意思決定科学：ゲーム理論３

堀田敬介

2015/12/11,Fri.～

CONTENTS

- 協力ゲームの理論
  - 2人交渉ゲーム
  - 結合戦略，実現可能集合
  - Nash交渉解
  - 提携ゲーム，提携と配分
  - コア，安定集合，シャープレイ値

- 投票ゲーム
  - 投票力指数
    - シャープレイ・シュービック指数
    - バンザフ指数
    - ディーガン・パックル指数

協力ゲームの理論

- 2人交渉ゲーム
  - 交渉問題（bargaining problem）
    - 交渉を行う　←何らかの共通の認識をもつ
    - 共通の認識を明確に定義し，交渉のルールと解を求める
      - 例：恋人達のジレンマ
        - 事前に話し合いを行う
        - ジャンケンで勝った方，強く主張した方，くじ引き，etc…

男＼女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)

- 結合純戦略（joint pure strategy）
  - （野球, 野球），（野球, 映画），（映画, 野球），（映画, 映画）
- 結合混合戦略（joint mixed strategy）
  - $z=(z_{11},z_{12},z_{21},z_{22})\quad,\begin{cases}z_{11}+z_{12}+z_{21}+z_{22}=1\\ z_{11},z_{12},z_{21},z_{22}\geq 0\end{cases}$

協力ゲームの理論

- 結合混合戦略と実現可能集合
  - 双行列　$G=(a_{ij},b_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$
  - 結合混合戦略
    - 結合純戦略(i,j)がとられる確率を z_{ij}としたときの確率分布

$$z=(z_{11},z_{12},\cdots,z_{mn}) \quad ,\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}=1\\ z_{ij}\ge 0\ \ (i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

    - 結合（混合）戦略集合： $Z=\{z\}$

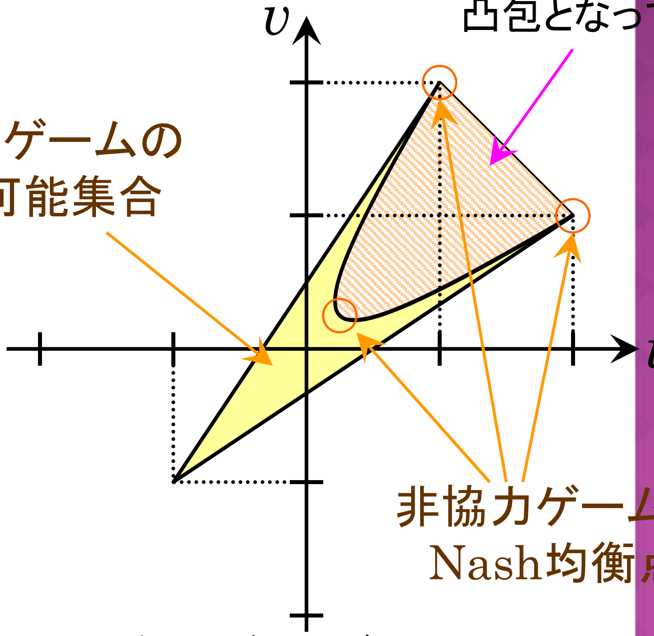
- 二人の期待利得

$$u(z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_{ij}$$

$$v(z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_{ij}$$

- 実現可能集合（到達可能集合）

$$R=\{(u(z),v(z))\,|\,z\in Z\}$$



協力ゲームの
実現可能集合
（非協力ゲームの
実現可能集合の
凸包となっている）

非協力ゲームの
実現可能集合

非協力ゲームの
Nash均衡点

例：恋人達のジレンマ

協力ゲームの理論

男＼女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)

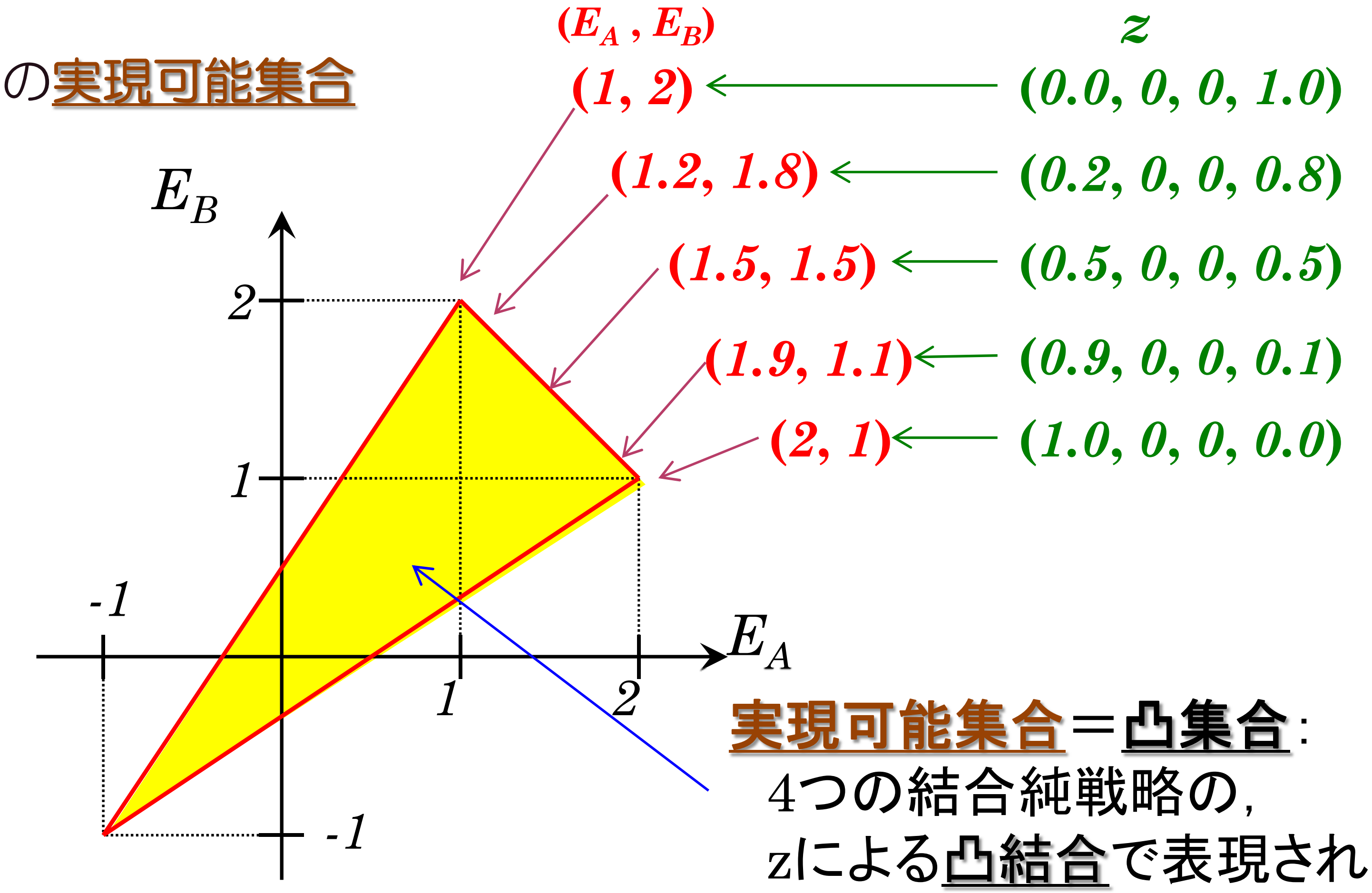
- 2人交渉ゲーム
  - プレイヤーA, Bの期待効用 $\boldsymbol{E_A}, \boldsymbol{E_B}$

