

基礎演習C:ITプランナー

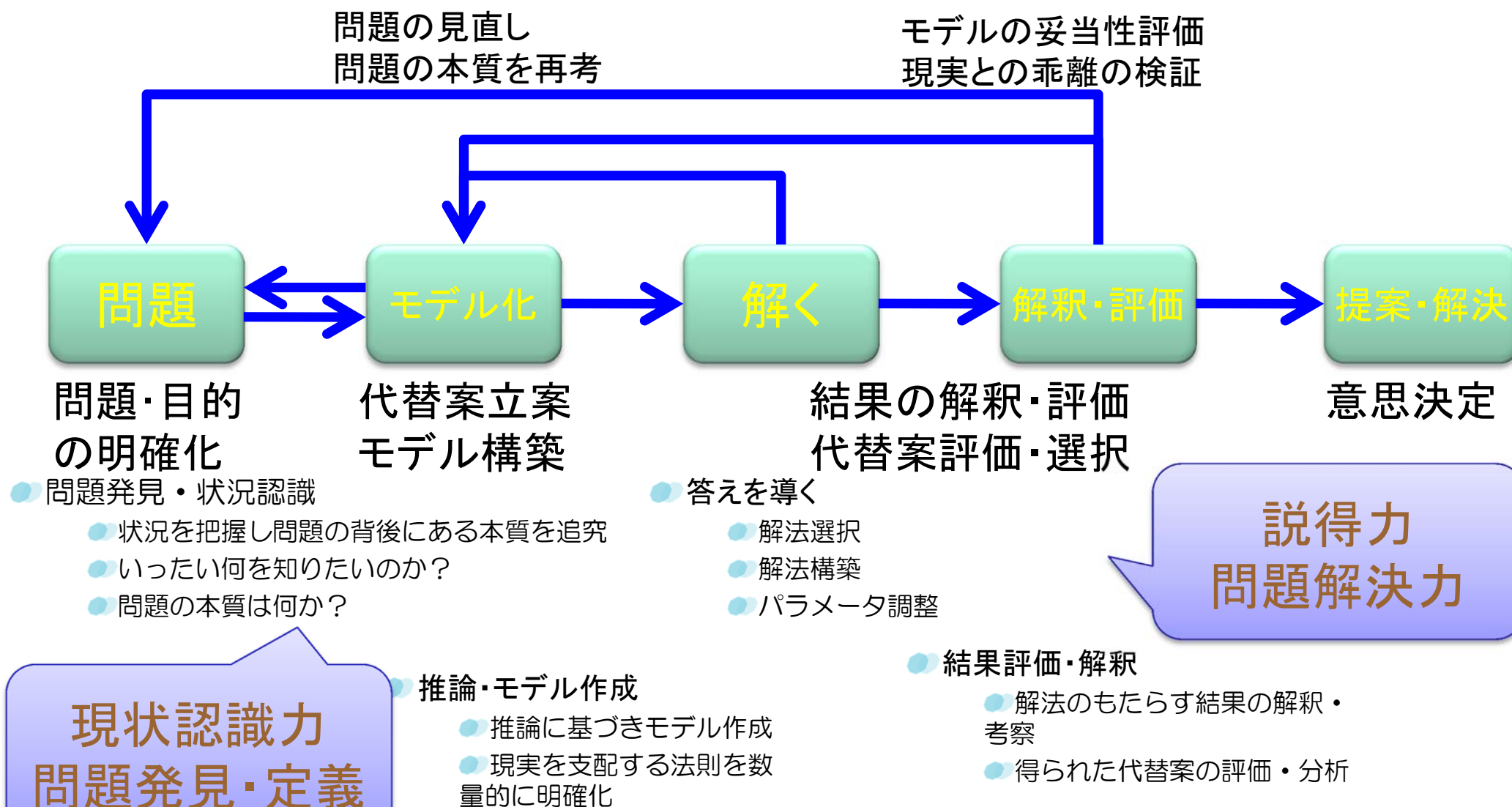
4. カーナビによる最短ルート探索

文教大学
堀田 敬介

意思決定

論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



カー・ナビゲーションとは？

航海, 航海術

- カー・ナビゲーション・システム

automotive navigation system

PND・GPS携帯・
スマホなど多様

- ナビゲーション・システムの2大機能

- （リアルタイム）情報表示

- 現在地や渋滞情報, 周辺情報などを地図に重ねて表示

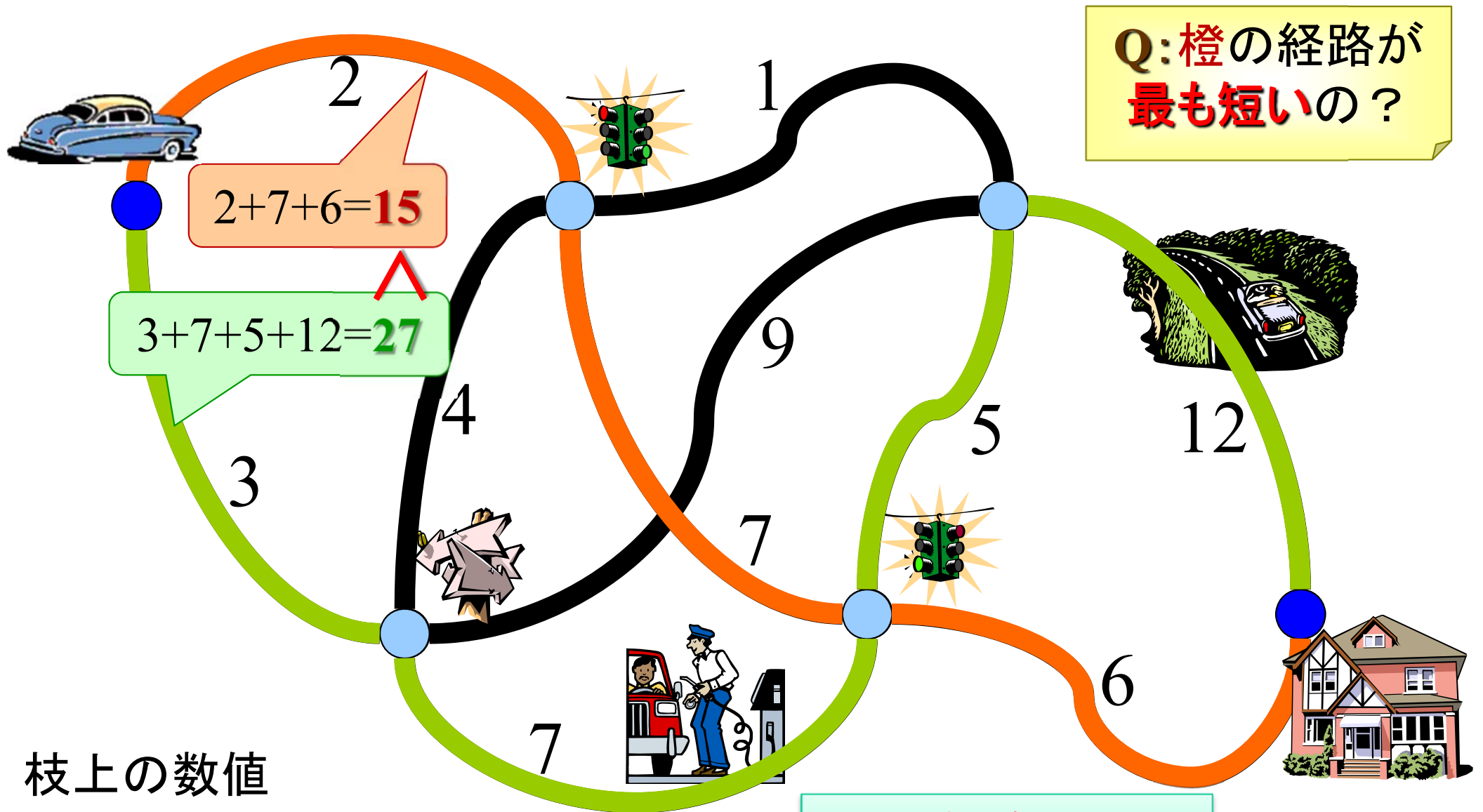
- ルート探索

- 目的地を指定すると現在地からの（最短）経路を表示

どうやってるの？



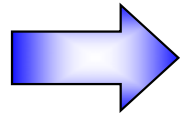
最短経路はどこにあるのか？



最短経路はどこ？



オレンジの経路が最短なのか？
どうすればわかる？



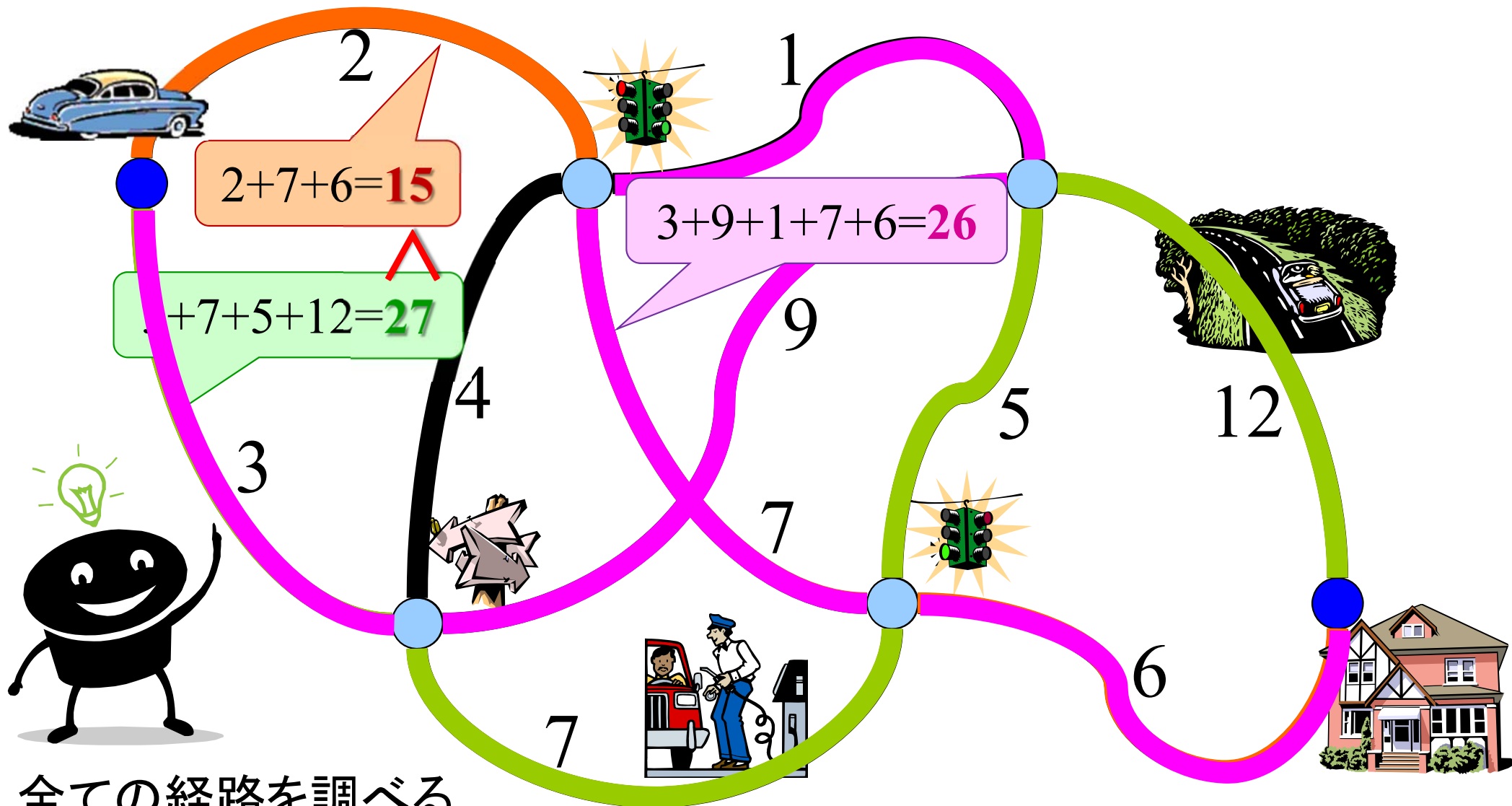
全ての経路を調べ、その中から

最も短い経路を選べば良い！

〔素朴で素直な方法〕

= 全列挙, しらみつぶし

しらみつぶし！



全ての経路を調べる

- ✓ 交差点は2度通らない
- ✓ 同じ道路は2度通らない

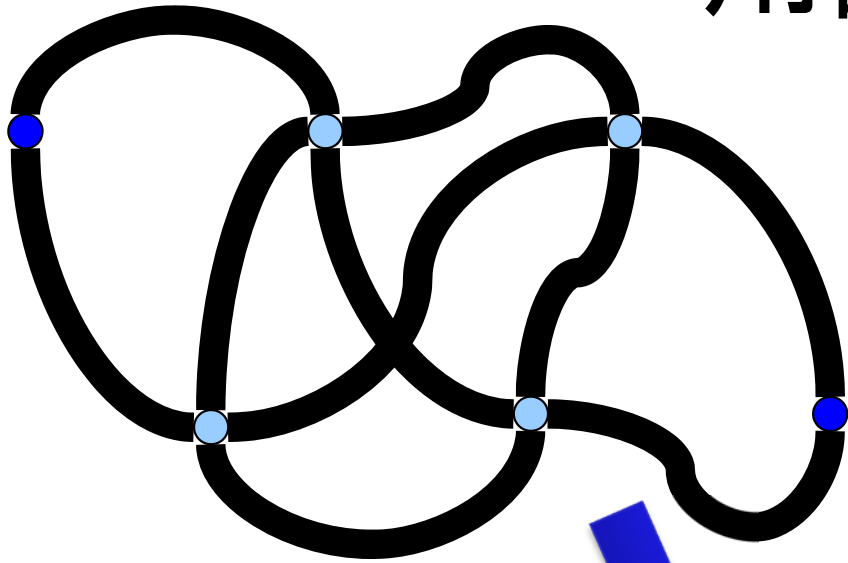


最短経路がわかるよね！

次に進む前に...

