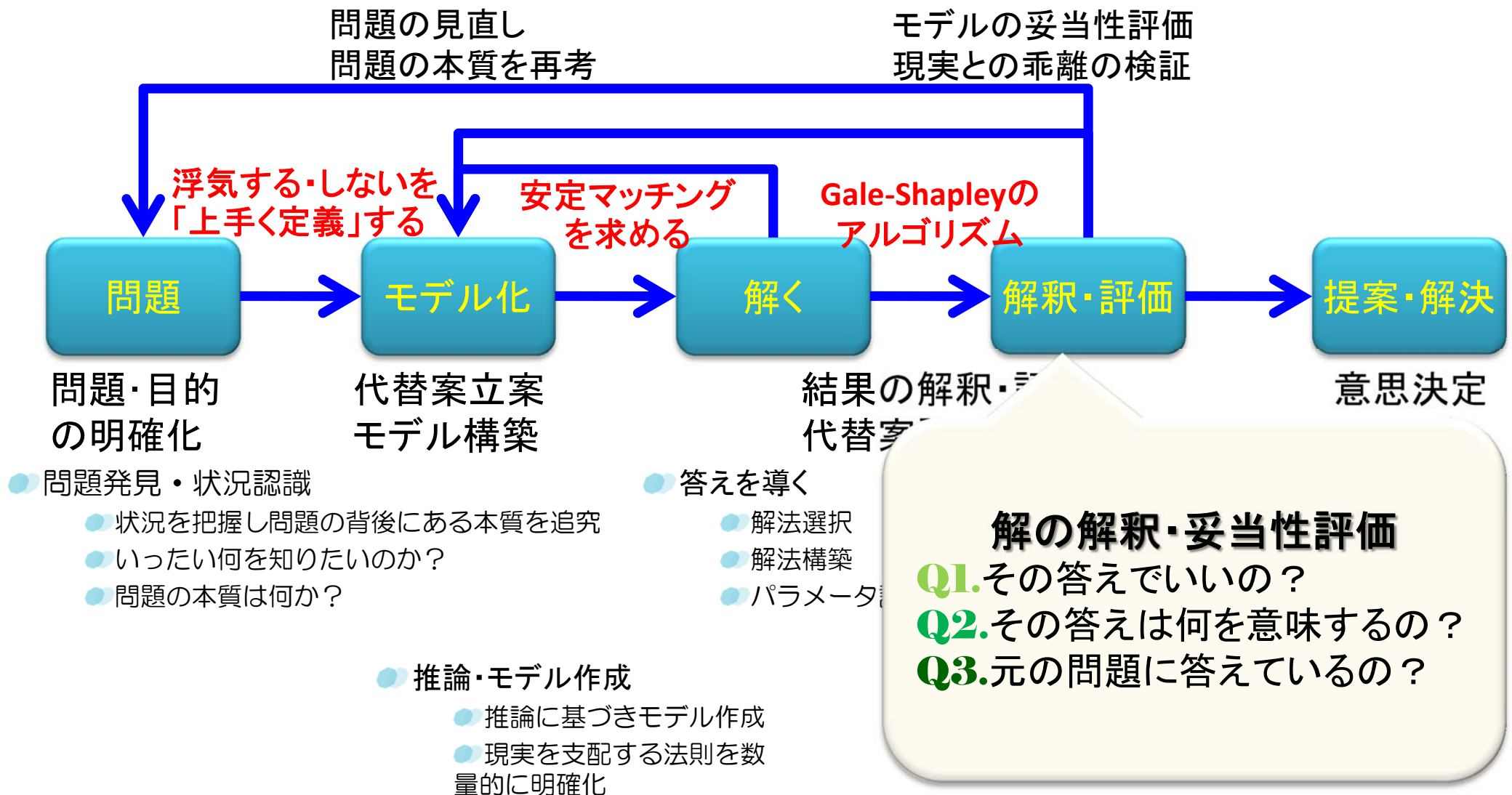


教訓!? 『待ってちゃダメ！

好きになったら自分から告白しなさい』

問題解決

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書

- 久保, 松井「**組合せ最適化『短編集』**」朝倉書店(1999)
- 山本, 久保「**巡回セールスマン問題への招待**」朝倉書店(1997)
- グリッツマン, ブランデンベルク「**最短経路の本**」シュプリンガー(2008)
- 松井, 根本, 宇野「**入門オペレーションズ・リサーチ**」東海大出版(2008)
- W.J.クック「**驚きの数学 巡回セールスマン問題**」青土社(2013)

- さらに詳しい内容を勉強したい人は

- 根本「**安定結婚問題**」(久保, 田村, 松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)

- 関連する経営学科の授業

- 「**ネットワークモデル分析**」(4セメ)
- 「**最適化モデル分析**」(5セメ)
- 「**意思決定科学**」(6セメ)

etc...