$$\begin{cases} E_A(\mathbf{z}) = 2z_{11} - z_{12} - z_{21} + z_{22} \\ E_B(\mathbf{z}) = z_{11} - z_{12} - z_{21} + 2z_{22} \end{cases}$$

※）非協力ゲームの場合

$$\begin{cases} E_A(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 2pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) \\ E_B(\mathbf{p},\mathbf{q}) = pq - p(1-q) - (1-p)q + 2(1-p)(1-q) \end{cases}$$

  - 交渉の**実現可能集合**



(E_A, E_B)	$\boldsymbol{z}$
(1, 2)	(0.0, 0, 0, 1.0)
(1.2, 1.8)	(0.2, 0, 0, 0.8)
(1.5, 1.5)	(0.5, 0, 0, 0.5)
(1.9, 1.1)	(0.9, 0, 0, 0.1)
(2, 1)	(1.0, 0, 0, 0.0)

実現可能集合＝**凸集合**：
4つの結合純戦略の，
zによる**凸結合**で表現される領域

協力ゲームの理論

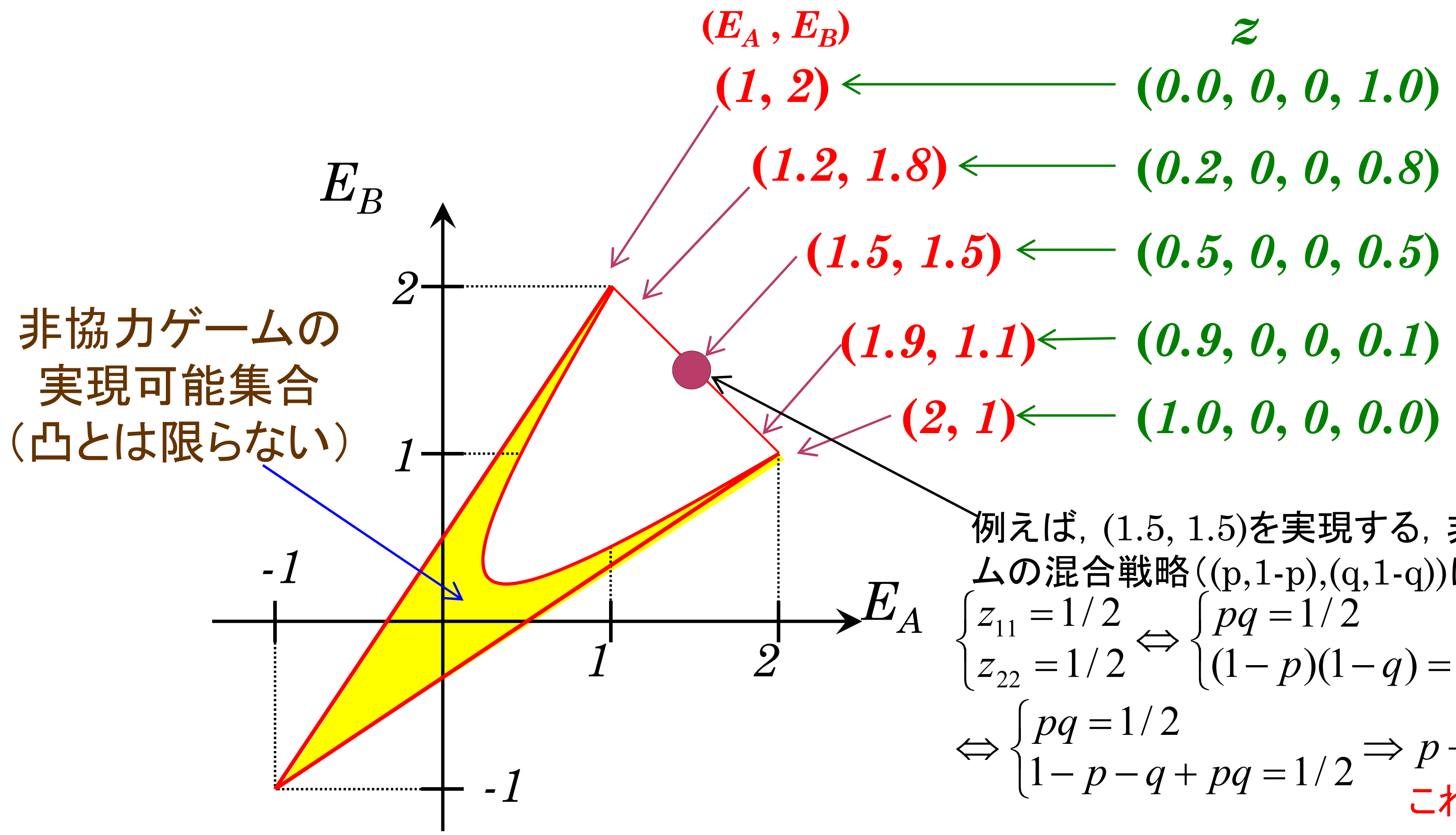
男＼女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)

- 2人交渉ゲーム
  - プレイヤーA, Bの期待効用 $\boldsymbol{E_A}$, $\boldsymbol{E_B}$

$$\begin{cases} E_A(\mathbf{z}) = 2z_{11} - z_{12} - z_{21} + z_{22} \\ E_B(\mathbf{z}) = z_{11} - z_{12} - z_{21} + 2z_{22} \end{cases}$$

※）非協力ゲームの場合

$$\begin{cases} E_A(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 2pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) \\ E_B(\mathbf{p},\mathbf{q}) = pq - p(1-q) - (1-p)q + 2(1-p)(1-q) \end{cases}$$