用語の説明

グラフ理論 graph theory



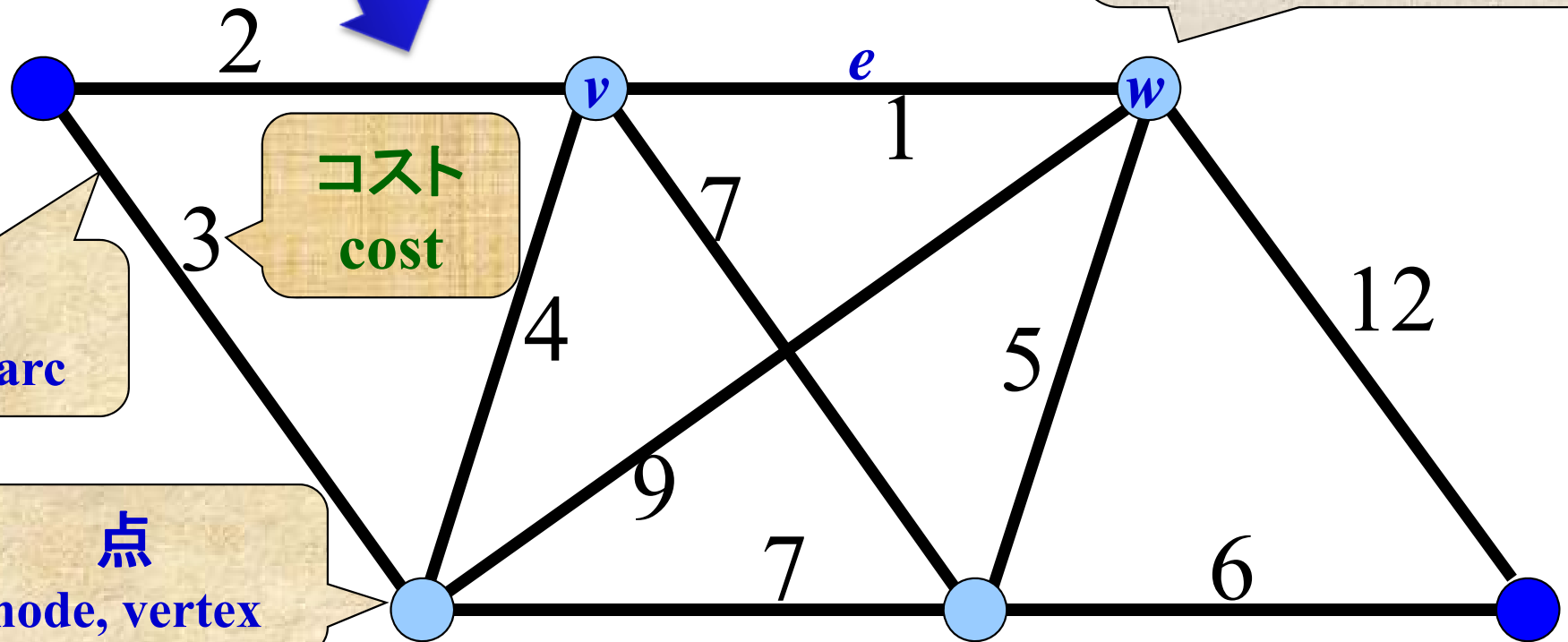
現実の経路を抽象化



グラフ
graph

ネットワーク
network

隣接・接続関係
 v and w are **adjacent**.
 v is **incident** to e .



次に進む前に...

何故わざわざグラフにして考えるのか？

- 必要な情報を簡潔に過不足なく表現できる

- 点の数
- 枝の数
- 点と枝の接続関係
(点と点の隣接関係)
- 枝のコスト

さらに...

グラフ理論で培われた豊かな知恵を利用できる

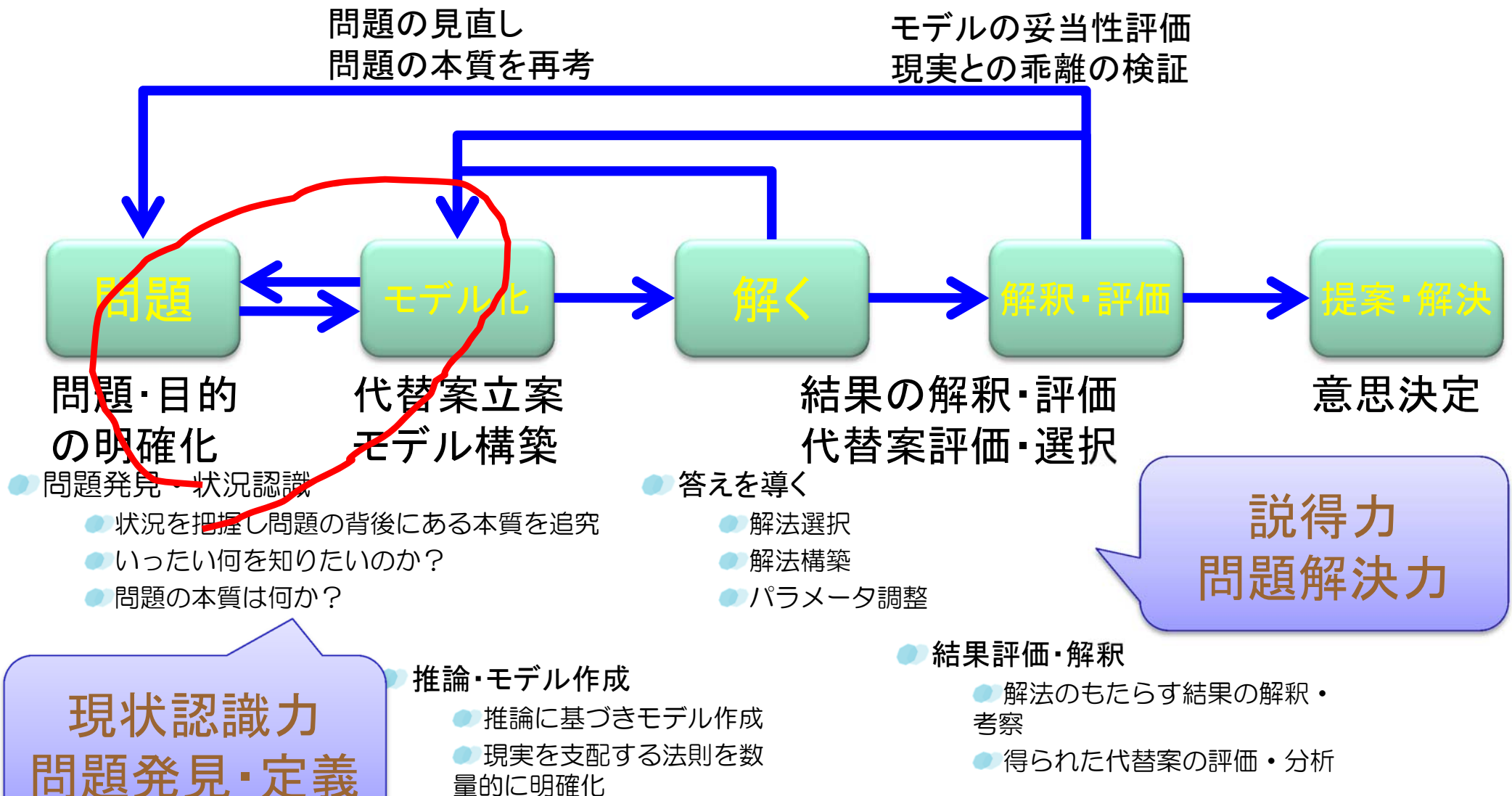
- (ここでは) 必要ない情報

- 路の途中に上り下りなど坂道がある,
- 路の途中にカーブが何回あるか,
- 点や枝の正確な位置, etc.

意思決定

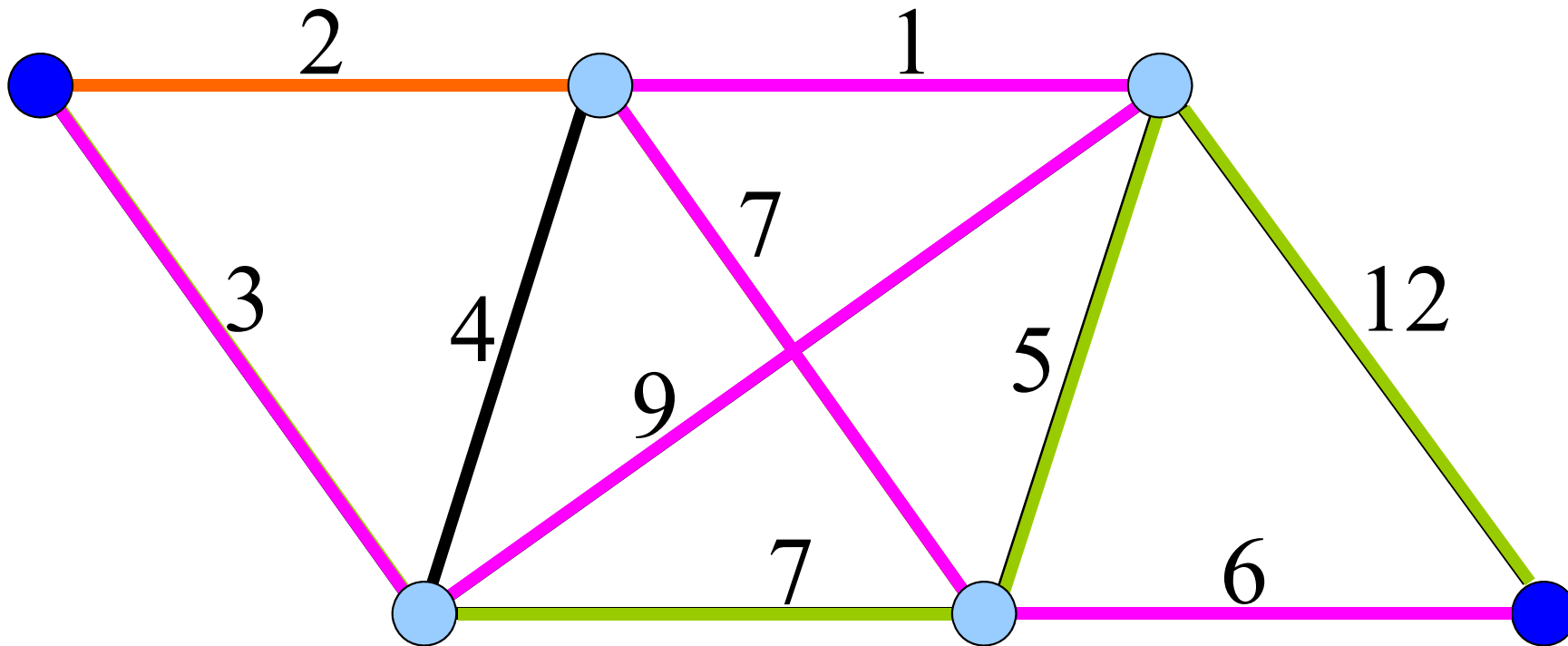
論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



全ての経路を探す！？

難しい！？

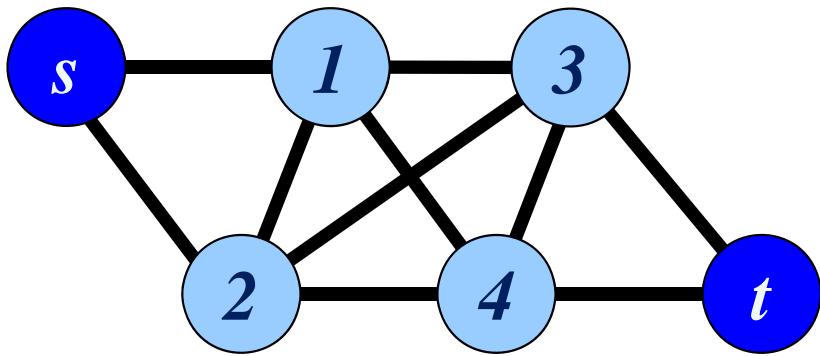


全ての経路を調べる

- ✓ 交差点は2度通らない
- ✓ 同じ道路は2度通らない

一体何通りの経路があるんだろう？
どうやって数えたらいいの？

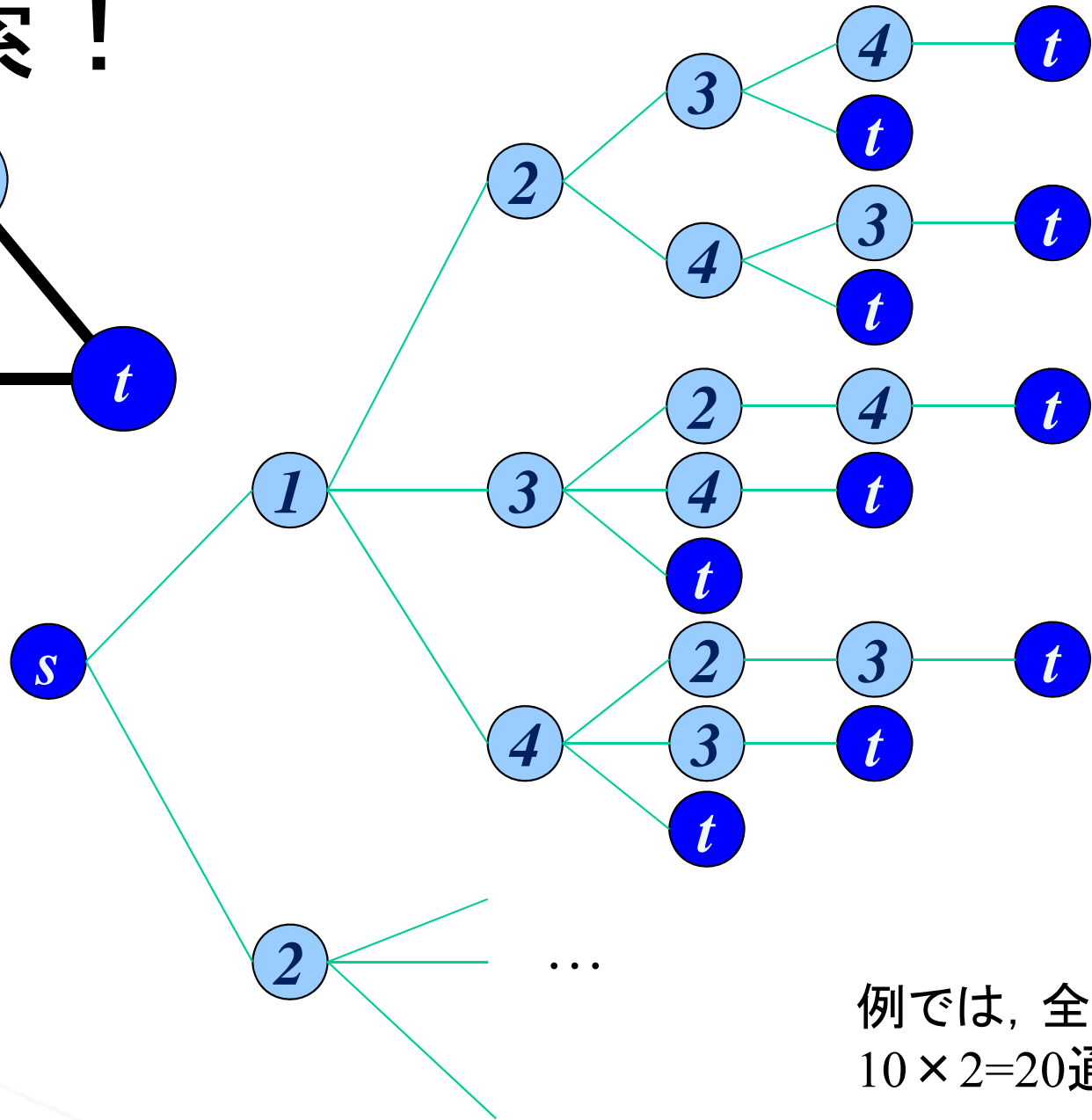
全經路探索！



頑張って樹形図を描いてみたけど...



問題規模がもっと大きくなったら...