$(E_A\ ,E_B)$	z
$(1,\ 2)$ ←	$(0.0,\ 0,\ 0,\ 1.0)$
$(1.2,\ 1.8)$ ←	$(0.2,\ 0,\ 0,\ 0.8)$
$(1.5,\ 1.5)$ ←	$(0.5,\ 0,\ 0,\ 0.5)$
$(1.9,\ 1.1)$ ←	$(0.9,\ 0,\ 0,\ 0.1)$
$(2,\ 1)$ ←	$(1.0,\ 0,\ 0,\ 0.0)$

例えば，(1.5, 1.5)を実現する，非協力ゲームの混合戦略((p,1-p),(q,1-q))はない

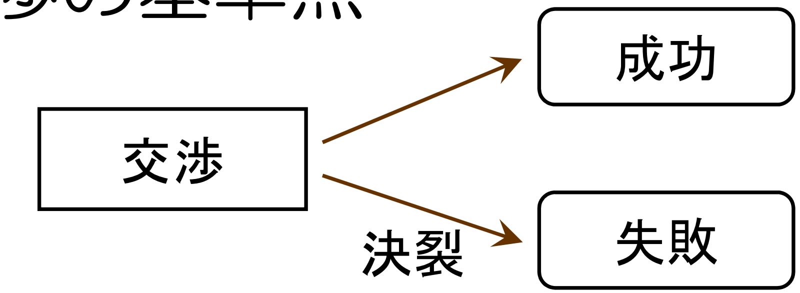
$$\begin{cases} z_{11} = 1/2 \\ z_{22} = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pq = 1/2 \\ (1-p)(1-q) = 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} pq = 1/2 \\ 1-p-q+pq = 1/2 \end{cases} \Rightarrow p+q = 1/2$$

これを満たす
p, qはない！

協力ゲームの理論

- 交渉の基準点



利得

≧

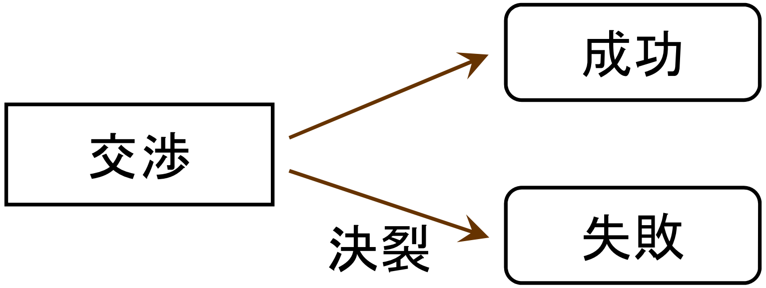
利得＝最悪の場合でも保証される利得

＝maximin値

交渉が不成功に終わったとしても期待できる保証水準
＝交渉の基準点

$$\begin{cases} c_1 := \max\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j \\ c_2 := \max\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j \end{cases}$$

  - 例：恋人達のジレンマ



・デート成立

交渉の基準点の例

・家に帰って不貞寝　$(c_1,c_2)=(0,0)$

・非協力ゲームをやる　$(c_1,c_2)=(1/5,1/5)$

協力ゲームの理論

- 2人交渉ゲーム
  - 演習：

$A \diagdown B$	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	**(6, 7)**	**(0, 9)**
s_{B_2}	**(9, 0)**	**(2, 3)**

1. （協力）実現可能集合を描いてみよう
2. このゲームを協力ゲームの出発点として，交渉の基準点を考えよう

協力ゲームの理論

- 交渉問題の要素
  - プレイヤーの集合　$N = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - 交渉の基準点　$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ← 交渉不成立時の保証水準
  - 実現可能集合　$S = \{\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \}$
    - Sの満たすべき性質
      1. n次元Euclid空間の有界閉凸集合
      2. 基準点 $\boldsymbol{c}$ は S に含まれる
      3. S には，任意の i について，$x_i > c_i$ なる点を少なくとも1つ含む

プレイヤーに c の共通認識があるとき，cを交渉の基準点とよぶ（ c は所与）

- 交渉問題の定式化
  - 交渉問題　$(\ N, S, \boldsymbol{c}\ )$
  - 交渉の妥結点　$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$
    - 交渉問題 $(N, S, \boldsymbol{c})$ が与えられたとき，全てのプレイヤーが納得する S に属すただ一つの点 $\boldsymbol{s}$ が選び出されたとき，その点 $\boldsymbol{s}$
  - 交渉解　F： $(N, S, \boldsymbol{c}) \to \boldsymbol{s}$
    - 交渉問題 $(N, S, \boldsymbol{c})$ に対し，妥結点 $\boldsymbol{s}$ を対応させるルール

交渉のルールが共通認識なら，基準点を定める交渉となる

協力ゲームの理論

交渉成立時には，交渉不成立時に保証される利得 $\boldsymbol{c}$ より多くの利得が保証されねばならない

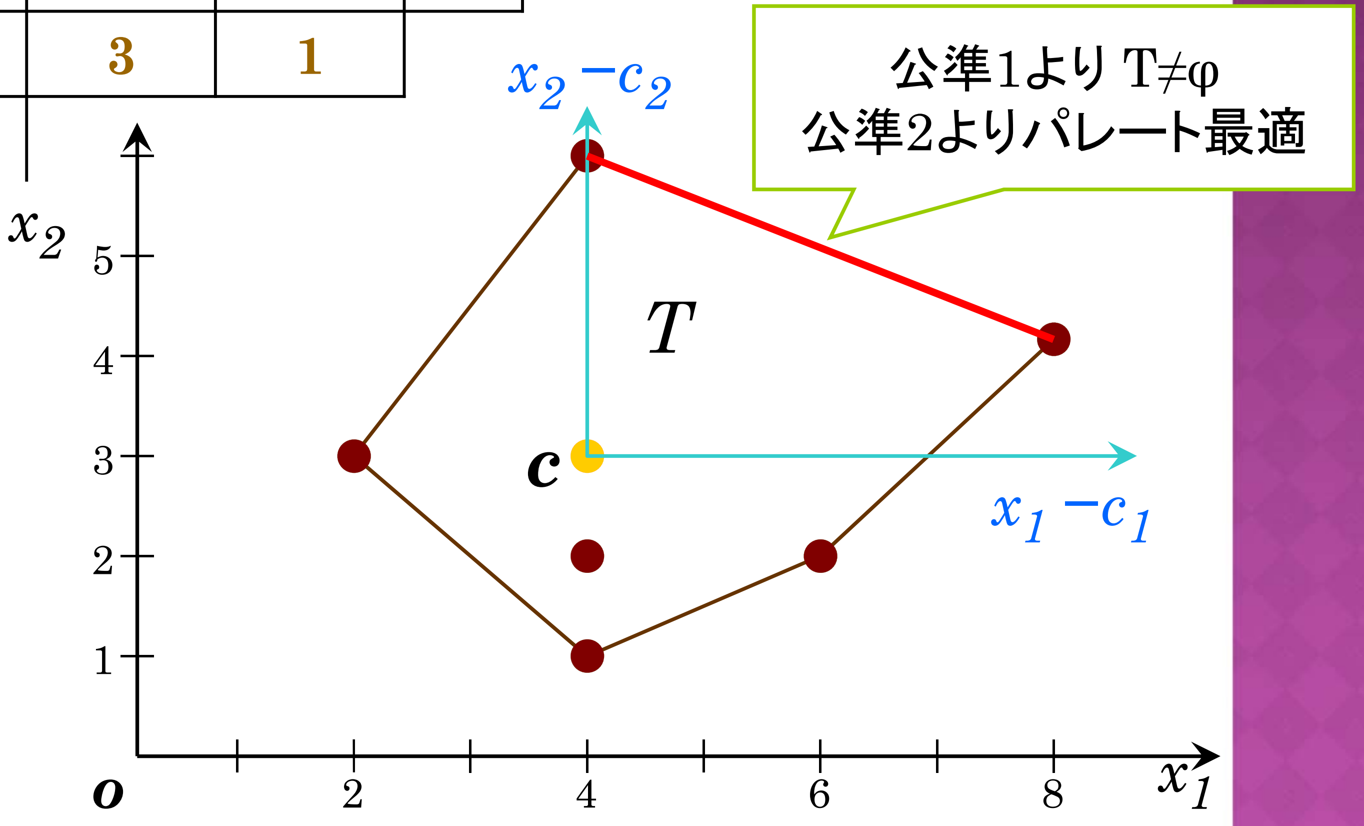
- 交渉の妥結点の満たすべき公準（part I ）
  - 公準1：個人合理性
    - $\boldsymbol{x}$ が個人合理的　⇔　$x_i \geqq c_i$ $(i=1,\ldots,n)$
    - $F(N, S, \boldsymbol{c})$ の妥結点 $\boldsymbol{s}$ が個人合理的のとき，F は個人合理的であるという
  - 公準1’：強個人合理性
    - $\boldsymbol{x}$ が強個人合理的　⇔　$x_i > c_i$ $(i=1,\ldots,n)$
    - $F(N, S, \boldsymbol{c})$ の妥結点 $\boldsymbol{s}$ が強個人合理的のとき，F は強個人合理的であるという
  - 公準2：パレート最適性（共同合理性，効率性）
    - 交渉の妥結点 $F(N, S, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{s}$ はパレート最適でなければならない
  - 公準2’：弱パレート最適性
    - 交渉の妥結点 $F(N, S, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{s}$ は弱パレート最適でなければならない

協力ゲームの理論

- 交渉領域
  - $T = \{ \boldsymbol{s} \in S \mid \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{c} \}$
  - 例：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	(8, 4)	(2, 3)	(4, 1)	2	4
s_{B_2}	(6, 2)	(4, 6)	(4, 2)	4	
min	2	3	1		
max	3				

各々のmaximinを
交渉の基準点 $\boldsymbol{c} = (4, 3)$
とする



公準1より T≠φ
公準2よりパレート最適

協力ゲームの理論

- Nash交渉解
  - Nash積

$$\prod_{i\in N}(x_i - c_i) = (x_1 - c_1)\times\cdots\times(x_n - c_n)$$

各プレイヤーについて，基準点からの利得の増分の積

  - Nash交渉解
    - 交渉問題 (N, S, $\boldsymbol{c}$) のNash交渉解は，Nash積を最大にする S の点 $\boldsymbol{s}$

$$(s_1 - c_1)\times\cdots\times(s_n - c_n) = \max_{\boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}}(x_1 - c_1)\times\cdots\times(x_n - c_n)$$

$$\text{or } N(S,\boldsymbol{c}) = \arg\max\left\{\prod_{i\in N}(x_i - c_i)\ \middle|\ \boldsymbol{x}\in S, \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}\right\}$$

Nash交渉解は，利得の測定法から独立なので，プレイヤー毎に利得を正一次変換しても変わらない．
（効用の個人間比較を排除）

←

基準点を $\boldsymbol{0}$ に変換して考えることが出来る

協力ゲームの理論

- Nash交渉解

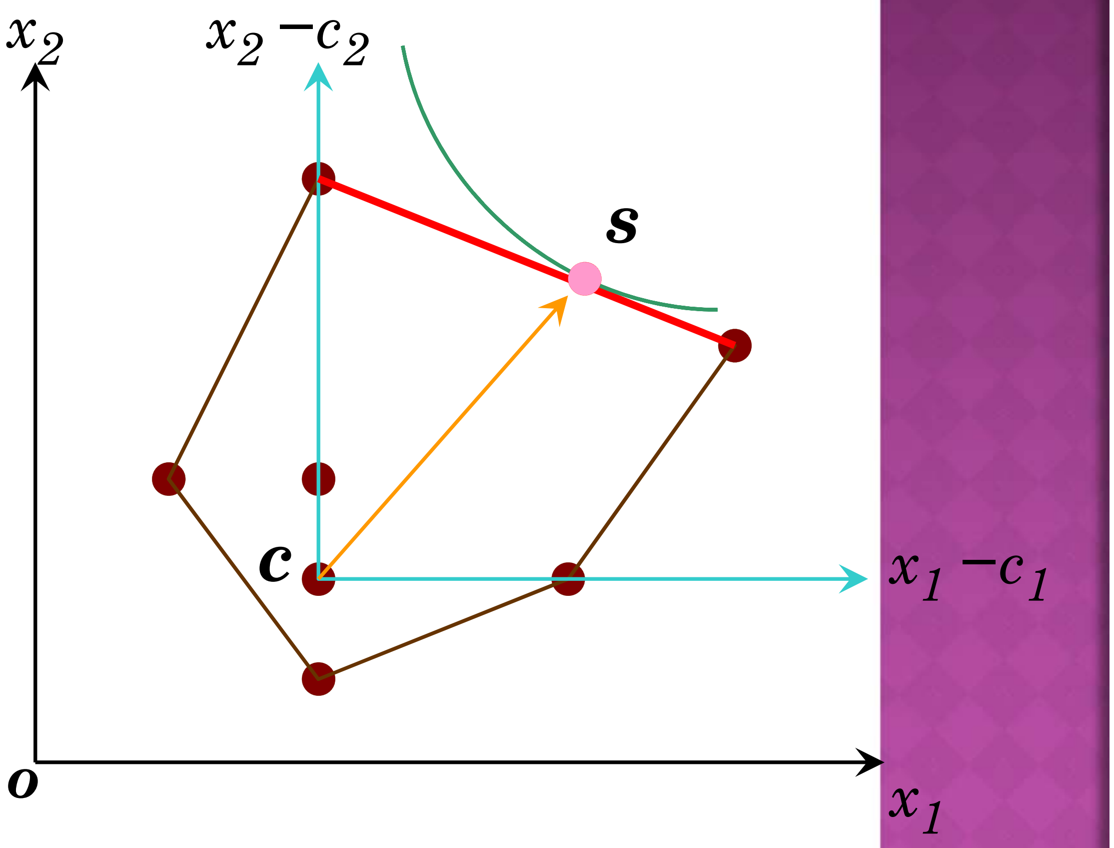
$$(s_1 - c_1)\times\cdots\times(s_n - c_n) = \max_{\boldsymbol{x}\in S,\,\boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{c}} (x_1 - c_1)\times\cdots\times(x_n - c_n)$$