例では，全経路
 $10 \times 2 = 20$ 通り

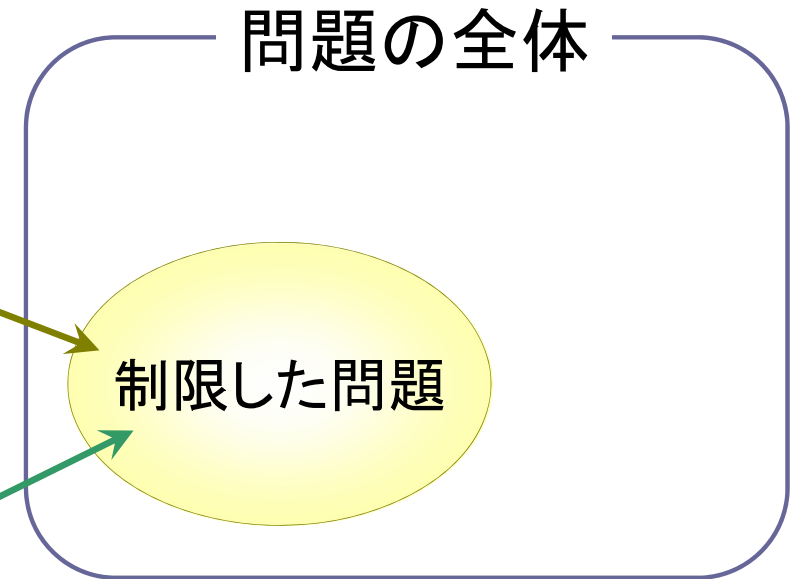
注) グラフに閉路(cycle)がなければ,
動的計画法(DP)で数え上げは可能

難しいなら易くすればいいのさ！

OR的問題解決のヒント
問題を**簡単**にする！

{ 問題の**一部だけ**を考える
条件を**付加**して易くする

ここだけで考えて上手いけば、
全体に広げられるかも！



全てのネットワーク上の最短路問題

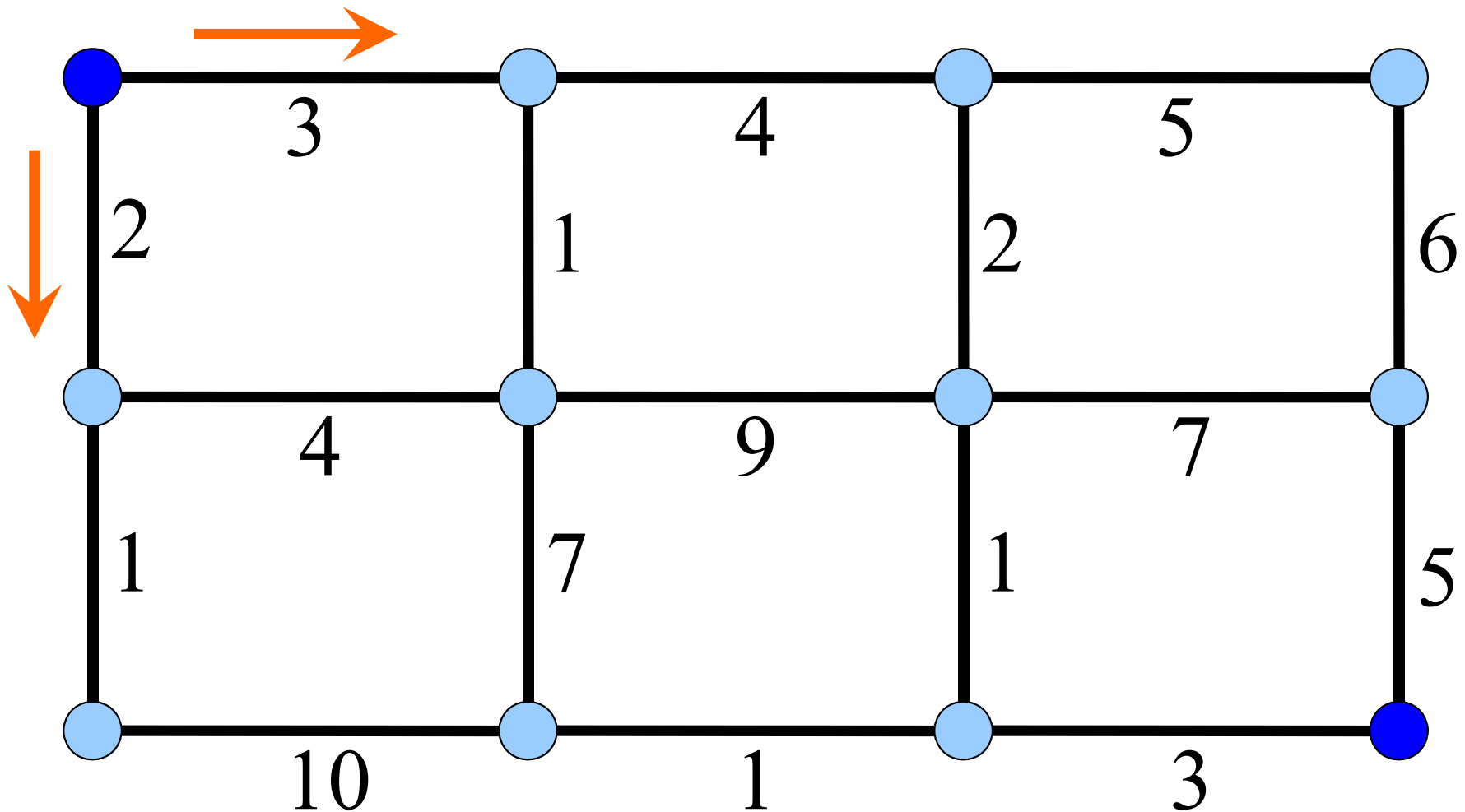
制限した問題

- 格子状のネットワーク
- 出発地：左上点，目的地：右下点
- 移動は右・下方向へのみ

難しいなら易くすればいいのさ！

制限した問題

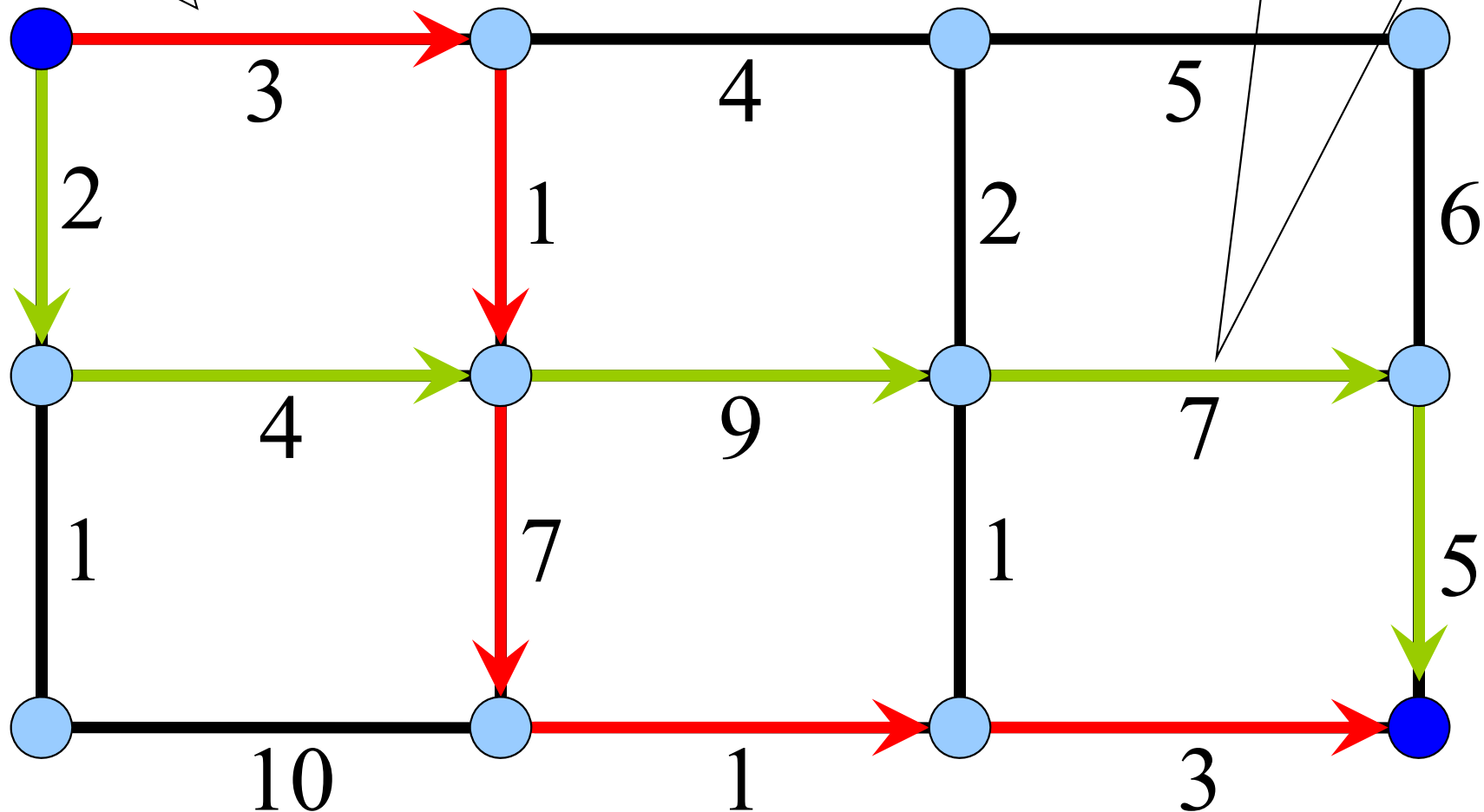
- 格子状のネットワーク
- 出発地：左上点，目的地：右下点
- 移動は右・下方方向のみ



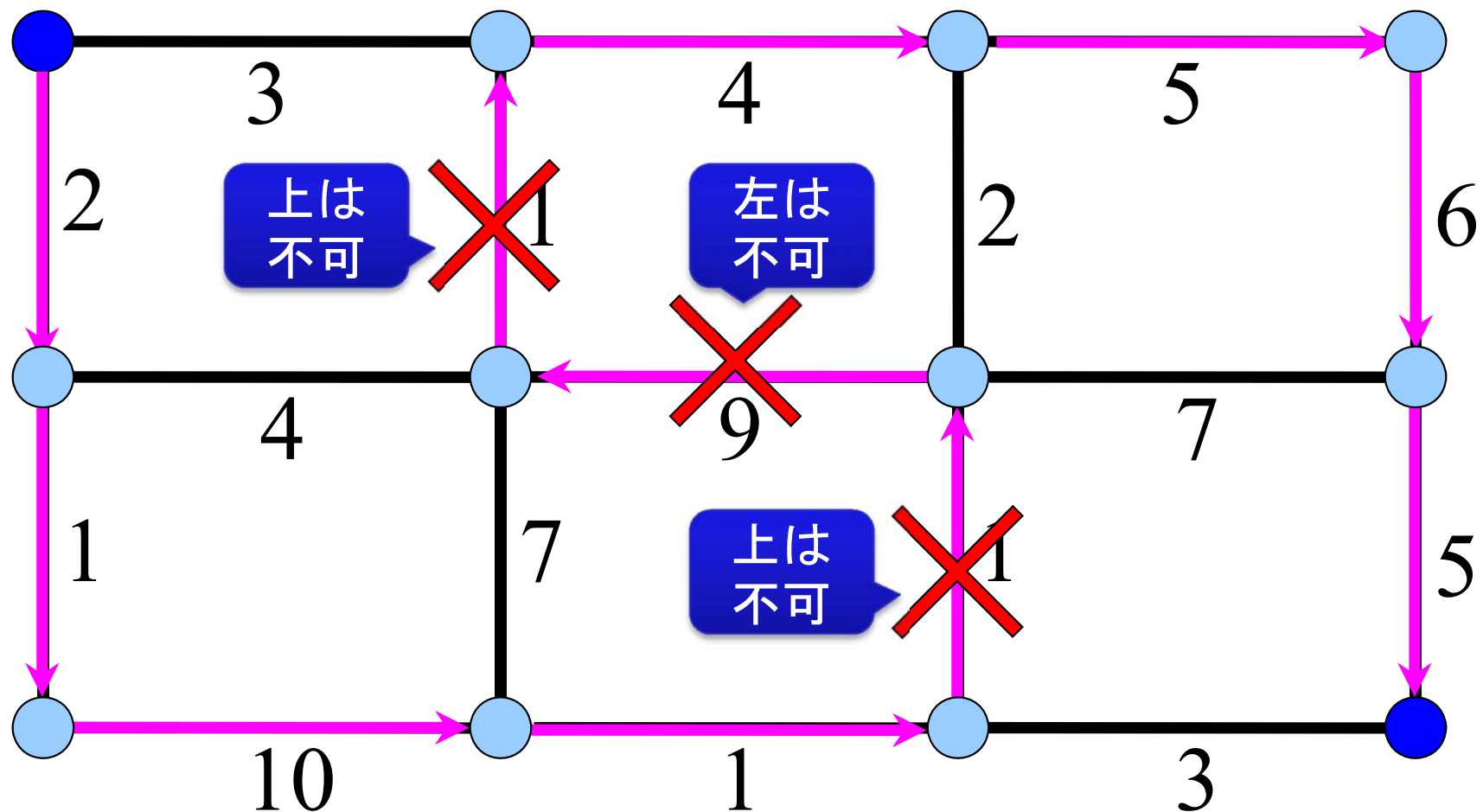
難しいなら易くすればいいのさ！

$$3+1+7+1+3 = \mathbf{15}$$

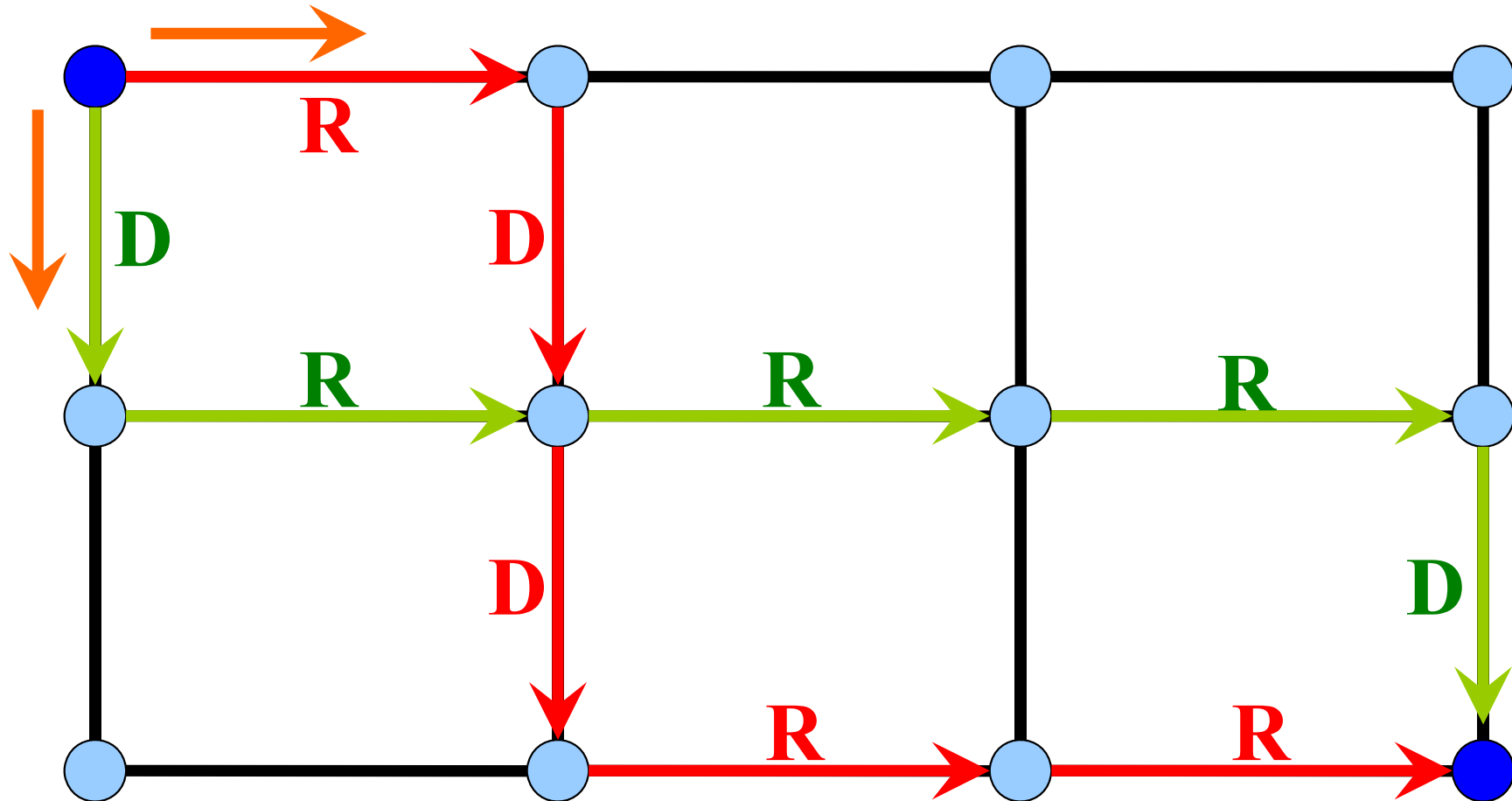
$$2+4+9+7+5 = \mathbf{27}$$



難しいなら易くすればいいのさ！



さて、経路は全部で幾つあるのか？



Point: どんな経路も、順番を無視すれば、 $R=3$ 回、 $D=2$ 回使う

緑の経路 = $DRRRD$

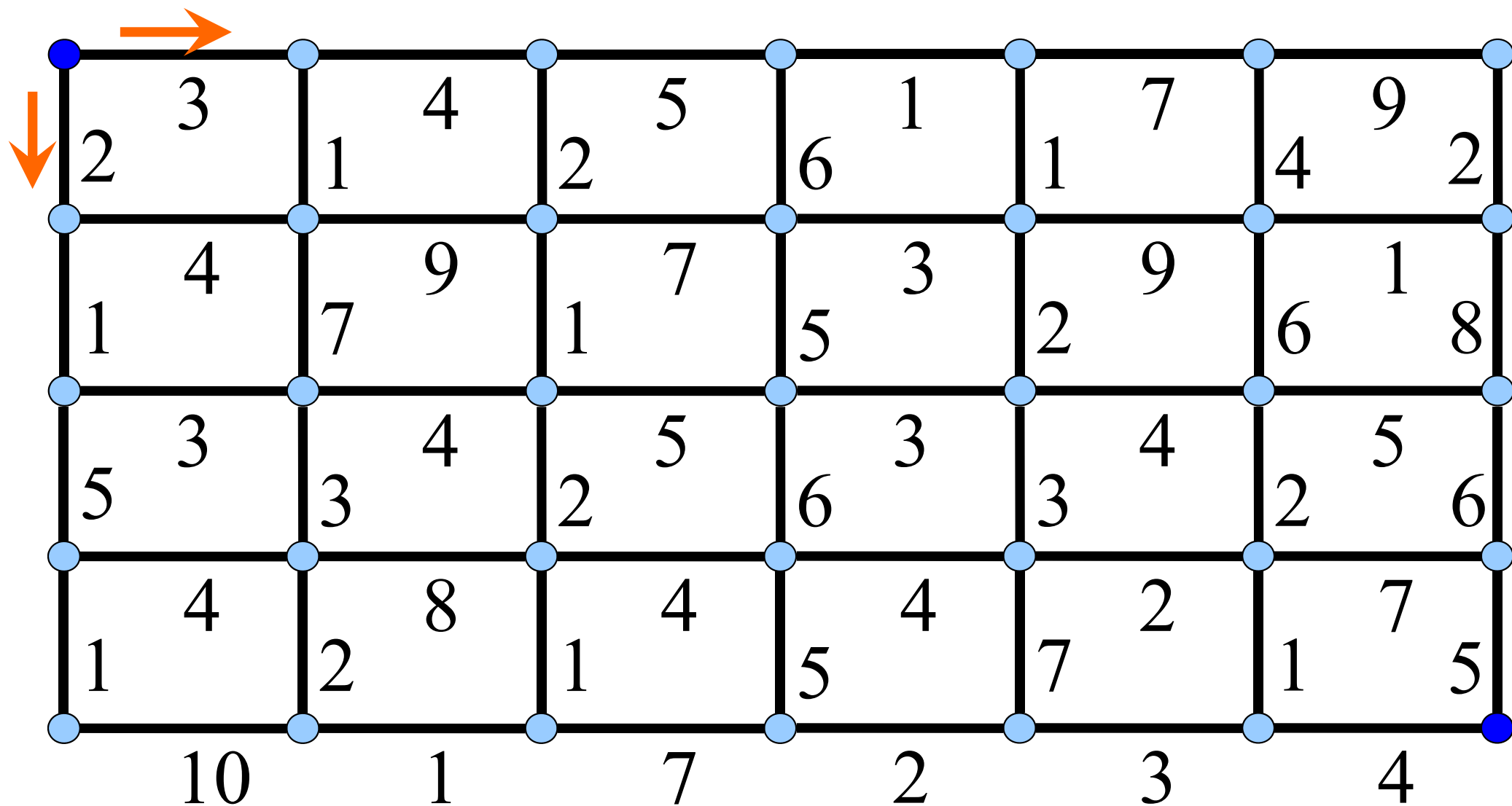
赤の経路 = $RDDRR$

i.e., $(R+D)$ 箇所のうち D 箇所の置く場所を決めれば良い $\rightarrow {}_{R+D}C_D$

$$= \frac{(R+D)!}{R!D!} \text{通り}$$

例では ${}_{3+2}C_2 = 10$ 通り

経路は全部で幾つ？

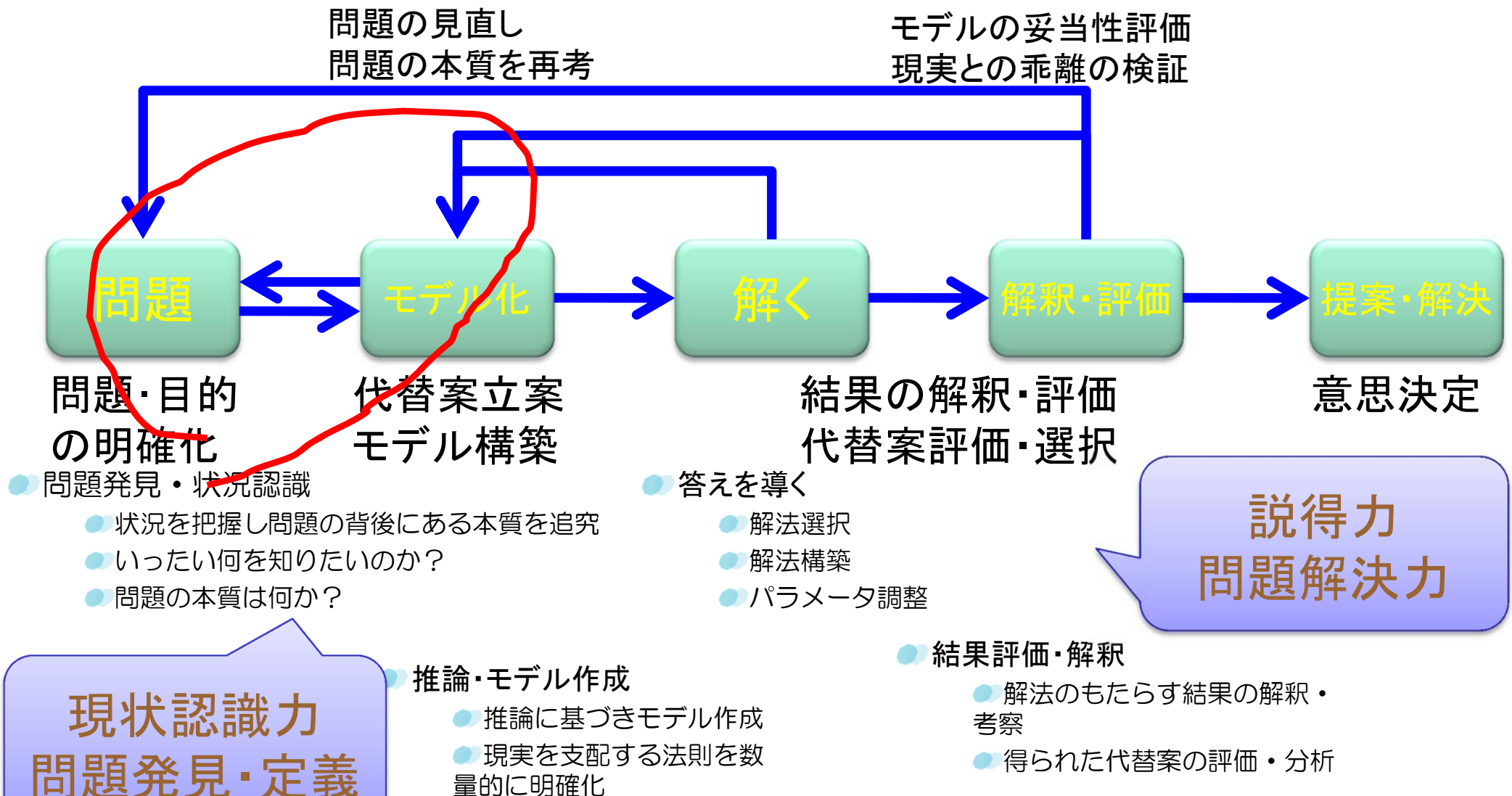


R=6, D=4なので, ${}_{6+4}C_4 = 210$ 通り

意思決定

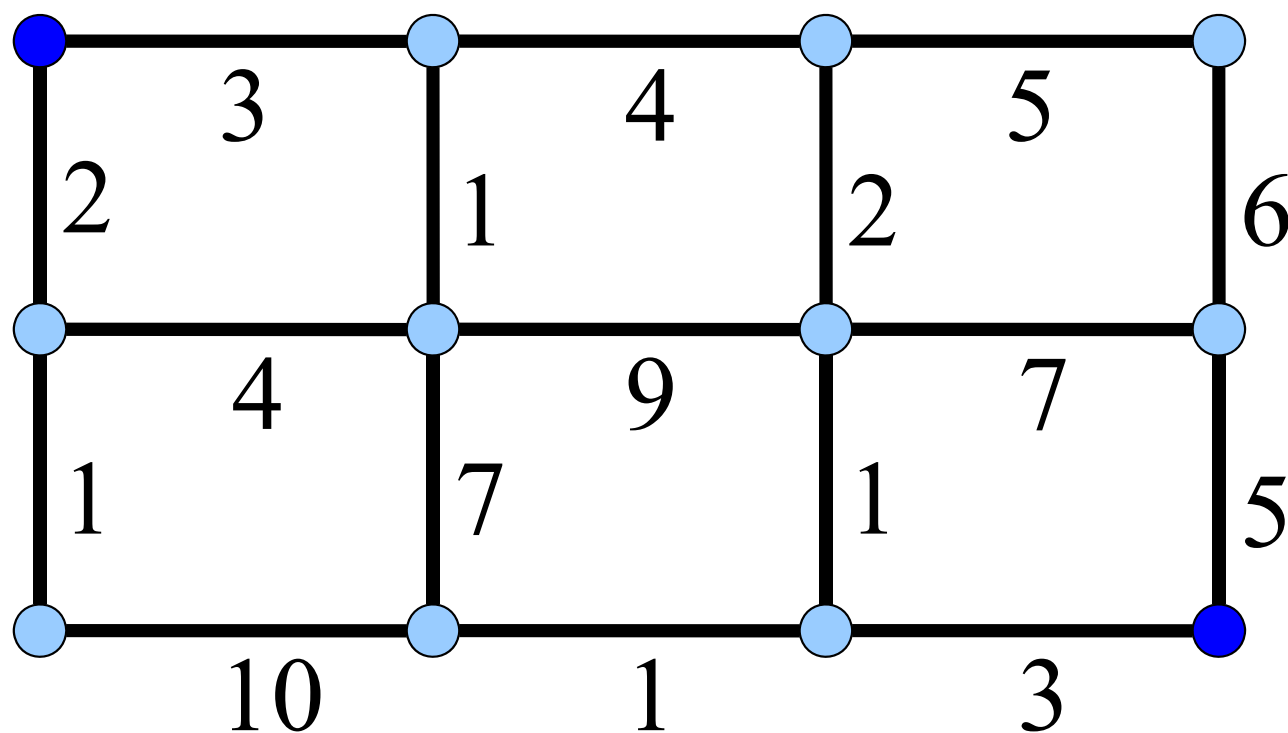
論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



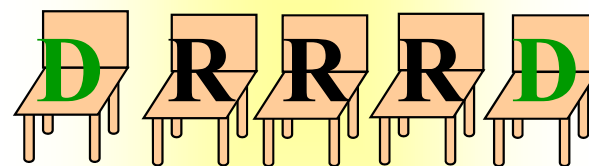
演習：やってみよう！

- **Q**: スタート(左上)からゴール(右下)へと至る**最短経路**を求めなさい. そして**それが最短だと示し**なさい



DRRRRD ←これが1経路に対応

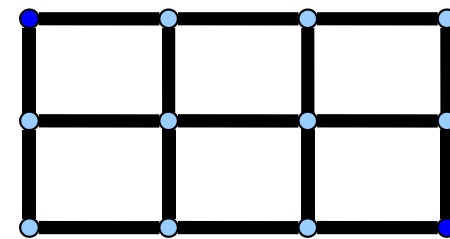
! 左の経路をなぞって探すのではなく、5脚の椅子に**D**を座らせる位値を決める



まずは、予め計算したとおり、10通りの**Dの置き方**を全て書きだそう

経路は全部で幾つ？

R(横) D(縦)		全経路
3	2	10
6	4	210
10	5	3,003
20	10	30,045,015
50	50	1.0E+29
100	100	9.1E+58
500	500	2.7E+299
1000	1000	#NUM!