  - 例：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	**(8, 4)**	**(2, 3)**	**(4, 1)**
s_{B_2}	**(6, 2)**	**(4, 6)**	**(4, 2)**

基準点 $\boldsymbol{c}$ = (4, 3) とする
↑各々のmaximin

演習：y_1=1/2x_1という正一次変換を施して考えてみよう！
・パレート最適（共同合理性）を満たす部分は？
・基準点 $\boldsymbol{c}$ は？
さらに z_1=y_1-2, z_2=x_2-3 としたとき，
・Nash解はどう書けるか？
・妥結点を求めもとの問題の妥結点を出そう！

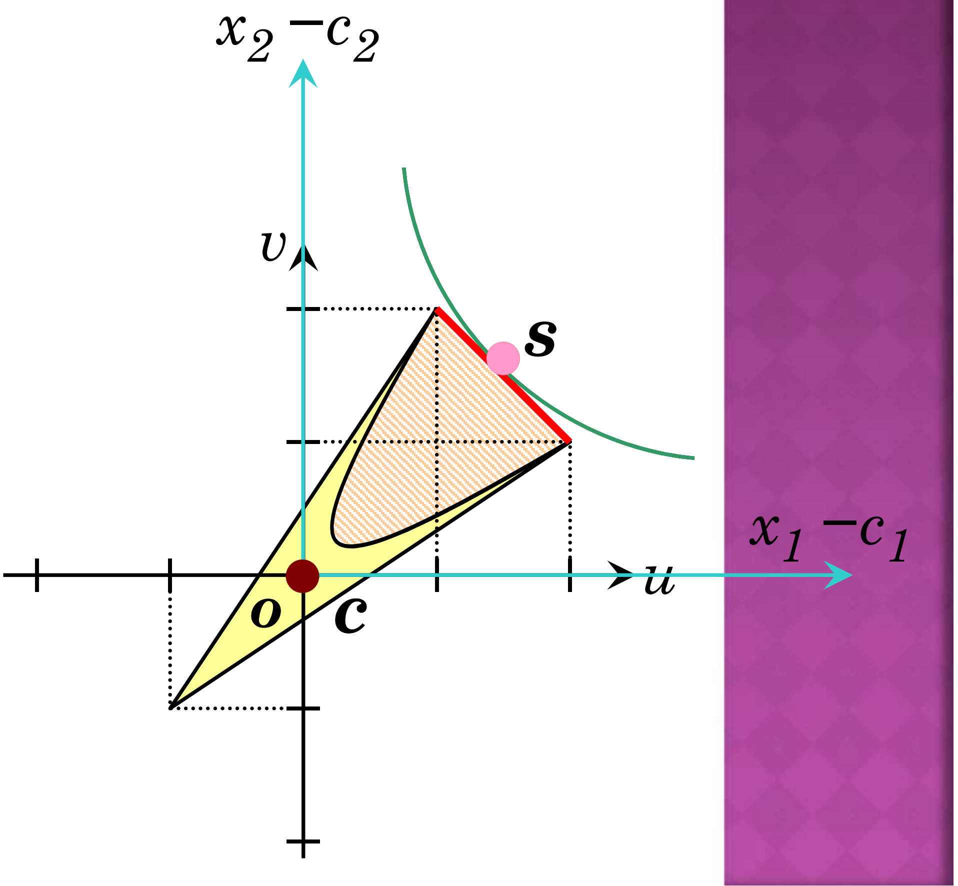


協力ゲームの理論

- Nash交渉解
  - 例：交渉力（bargaining power）

$$(x_1 - c_1)^a \times (x_2 - c_2)^b, \quad [a \geq 0, b \geq 0, a+b>0]$$

男＼女	野球	映画
野球	(2, 1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1, 2)



- $a > b$ の時（プレイヤーAの方が交渉力が強い）
  Nash交渉解：$(u^*, v^*) = (2, 1)$
- $a < b$ の時（プレイヤーBの方が交渉力が強い）
  Nash交渉解：$(u^*, v^*) = (1, 2)$
- $a = b$ の時（双方の交渉力が等しい）
  Nash交渉解：$(u^*, v^*) = (3/2, 3/2)$

協力ゲームの理論

- 交渉の妥結点の満たすべき公準（part II）
  - 公準3：利得の正一次変換からの独立性
    - 利得を測定する単位や尺度を変えても本質的に変わらない

基準点を $c=0$ と出来る

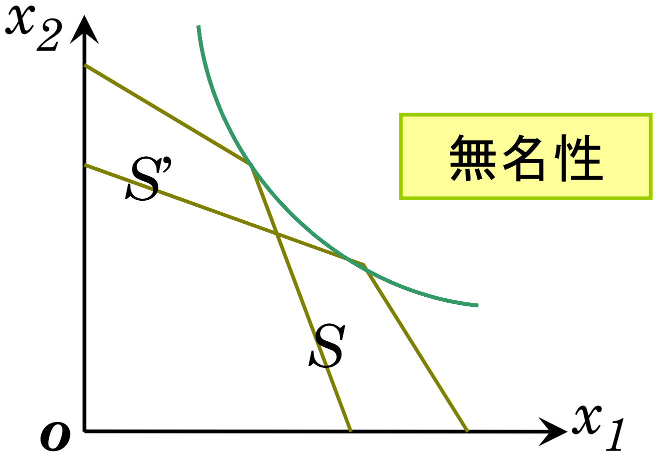
  - 公準4：対称性
    - 例えば，２人交渉問題(S)において，『交渉領域 S が $y=x$ に関して対称ならば，ルール F による妥結点における２人の利得が等しい』を満たす
    - 一般には，実現可能集合 S の任意の置換 $\pi(S) = \{\, \pi(x) \mid x \in S \,\}$ に対し，『$\pi(S) = S \quad \Rightarrow \quad F_i(S) = F_j(S)$ for all i, j』を満たす