【格子道路の街】
cf.京都市,札幌市
R, D幾つぐらい？

経路は全部で幾つ？

経路がとてもたくさんあるとは言っても、今のコンピュータは
かなりの速さで計算できるんでしょ？ だから大丈夫だよな！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数

- Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2GFLOPS**

...1秒間に約**512億**回

- PS3 : **218GFLOPS**

...1秒間に約**2180億**回

- PS4 : **1.84TFLOPS**

...1秒間に約**1兆8400億**回

- 京 : **10.51PFLOPS**

...1秒間に約**1京510兆**回

(※2011年6月, 11月 **世界最速!** by Top500.org)

(※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)

[Wikipedia「FLOPS」より]

2013/5/1の情報

※FLOPS = *FL*loating-point *O*perations *P*er *S*econd

1つの経路を見つけ、その総コストを計算するの
に、たどる経路枝数の浮動小数点演算で
できると仮定しよう

例えば、R=10, D=5の経路なら、10+5回の演算で計算可と
仮定すること

K(キロ) $\simeq \times 10^3$ = 千倍

M(メガ) $\simeq \times 10^6$ = 百万倍

G(ギガ) $\simeq \times 10^9$ = 10億倍

T(テラ) $\simeq \times 10^{12}$ = 1兆倍

P(ペタ) $\simeq \times 10^{15}$ = 千兆倍

E(エクサ) $\simeq \times 10^{18}$ = 百京倍

経路は全部で幾つ？

1.84TFLOPS

10.51PFLOPS

R(横) D(縦)	全経路	PS4	京
3 2	10	0.0000000000 秒	0.0000000000 秒
6 4	210	0.0000000001 秒	0.0000000000 秒
10 5	3,003	0.0000000024 秒	0.0000000000 秒
20 10	30,045,015	0.000489864 秒	0.0000000086 秒
25 25	1.3E+14	57.25 分	0.601382523 秒
30 30	1.2E+17	44.63 日	11.25 分
40 40	1.1E+23	148,218.75 年	25.95 年
50 50	1.0E+29	1.73872E+11 年	30,439,996 年
100 100	9.1E+58	2.3E+31 宙齡	4.0E+27 宙齡
500 500	2.7E+299	3.4E+272 宙齡	5.9E+268 宙齡

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、力業(しらみつぶし)では答えを求めることが出来ない！

1宙齡=138億年



ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
 - 全経路をしらみつぶしに調べて、最も短い経路を見つける方法

時間が
掛かり過
ぎる！



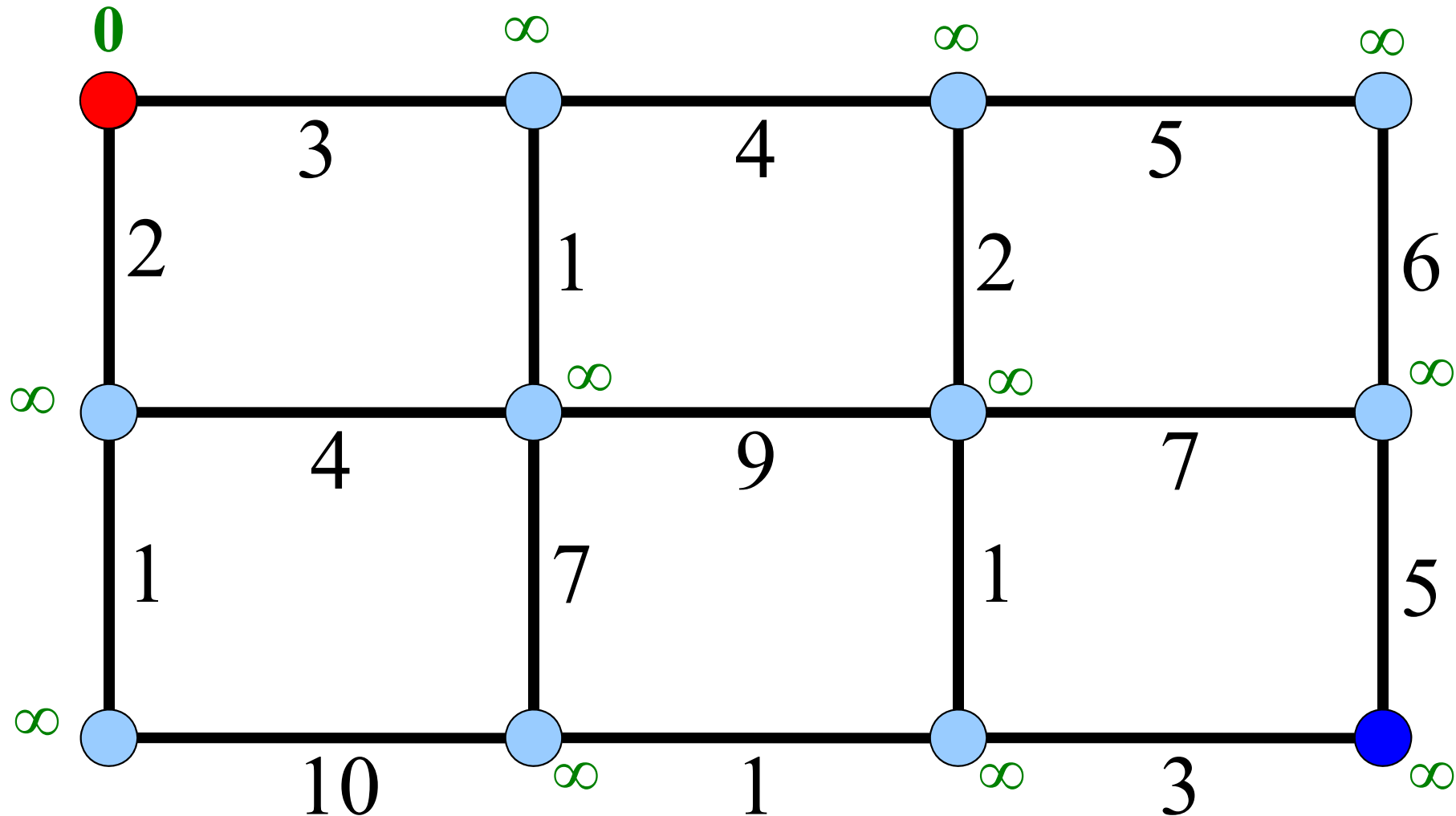
全経路をしらみつぶしに調べずに、
最も短い経路を、現実的時間で
見つける方法があるか？

Dijkstra法
(ダイクストラ法)

人間の創造
的な仕事！

Dijkstra法 (初期設定)

step0: startのラベル=0
その他のラベル= ∞
start点を調査中(●)に

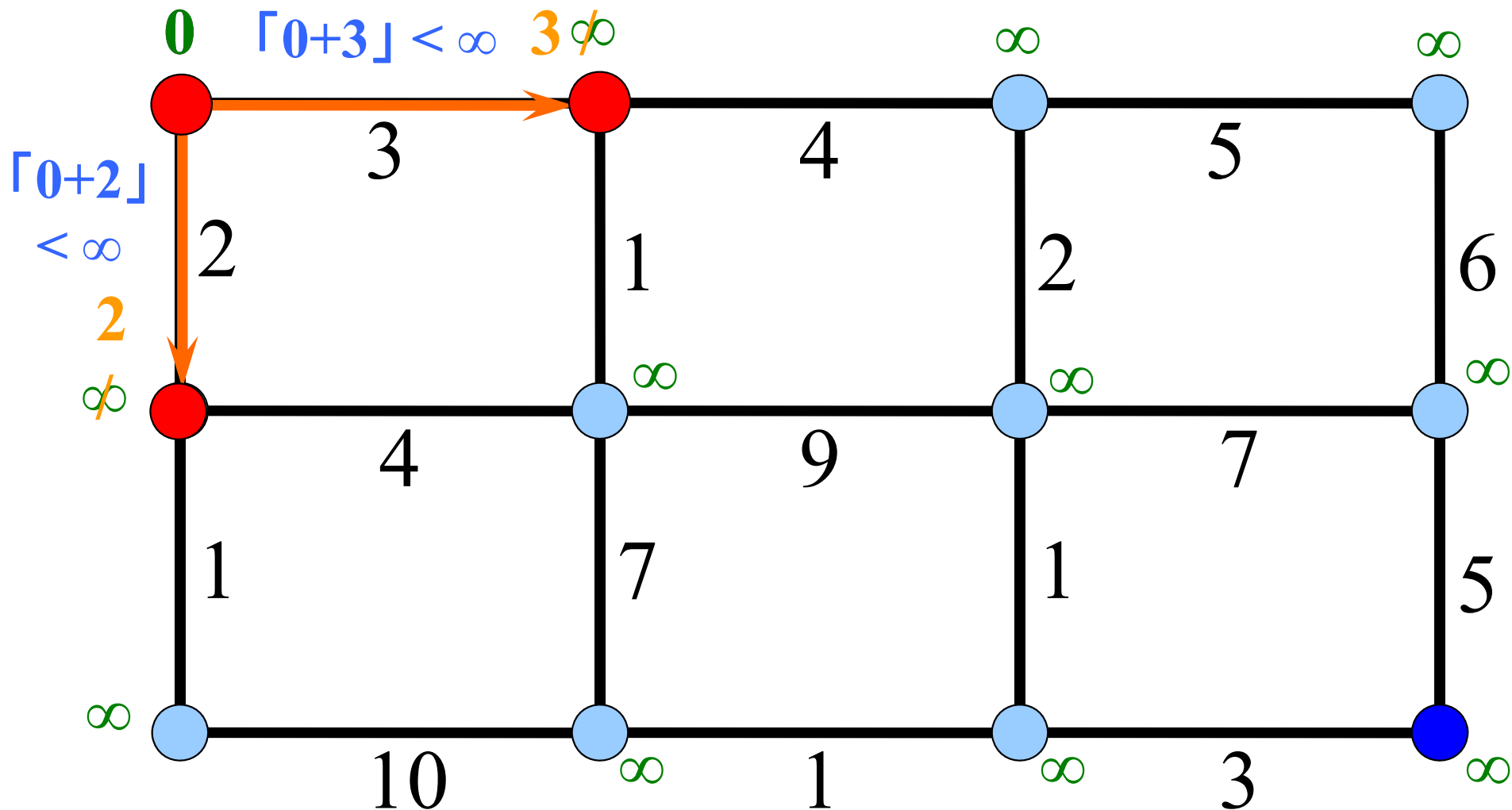


Dijkstra法 (更新法)

step1-1: 調査中の点 (●) の中で, ラベルの値が最も小さい点を見つける

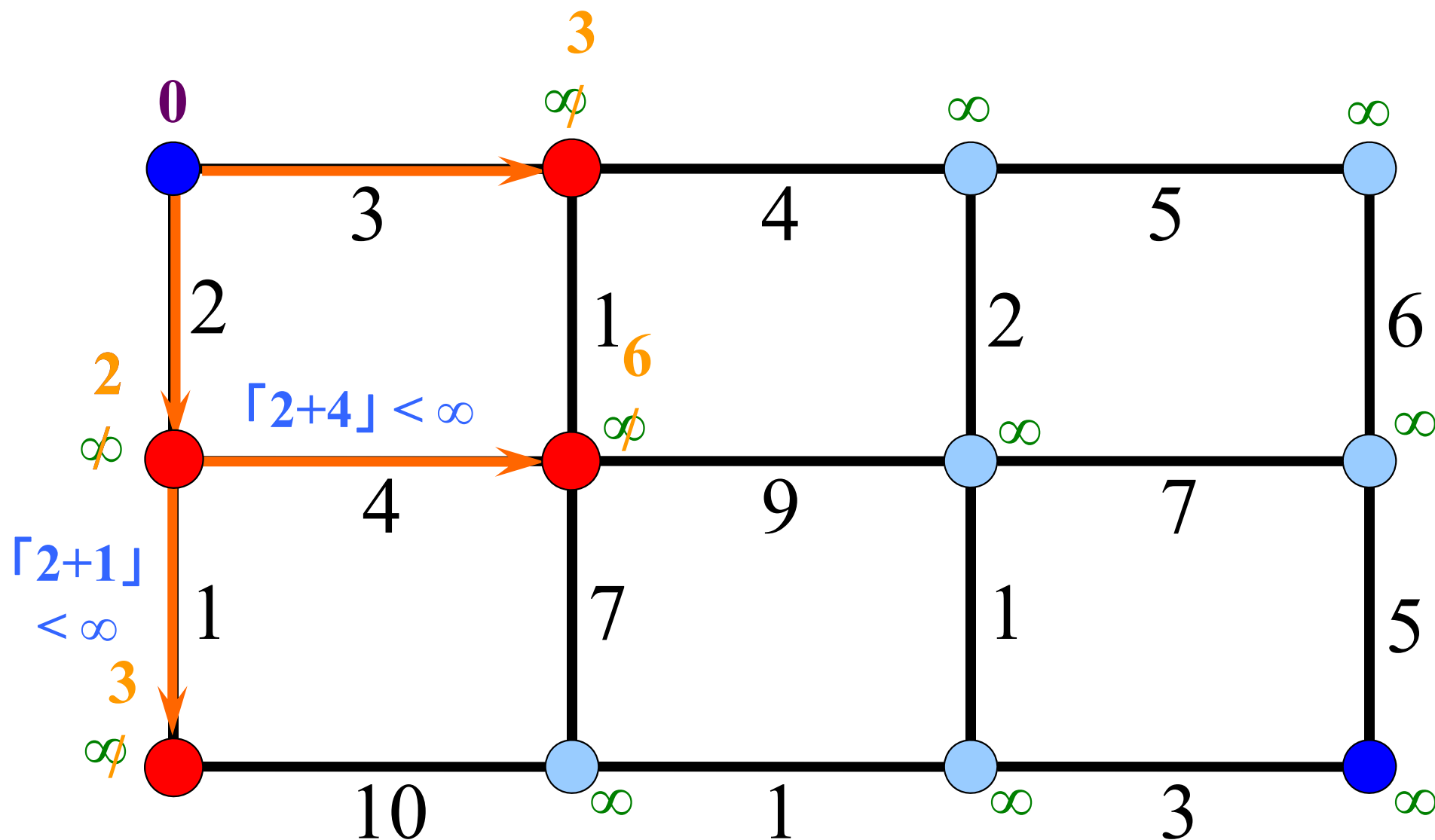
step1-2: その点から出る各枝について, 「ラベル+枝コスト」を計算し, 枝先点のラベル値と比較, 小さければ枝をオレンジにしてラベル更新, 値を更新した点は調査中 (●) へ

step1-3: 全枝終了後, 調査中から外し確定 (値は紫色へ)



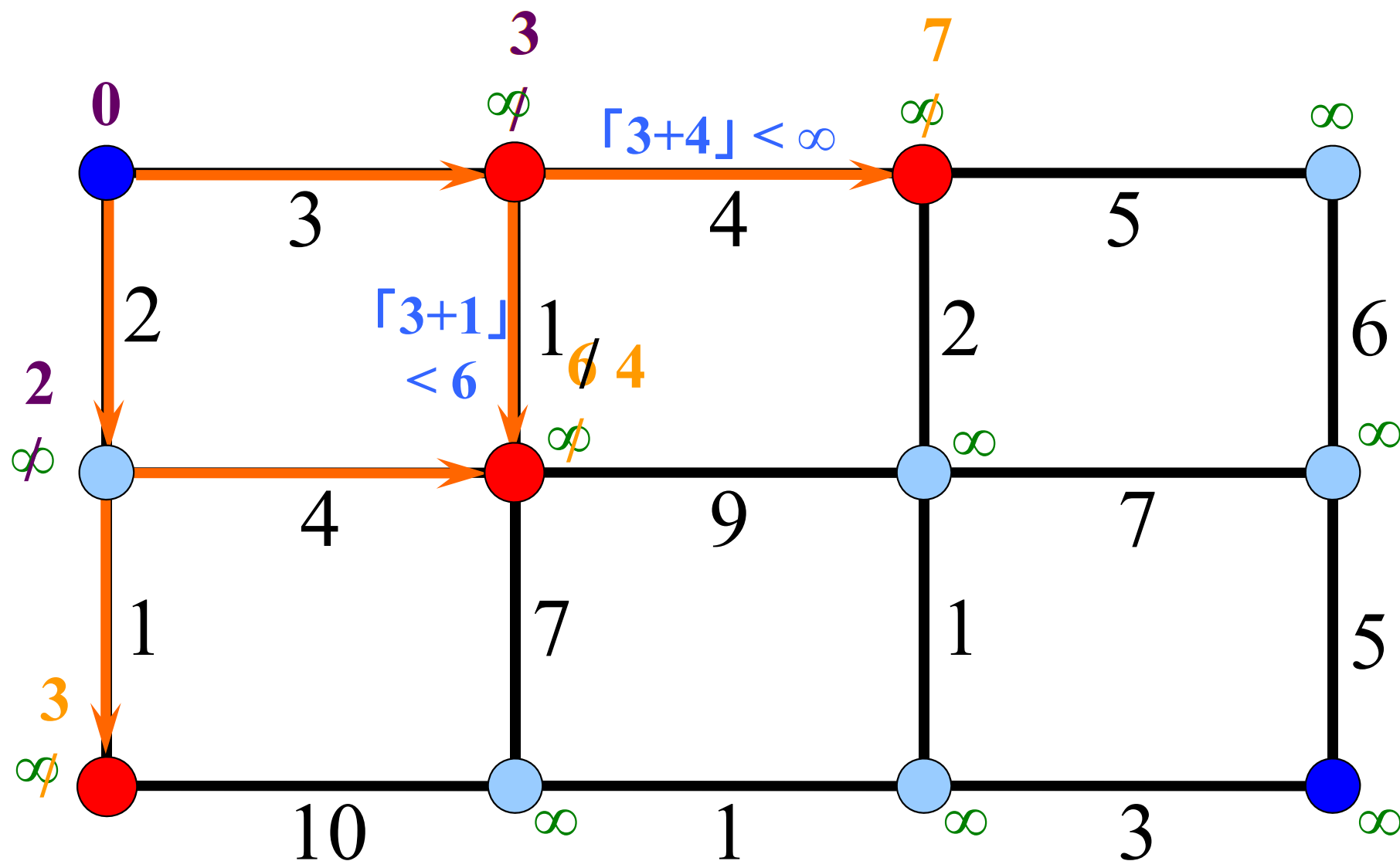
Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す



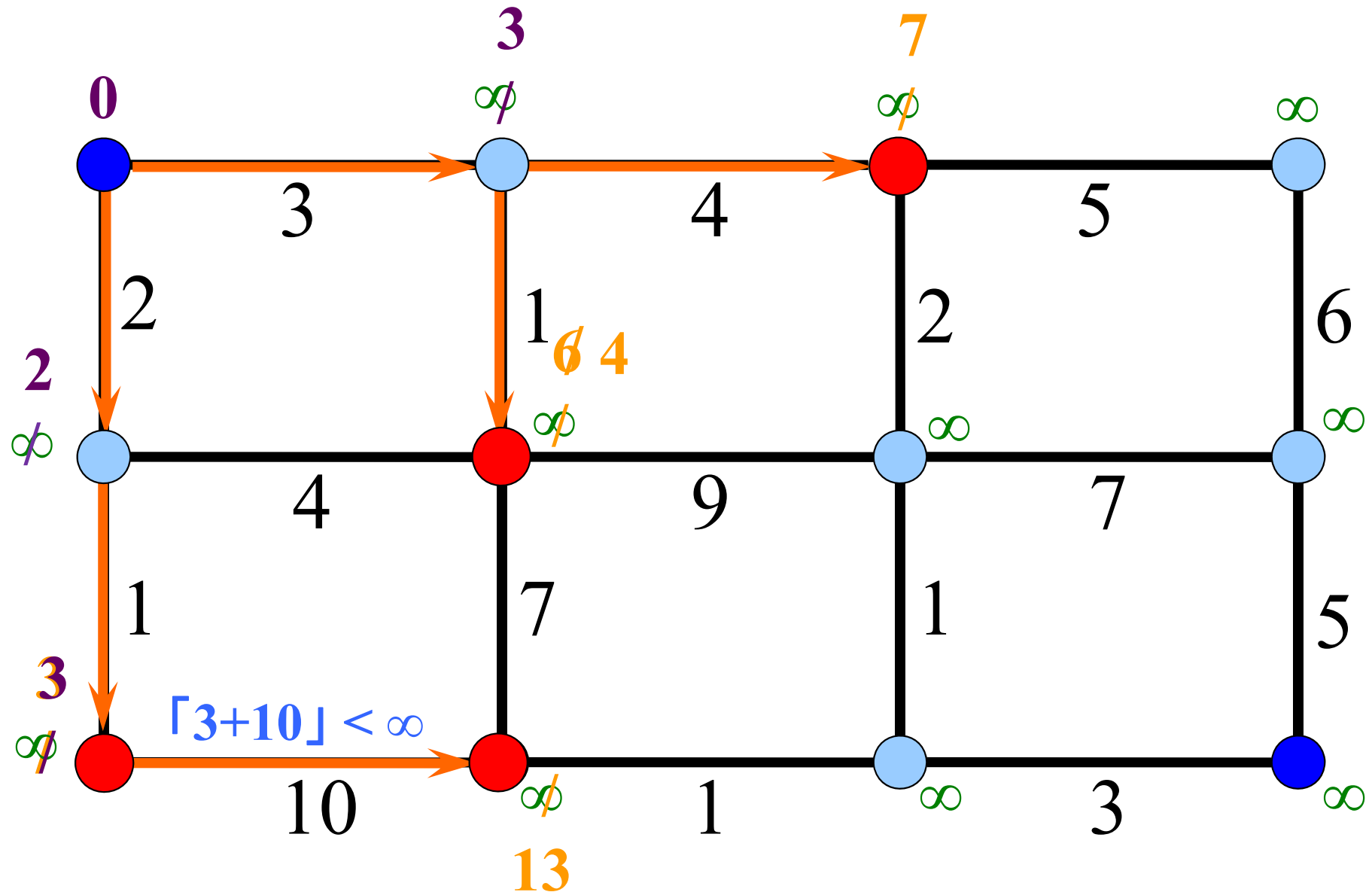
Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す



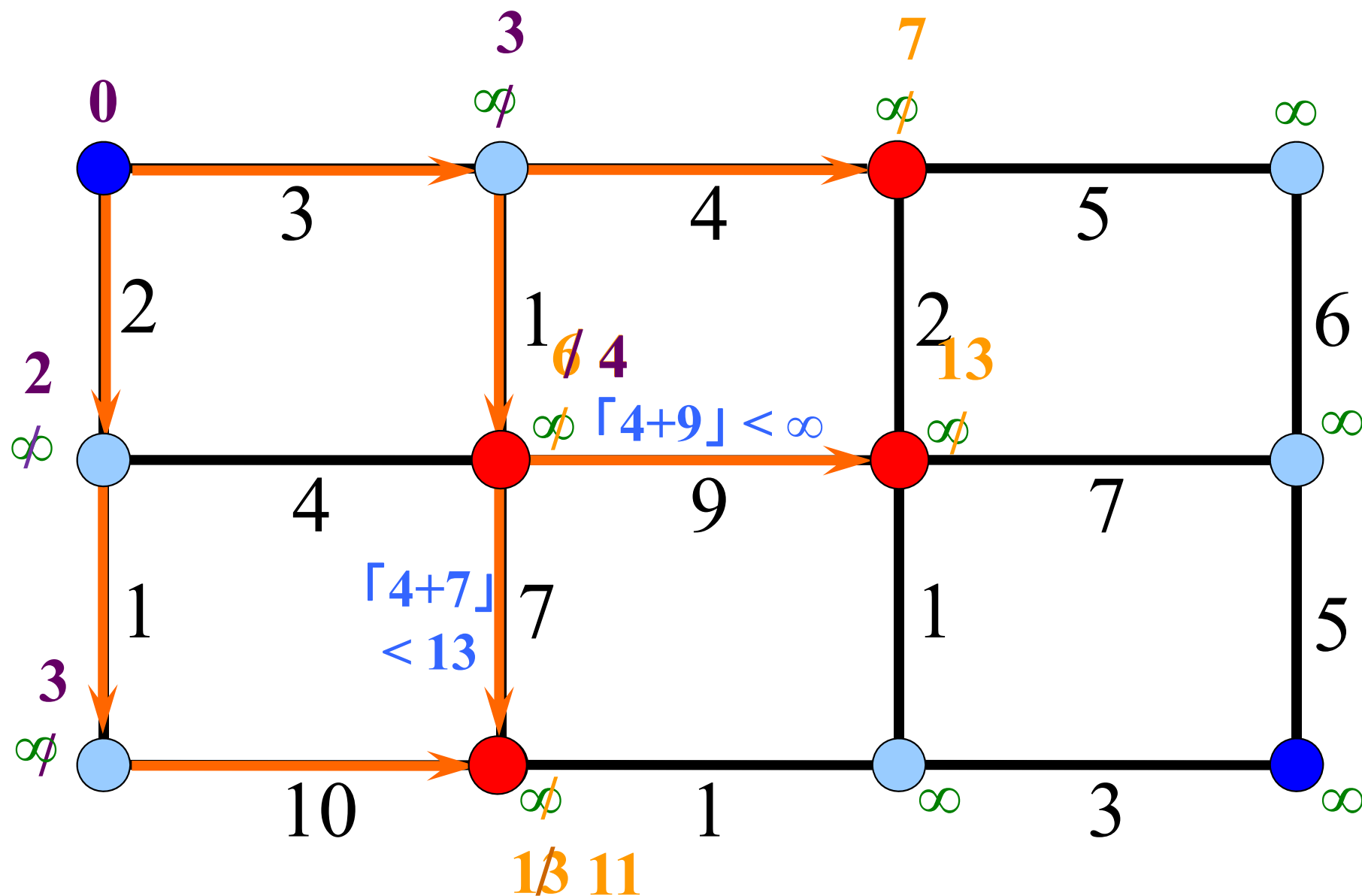
Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す