プレイヤーの番号を付替えても，交渉領域が変化しないとき，全てのプレイヤーの受け取る利得が同じ

  - 公準5：無名性（匿名性）
    - 交渉問題 (N, S, $\mathbf{0}$) において，

$$F[\pi(S)] = \pi[F(S)]$$

プレイヤーの番号を付替えた時，交渉領域が変化したとしても，妥結点におけるプレイヤーの受け取る利得が番号の付け方に独立，例え匿名にしても変わらない



協力ゲームの理論

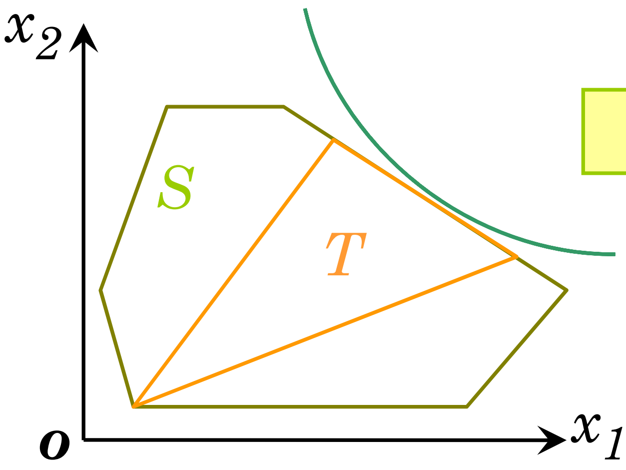
- 交渉の妥結点の満たすべき公準（partⅢ）
  - 公準6：無関連な代替案からの独立性
    - 交渉問題 $(N, S, \boldsymbol{0})$ と妥結点 $\boldsymbol{s}$ において，

      $T \subset S,\ F(S) \in T \quad \Rightarrow \quad F(S) \in F(T)$

交渉の場を $(S, \boldsymbol{c})$ から $(T, \boldsymbol{c})$ に変えても妥結点 $\boldsymbol{s}$ は変わらない

  - 公準7：全体と部分との整合性
    - 交渉問題 (N, S) の解 F について，$F(T)=t$ とする．$M \subset N$ を考え，妥結点 t の N-M 人の利得を固定し，Mのプレイヤーだけの交渉問題 (M, S) を考える．このとき，解 F によって M のプレイヤーの利得は，(N, S) でも (M, S) でも変わらない．

整合性を持たないと，プレイヤーが色々な部分集合に分かれて交渉が始まってしまう！



独立性

協力ゲームの理論

- Nash交渉解の一意性
  - Nashの定理　(1950)
    - ２人交渉問題のNash交渉解は，次の5つの公準を満たす唯一の解
      - 個人合理性（公準1），パレート最適性（公準2），利得測定法からの独立性（公準3），
      - 対称性（公準4），無関連な代替案からの独立性（公準6）
  - Rothの定理 (1977)
    - 任意の交渉問題において，Nash交渉解は次の4つの公準を満たす唯一の解
      - 強個人合理性（公準1’），
      - 利得測定法からの独立性（公準3），対称性（公準4），無関連な代替案からの独立性（公準6）
    - 任意の交渉問題において，次の3つの公準
      - 利得測定法からの独立性（公準3），対称性（公準4），無関連な代替案からの独立性（公準6）

    を満たすのはNash解か，非合意解 $F(S) = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のみ.
  - Lensbergの定理 (1985)
    - 任意の交渉問題において，Nash交渉解は次の5つの公準を満たす唯一の解
      - 個人合理性（公準1），パレート最適性（公準2），
      - 利得測定法からの独立性（公準3），無名性（公準5），全体と部分との整合性（公準7）

協力ゲームの理論

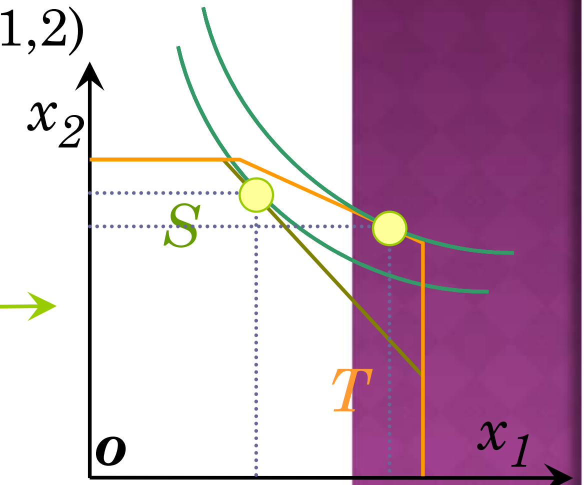
- 交渉の妥結点の満たすべき公準（partⅣ）

交渉問題の理想点：
$M(S)=(M(S)_1,M(S)_2)$
$M(S)_1$：交渉領域S内でのプレイヤーiの利得上限（最大限度額）

  - 公準8：個人単調性
    - 2つの交渉問題 $(N, S, \boldsymbol{c})$，$(N, T, \boldsymbol{c})$ において，解Fが個人単調

$\overset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $T\supset S$, かつ $M(T)_i=M(S)_i$ (i=1,2) $\Rightarrow$ $F_i(T)\geqq F_i(S)$ (i=1,2)

・公準6への批判
・Nash解は公準8を満たさないという批判



交渉領域がSからTに**拡大**したのに，Nash解ではプレイヤー2の利得が**減少**！

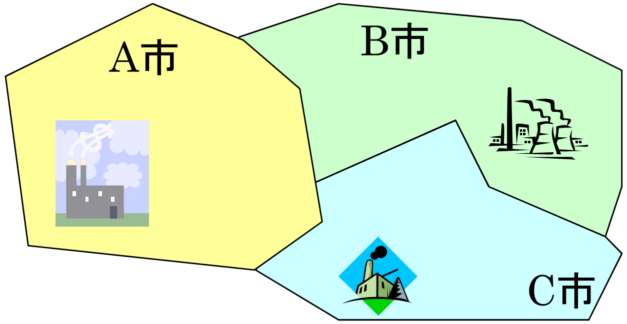
- Kalai & Smorodinsky解

交渉領域Sのパレート最適解集合と，交渉基準点cと理想点M(S)とを結ぶ直線との交点を妥結点とするルール

  - Kalai&Smorodinskyの定理(1975)
    - 任意の2人交渉問題において，Kalai&Smorodinsky解は次の5つの公準を満たす唯一の解
      - 個人合理性（公準1），パレート最適性（公準2），
      - 利得測定法からの独立性（公準3），対称性（公準4），個人単調性（公準8）