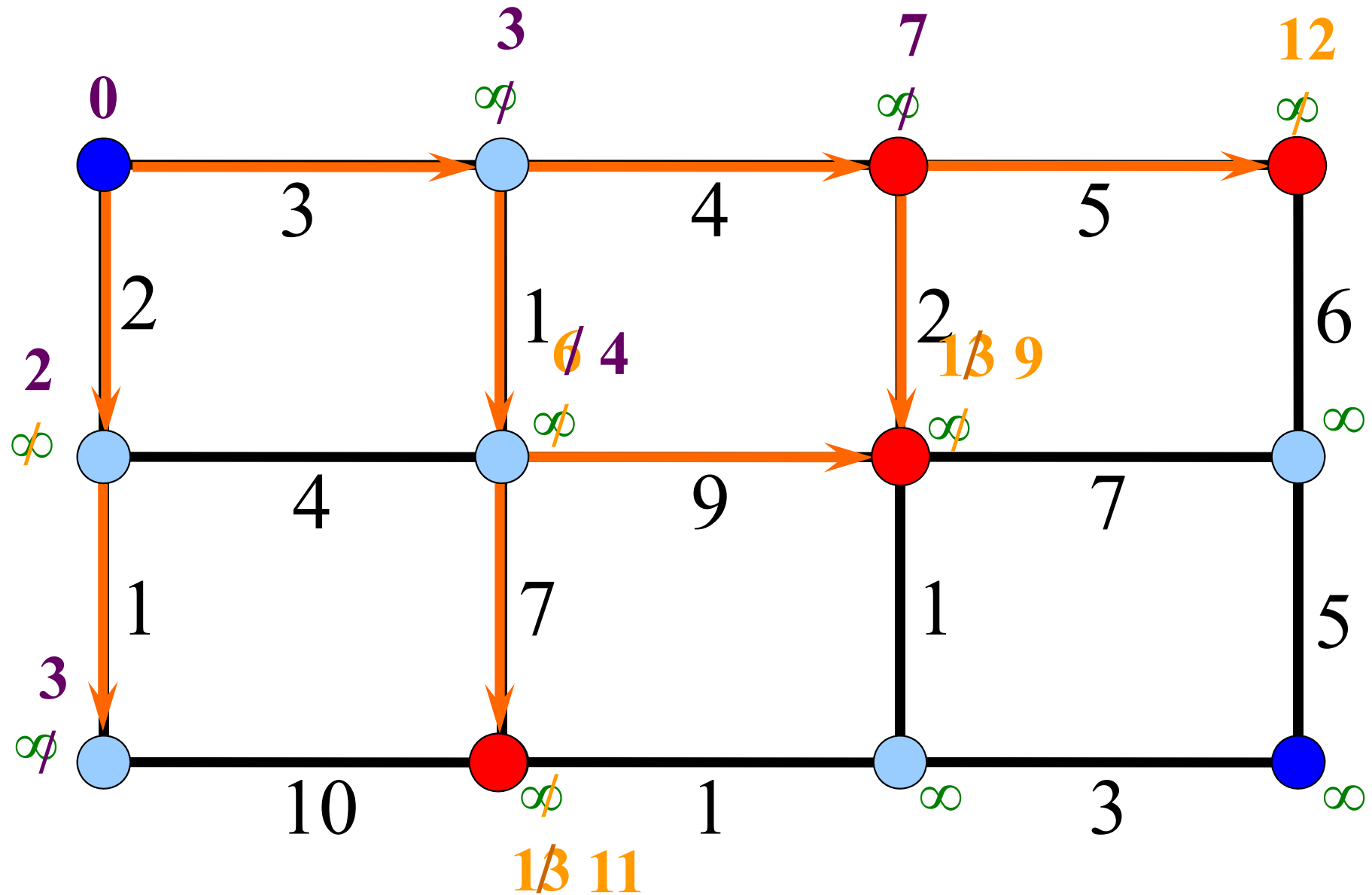


Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す

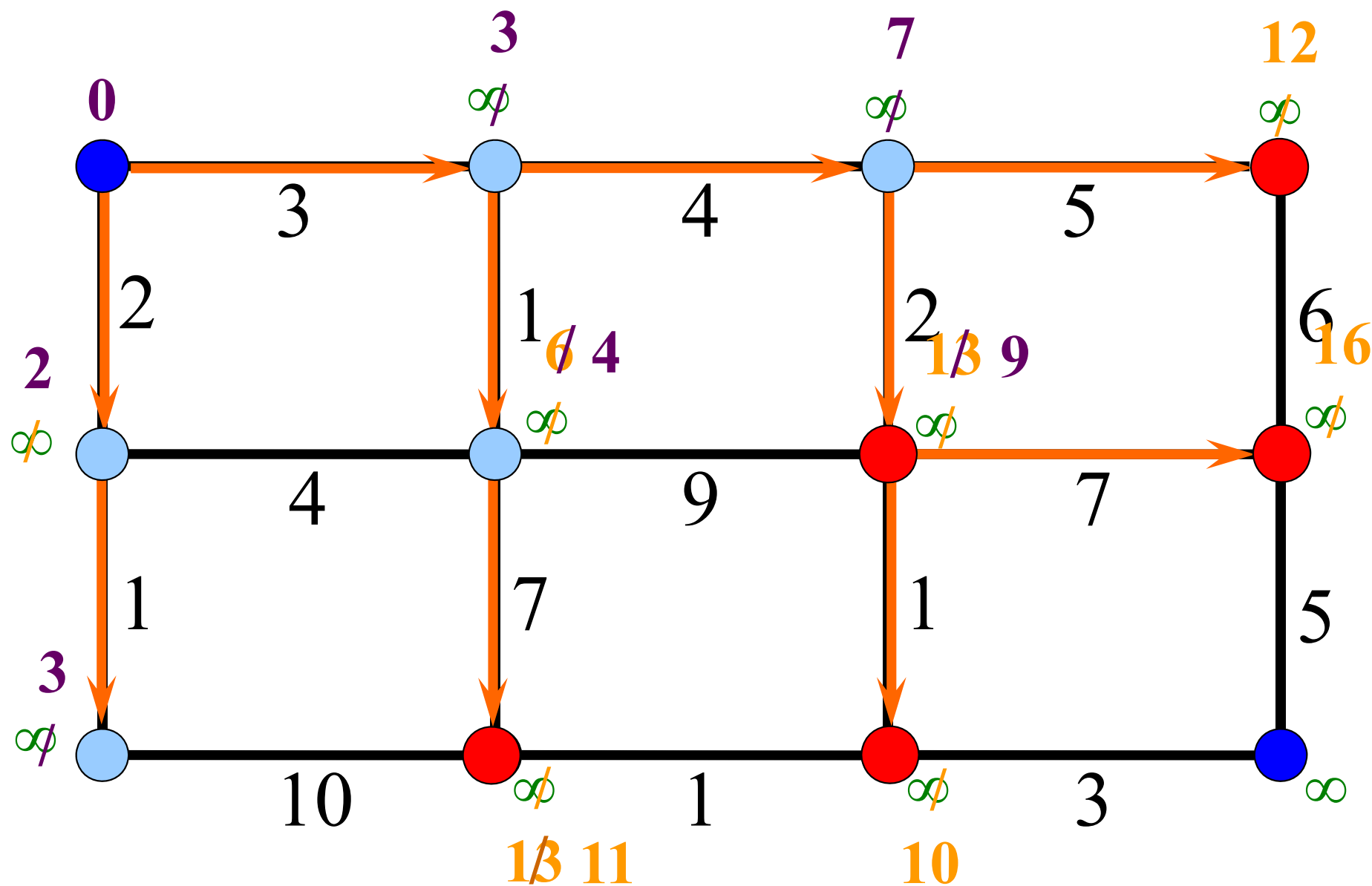


step1-1 ~ step1-3 を繰り返す



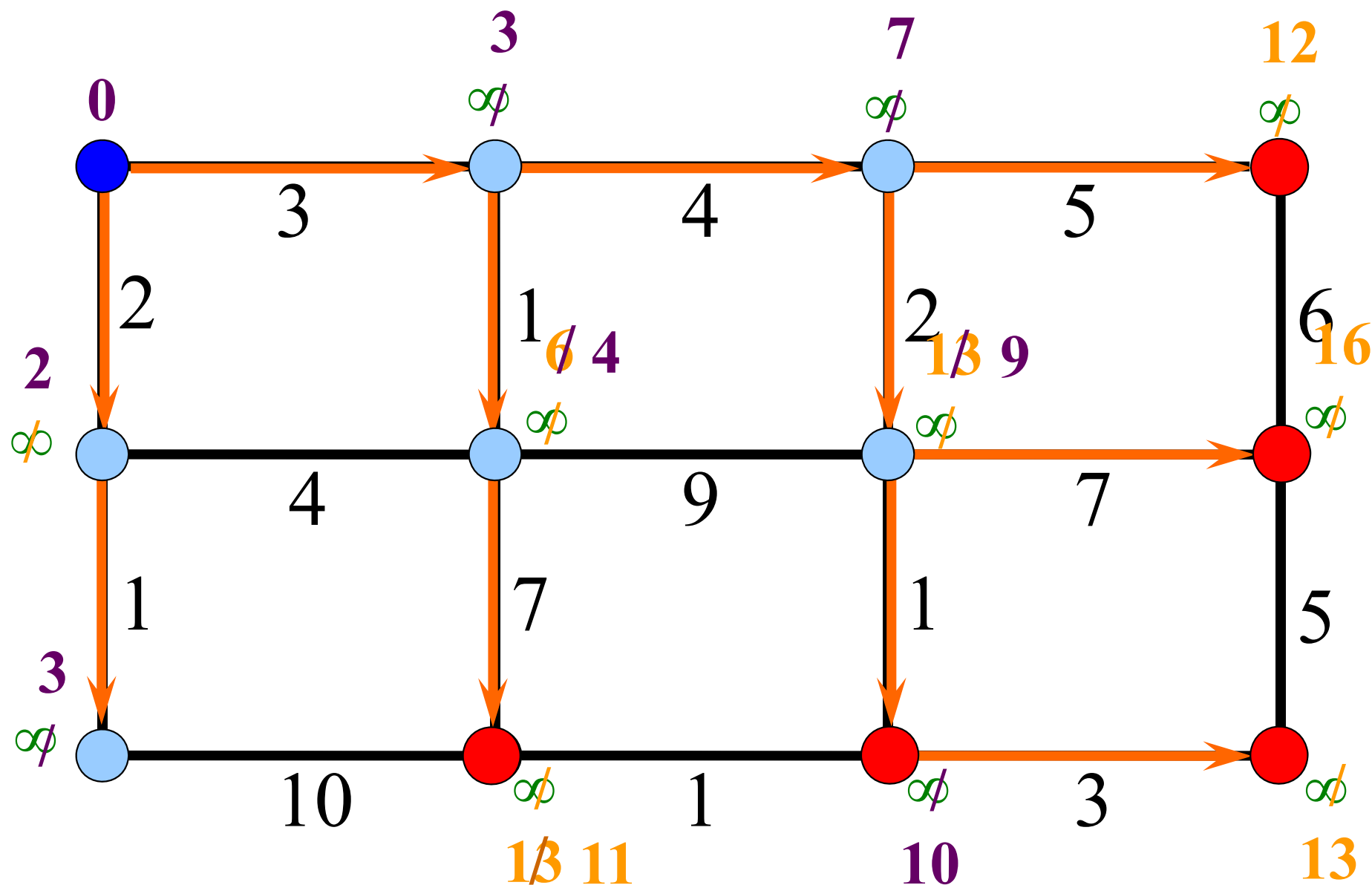
Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す



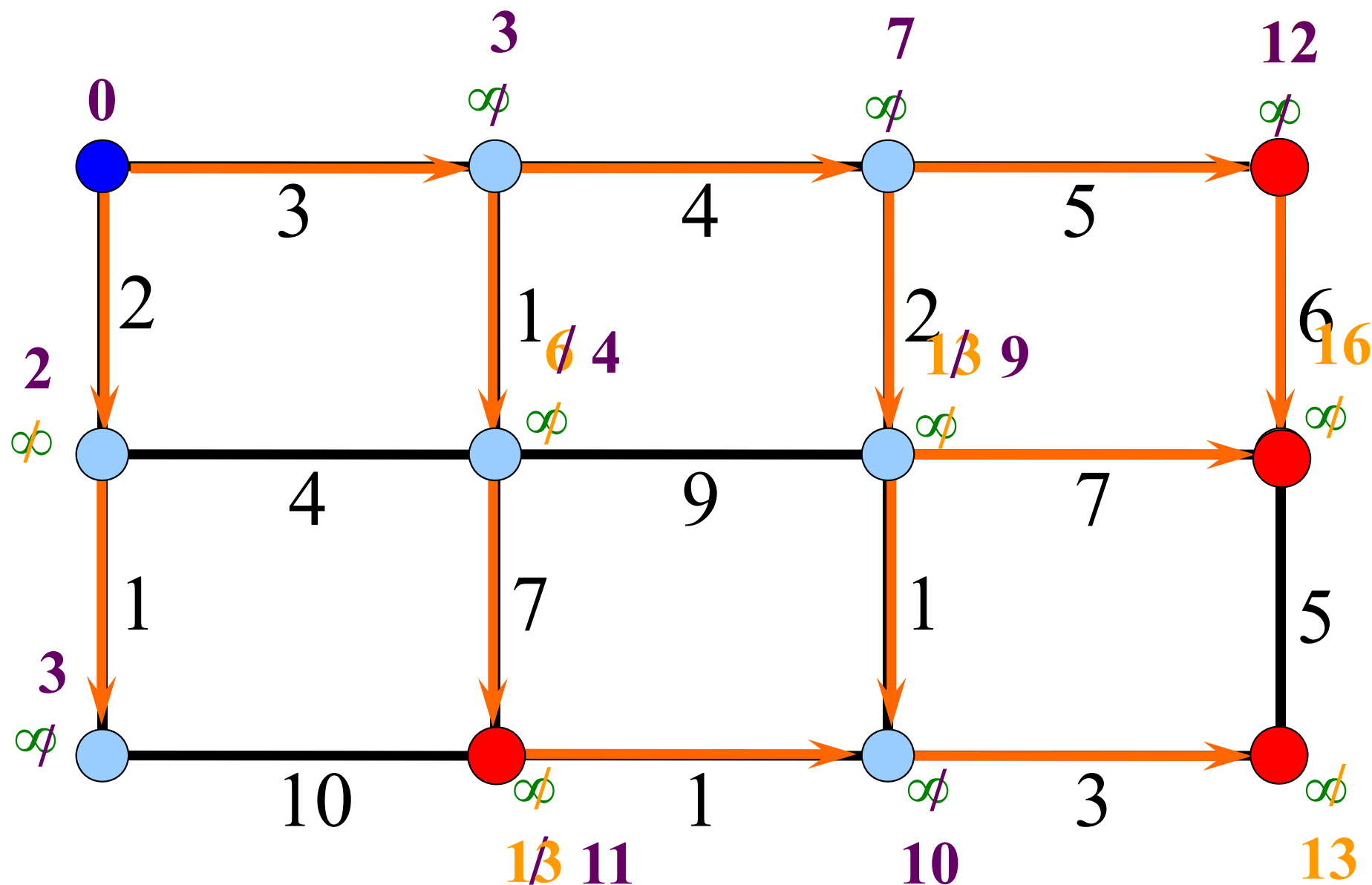
Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す



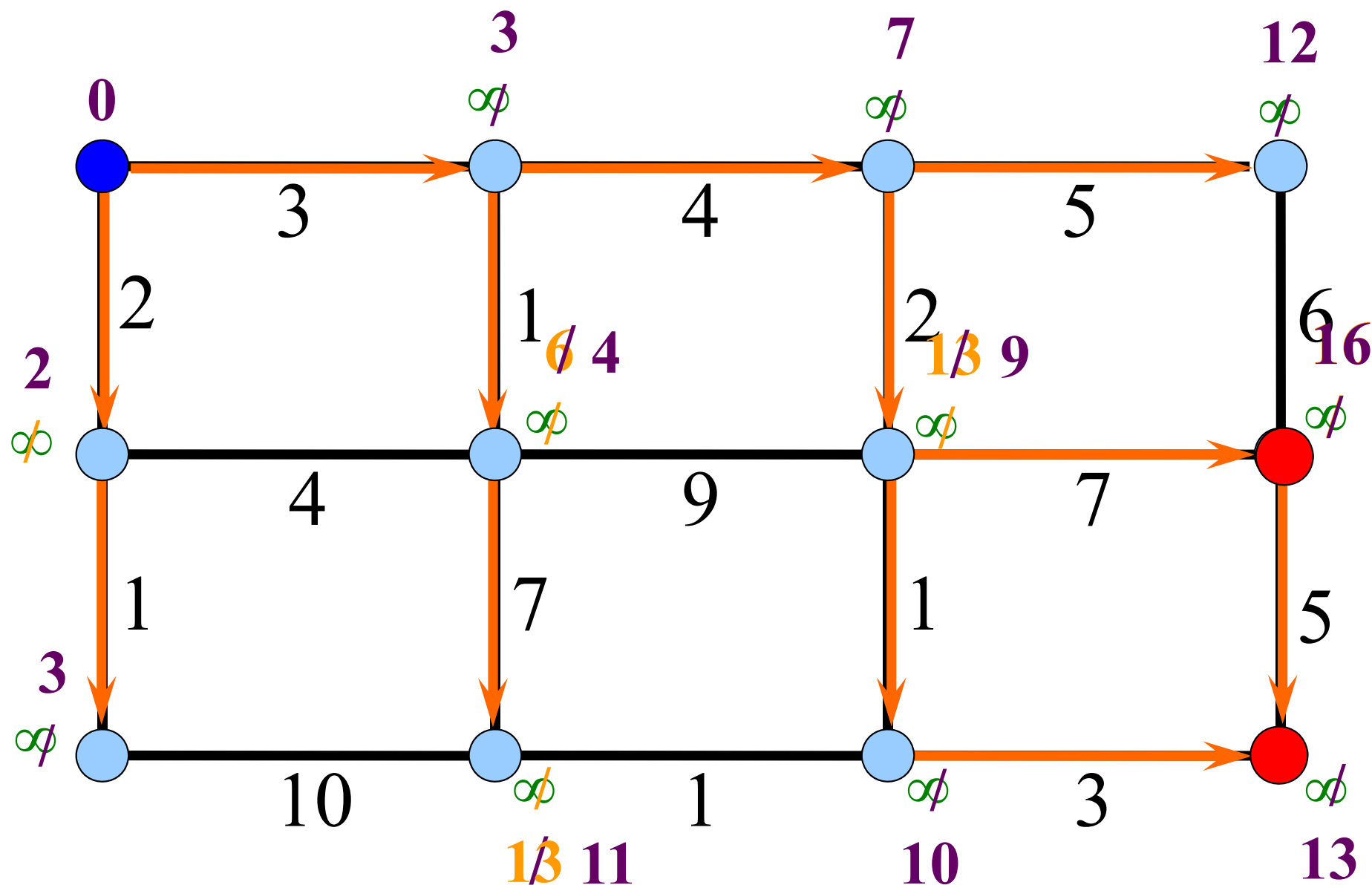
Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す



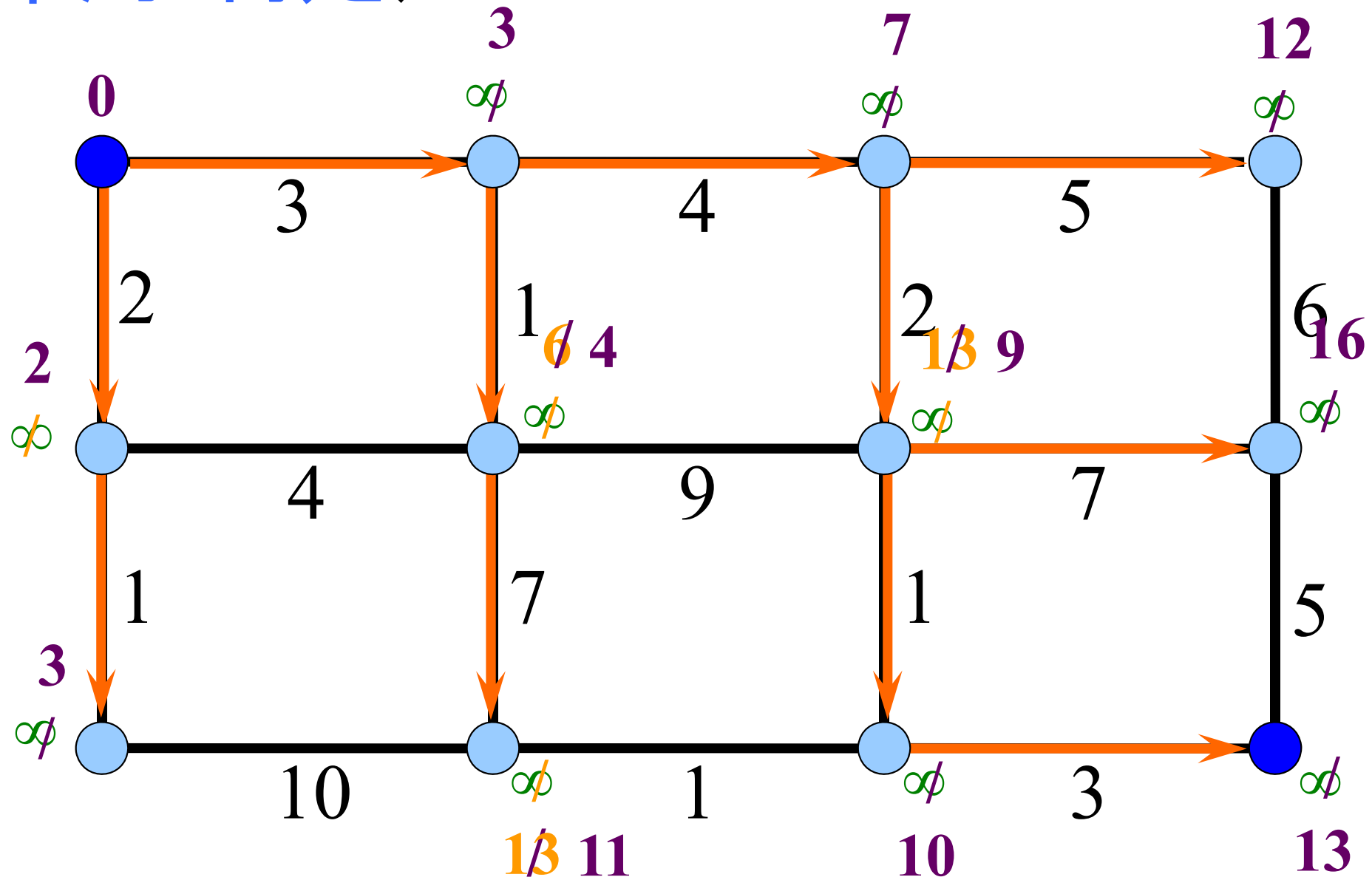
Dijkstra法

step1-1 ~ step1-3 を繰り返す



Dijkstra法 (終了判定)

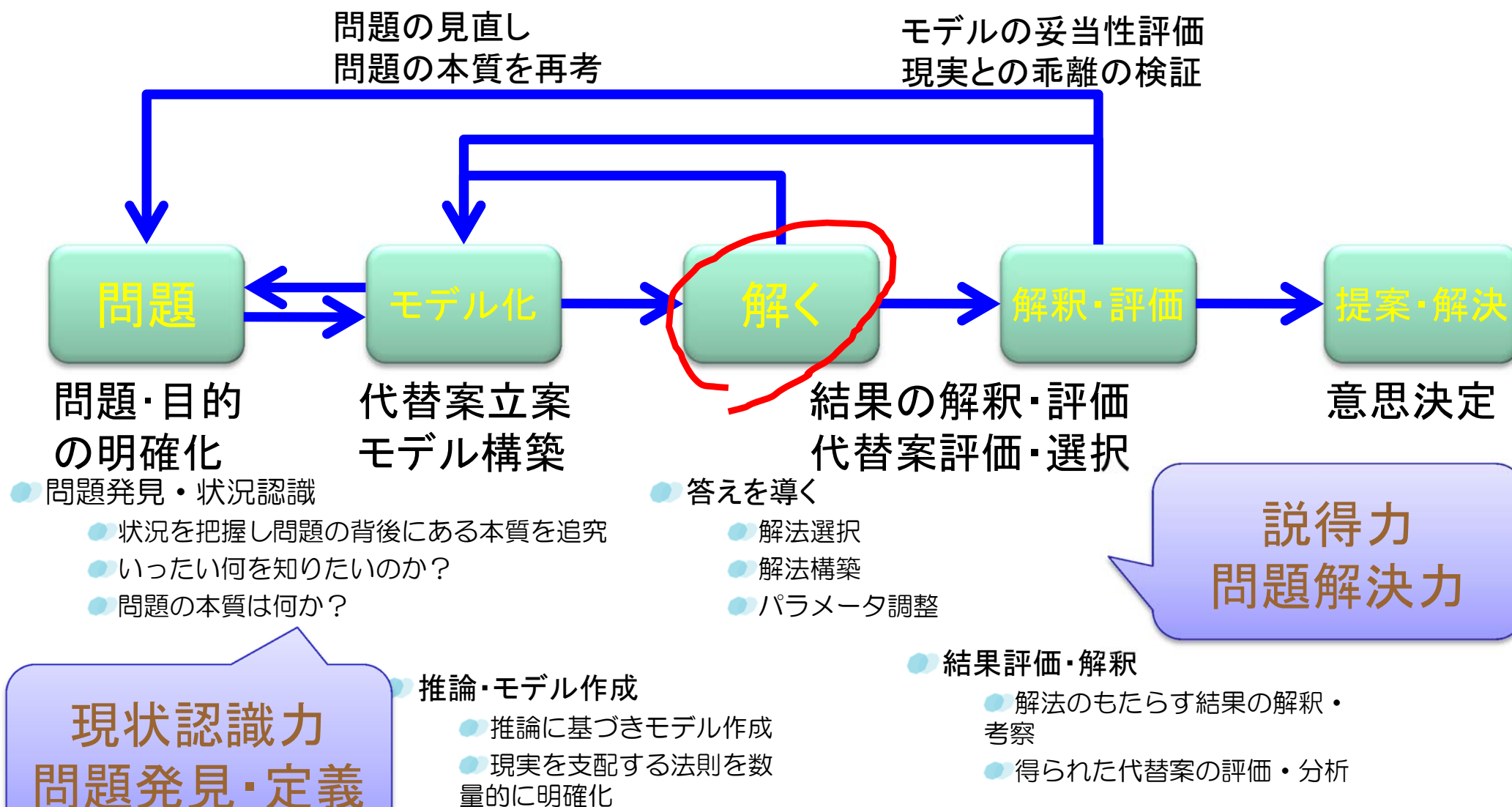
step2: 調査中の点(●)がなくなったら終了



意思決定

論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



説得力
問題解決力

現状認識力
問題発見・定義

Dijkstra法って速いのか？



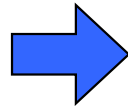
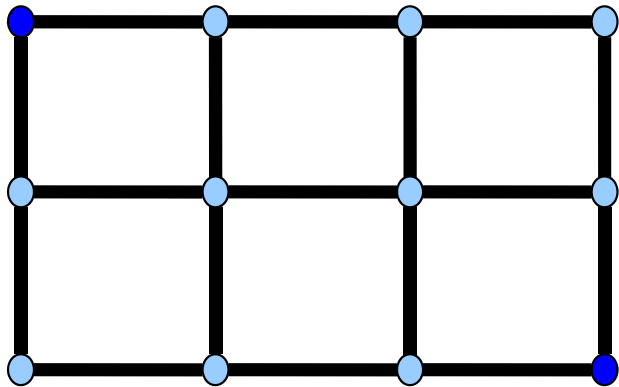
- 点の数を n とすると, 大雑把な見積もりで,

$$O(n^2) \quad \text{多項式オーダー}$$

$$O(m + n \log n)$$

- 点の数 n を右向枝数 R , 下向枝数 D で表すと

$$n = (R + 1) \times (D + 1)$$



$$n = (3 + 1) \times (2 + 1) = 12$$

$$n^2 = 12^2 = 144$$

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため n^2 の5倍の浮動小数点演算回数で計算できると仮定.

Dijkstra法って速いのか？

10.51PFLOPS

51.2GFLOPS

R(横) D(縦)	全経路	京 & しらみつぶし	Core i7 & Dijkstra
3 2	10	0.0000000000 秒	0.0000000001 秒
6 4	210	0.0000000000 秒	0.0000000003 秒
10 5	3,003	0.0000000000 秒	0.0000000006 秒
20 10	30,045,015	0.0000000086 秒	0.0000000023 秒
25 25	1.3E+14	0.601382523 秒	0.0000000066 秒
30 30	1.2E+17	11.25 分	0.0000000094 秒
40 40	1.1E+23	25.95 年	0.0000000164 秒
50 50	1.0E+29	30,439,996 年	0.0000000254 秒
100 100	9.1E+58	4.0E+27 宙齡	0.0000000996 秒
500 500	2.7E+299	5.9E+268 宙齡	0.000024512 秒

世界最速SuperComp
+ 力技 (しょぼい方法)

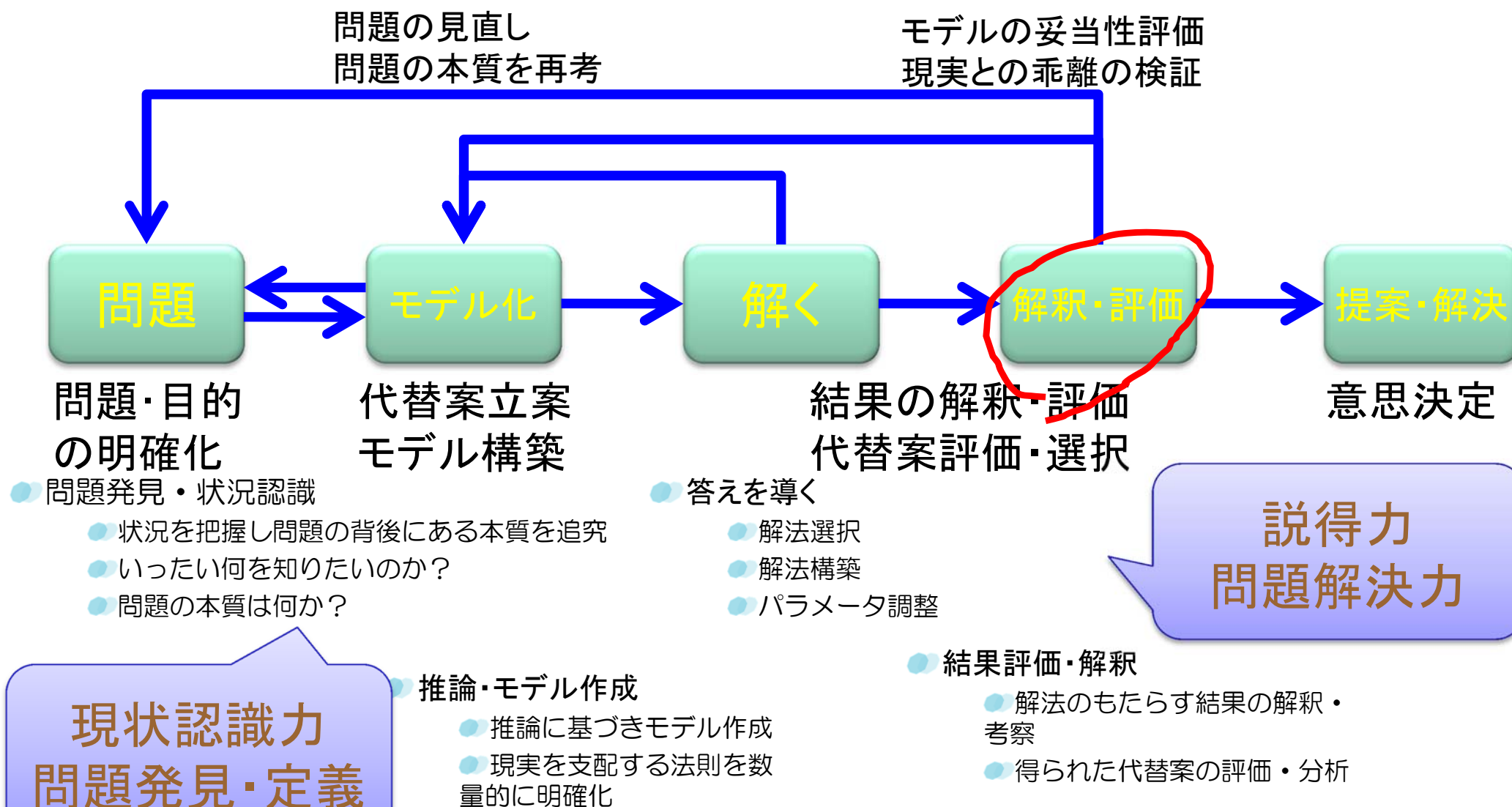


そこらのPC
+ 人間の知恵

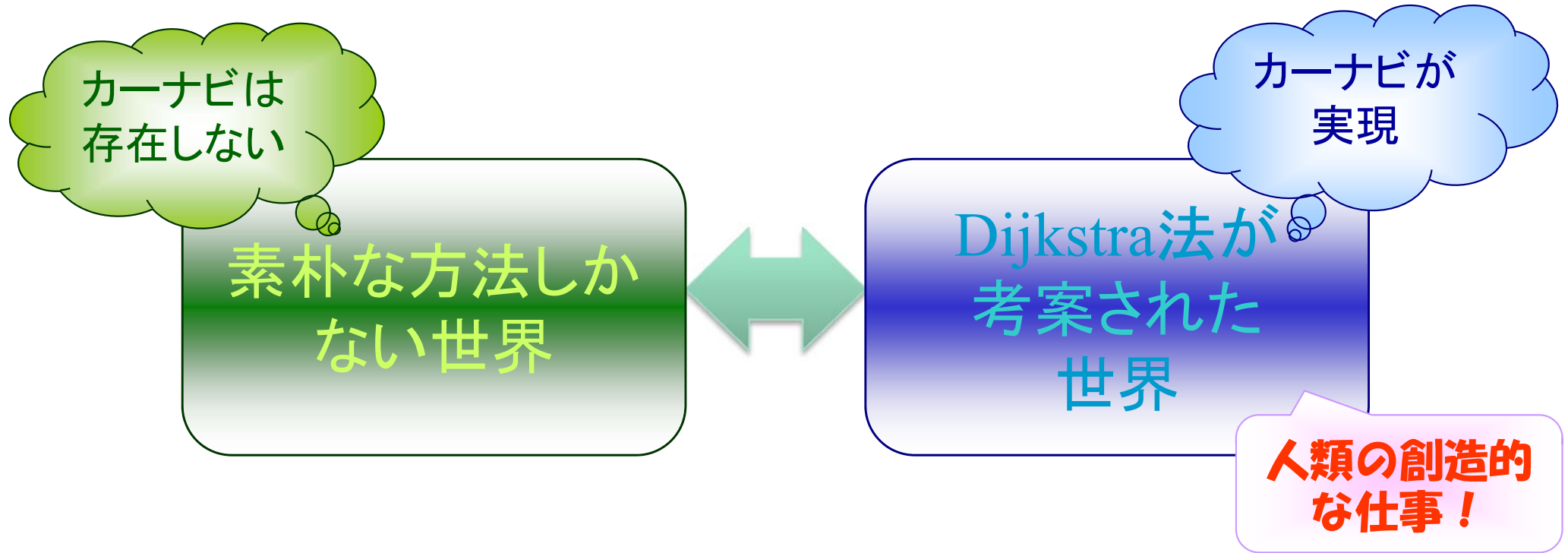
意思決定

論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



意思決定支援・ビジネスサポート



参考文献

コンピュータに仕事を奪われつつある人類...

- [1] 新井紀子
「コンピュータが仕事を奪う」日経新聞社(2010)
- [2] E. Brynjolfsson, A. McAfee, 村井章子訳
「機械との競争」日経BP社(2013)



もっと知りたい人へ

- 参考文献

- グリッツマン, ブランデンベルク「**最短経路の本**」 シュプリンガー(2008)
- W.J.クック「**驚きの数学 巡回セールスマン問題**」 青土社(2013)
- 久保, 松井「**組合せ最適化『短編集』**」 朝倉書店(1999)
- 山本, 久保「**巡回セールスマン問題への招待**」 朝倉書店(1997)
- 松井, 根本, 宇野「**入門オペレーションズ・リサーチ**」 東海大出版(2008)

- 関連する経営情報学科の授業

- 「**オペレーションズ・リサーチ**」(1・2セメ)
- 「**ネットワークモデル分析**」(4セメ)
- 「**最適化モデル分析**」(5セメ)
- 「**アルゴリズムとデータ構造**」(3・4セメ)

etc...