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32～）
    - 3市が各々独自に建設　…　A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設　…　A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円



例えば，A市とB市はそれぞれ独自に建設する（5億＋3億＝8億）よりも，提携して共同施設を建設（7.2億）したほうが安い．

→　0.8億円の得をするということ！

協力関係を結んだプレイヤーのグループ＝**提携**
提携が作られることによって得られる便益の値を与える関数＝**特性関数**

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 定義：提携ゲーム
    - ゲームのルール

（１）プレイヤー $N=\{1,2,\ldots,n\}$

（２） N の任意の部分集合は提携可能

（３） 譲渡可能効用が存在し，提携内で別払い可能

〔別払いのあるゲーム（games with sidepayment）〕

譲渡可能効用(transformable utility)が存在 ＝ 利得の一部をプレイヤー間で自由に譲渡でき，A→Bへ譲渡したときの，Aの損失とBの利得が等しい

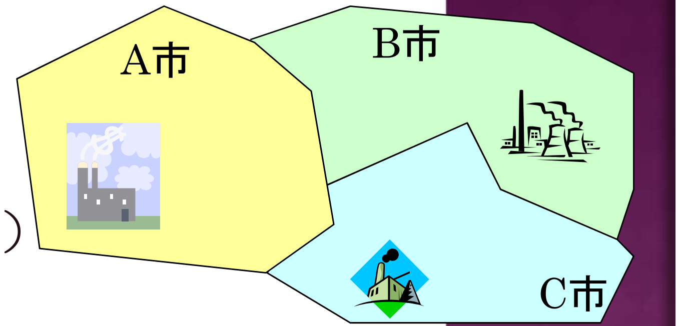
プレイヤーの間で利得を自由に譲渡可能

- 任意の提携 S にたいし，実数値を対応させる関数 $v(S)$ が存在
  - v ：特性関数（characteristic function）
  - $v(S)$ ：提携 S のもつ提携値

⇩

(N, v)：**提携形ゲーム**（coalitional game）

協力ゲームの理論



- 提携と配分
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32～）
    - 3市が各々独自に建設　…　A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設　…　A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円

プレイヤーの集合：$N = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$

実現可能な提携：$2^N = \{ \varphi, \{\mathrm{A}\}, \{\mathrm{B}\}, \{\mathrm{C}\}, \{\mathrm{A},\mathrm{B}\}, \{\mathrm{B},\mathrm{C}\}, \{\mathrm{C},\mathrm{A}\}, \{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\} \}$

特性関数：$v(\varphi) = v(\{\mathrm{A}\}) = v(\{\mathrm{B}\}) = v(\{\mathrm{C}\}) = 0$

$$v(\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}) = (5+3)-7.2 = 0.8$$
$$v(\{\mathrm{B},\mathrm{C}\}) = (3+2)-4.8 = 0.2$$
$$v(\{\mathrm{C},\mathrm{A}\}) = (2+5)-6.6 = 0.4$$
$$v(\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}) = (5+3+2)-8 = 2$$

vが優加法的(supperadditive)
⇔　<u>互いに素(S∩T=φ)</u>な任意の
提携 S, T について以下が成立
$v(S) + v(T) \leqq v(\mathrm{S} \cup \mathrm{T})$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v(\{\mathrm{A}\})+v(\{\mathrm{B}\})=0 & \leqq & 0.8=v(\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}) \\ v(\{\mathrm{B}\})+v(\{\mathrm{C}\})=0 & \leqq & 0.2=v(\{\mathrm{B},\mathrm{C}\}) \\ v(\{\mathrm{C}\})+v(\{\mathrm{A}\})=0 & \leqq & 0.4=v(\{\mathrm{C},\mathrm{A}\}) \\ v(\{\mathrm{A},\mathrm{B}\})+v(\{\mathrm{C}\})=0.8 & \leqq & 2=v(\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}) \\ v(\{\mathrm{B},\mathrm{C}\})+v(\{\mathrm{A}\})=0.2 & \leqq & 2=v(\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}) \\ v(\{\mathrm{C},\mathrm{A}\})+v(\{\mathrm{B}\})=0.4 & \leqq & 2=v(\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}) \end{array} \right\}$$

相交わらない2つの提携は，各々別個に行動するより共に行動した方が得られる便益が大きい（小さくはならない）ということ

だから提携すればよい
問題は「**配分**」をどうするかとなる

よって，このゲームのvは優加法的．だから提携し，配分を問う

協力ゲームの理論

- 提携と配分
  - 定義：配分（imputation）
    - 提携形ゲーム (N, v)
    - プレイヤー i の利得 x_i　利得ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
    - 実現可能集合 R

$$R = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i \leq v(N) \right\}$$

    - 実現可能集合の点 $\boldsymbol{x}$ が交渉領域にあるための条件

（１） **個人合理性**　$x_i \geqq v(\{i\})$

（２） **全体合理性**　$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

各プレイヤーの利得は**単独行動**で獲得可能な値**以上**

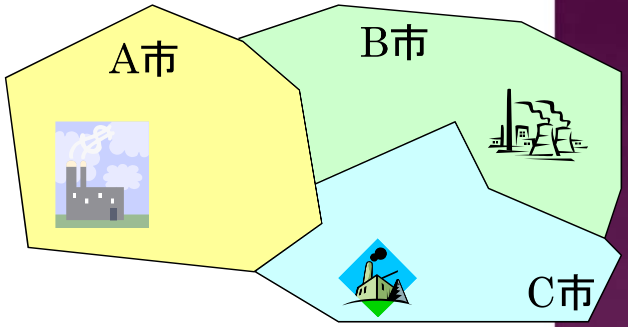
全プレイヤーの協力で得られる値 $v(N)$は，**全て配分**されねばならない

注）全体合理性を満たす利得ベクトルは実現可能領域で**パレート最適**になっている

準配分 (preimputation)
全体合理性を満たす利得ベクトル

配分 (imputation)
個人合理性と全体合理性を満たす利得ベクトル

協力ゲームの理論



- 提携と配分
  - 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
    - $N = \{\mathrm{A, B, C}\}$
    - $v(\varphi)=0,\ v(\{\mathrm{A}\})=0,\ v(\{\mathrm{B}\})=0,\ v(\{\mathrm{C}\})=0,\ v(\{\mathrm{A,B}\})=0.8,\ v(\{\mathrm{B,C}\})=0.2,\ v(\{\mathrm{C,A}\})=0.4,\ v(\{\mathrm{A,B,C}\})=2$

実現した提携の例：$\{\mathrm{A,B,C}\}$　その特性関数の値：$v(\{\mathrm{A,B,C}\}) = 2$

（1）**個人合理性** $x_i \geqq v(\{i\})$

（2）**全体合理性** $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$

・どんな配分がよい？
・どんな配分が考えられる？

配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (1, 0.5, 0.5)$

（1）個人合理性を満たしている：$x_A \geqq v(\{\mathrm{A}\})=0,\ x_B \geqq v(\{\mathrm{B}\})=0,\ x_C \geqq v(\{\mathrm{C}\})=0$

（2）全体合理性を満たしている：$x_A+x_B+x_C = 2 \ = \ 2 = v(\{\mathrm{A,B,C}\})$

配分ではない例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.6, 0.8, 0.4)$

（1）個人合理性を満たしている：$x_A \geqq v(\{\mathrm{A}\})=0,\ x_B \geqq v(\{\mathrm{B}\})=0,\ x_C \geqq v(\{\mathrm{C}\})=0$

（2）全体合理性を満たさない：$x_A+x_B+x_C = 1.8 < 2 = v(\{\mathrm{A,B,C}\})$

配分ではない例：$(x_A, x_B, x_C) = (-0.3, 1.2, 1.1)$

（1）個人合理性を満たさない：$x_A < v(\{\mathrm{A}\})=0,\ x_B \geqq v(\{\mathrm{B}\})=0,\ x_C \geqq v(\{\mathrm{C}\})=0$

（2）全体合理性を満たしている：$x_A+x_B+x_C = 2 \ = \ 2 = v(\{\mathrm{A,B,C}\})$

協力ゲームの理論

コア（core）

ゲーム (N,v) → 配分の集合 $\boldsymbol{X} = \{\ \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\ \}$ ＝ 交渉領域 $\xrightarrow{\text{交渉}}$ ある配分に到達

- 配分の支配
  - 提携 S において，配分 $\boldsymbol{x}$ が配分 $\boldsymbol{y}$ を支配する（$\boldsymbol{x}\ \mathrm{dom}_S\ \boldsymbol{y}$）とは，次の2条件が成立すること

（1）有効条件　：$\displaystyle\sum_{i\in S} x_i \le v(S)$

提携 S は $\boldsymbol{x}$ の**有効集合**（effective set）

（2）選好条件　：$x_i > y_i,\ \ (\forall i \in S)$

つまり，提携 S にとって，配分 $\boldsymbol{x}$ は S の力だけで実現可能！

提携 S にとって，配分 $\boldsymbol{y}$ を支配する配分 $\boldsymbol{x}$ が存在するとき，
「提携 S は配分 $\boldsymbol{y}$ を**拒否**する（**block**）」
or
「配分 $\boldsymbol{y}$ は提携 S にとって**改善可能**」
という

⇒ 交渉の過程で，ある提携にとって支配される配分は，その提携によって拒否され，排除される．

⇓

支配されない配分が残る

コア

協力ゲームの理論

提携合理性（個人合理性の拡張）
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i\in S} x_i \ge v(S)$

コア（core）

- ゲーム (N, v) が優加法的のとき，提携合理性を満たす配分の集合

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i\in S} x_i \ge v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

補足：Theorem
各プレイヤーのとりうる純戦略が有限な協力ゲームの特性関数は優加法的となる

- 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
  - $N = \{\mathrm{A, B, C}\}$
  - $v(\varphi)=0$, $v(\{\mathrm{A}\})=0$, $v(\{\mathrm{B}\})=0$, $v(\{\mathrm{C}\})=0$, $v(\{\mathrm{A,B}\})=0.8$, $v(\{\mathrm{B,C}\})=0.2$, $v(\{\mathrm{C,A}\})=0.4$, $v(\{\mathrm{A,B,C}\})=2$

＜**提携合理性**＞

$$\left.\text{for } S=\{\mathrm{A,B,C}\},\ x_A + x_B + x_C \geqq v(\{\mathrm{A,B,C}\}) = 2\right\}$$

配分なら全体合理性を満たすので，ここは必ず成立
（Sとして真部分集合のみ考慮すればよい）

$$\begin{aligned}
&\text{for } S=\{\mathrm{A,B}\}, && x_A + x_B && \geqq v(\{\mathrm{A,B}\}) = 0.8\\
&\text{for } S=\{\mathrm{B,C}\}, && x_B + x_C && \geqq v(\{\mathrm{B,C}\}) = 0.2\\
&\text{for } S=\{\mathrm{C,A}\}, && x_C + x_A && \geqq v(\{\mathrm{C,A}\}) = 0.4
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{for } S=\{\mathrm{A}\}, && x_A && \geqq v(\{\mathrm{A}\}) = 0\\
&\text{for } S=\{\mathrm{B}\}, && x_B && \geqq v(\{\mathrm{B}\}) = 0\\
&\text{for } S=\{\mathrm{C}\}, && x_C && \geqq v(\{\mathrm{C}\}) = 0
\end{aligned}\right\}$$

配分なら個人合理性を満たすので，ここは必ず成立

提携合理性を満たす配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.9, 0.7, 0.4)$

$x_A+x_B = 1.6 \geqq 0.8 = v(\{\mathrm{A,B}\})$,　$x_B+x_C = 1.1 \geqq 0.2 = v(\{\mathrm{B,C}\})$,　$x_C+x_A = 1.3 \geqq 0.4 = v(\{\mathrm{C,A}\})$

提携合理性を満たさない配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.4, 0.3, 1.3)$

$x_A+x_B = 0.7 < 0.8 = v(\{\mathrm{A,B}\})$,　$x_B+x_C = 1.6 \geqq 0.2 = v(\{\mathrm{B,C}\})$,　$x_C+x_A = 1.7 \geqq 0.4 = v(\{\mathrm{C,A}\})$

協力ゲームの理論

提携合理性（個人合理性の拡張）
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$

◎ コア（core）

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i\in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

- 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
  - $N = \{A, B, C\}$
  - $v(\varphi)=0$, $v(\{A\})=0$, $v(\{B\})=0$, $v(\{C\})=0$, $v(\{A,B\})=0.8$, $v(\{B,C\})=0.2$, $v(\{C,A\})=0.4$, $v(\{A,B,C\})=2$

＜提携合理性＞

for S={A,B,C}, $x_A + x_B + x_C \geqq 2 = v(\{A,B,C\})$
for S={A,B}, $x_A + x_B \geqq 0.8 = v(\{A,B\})$
for S={B,C}, $x_B + x_C \geqq 0.2 = v(\{B,C\})$
for S={C,A}, $x_A + x_C \geqq 0.4 = v(\{C,A\})$
for S={A}, $x_A \geqq 0 = v(\{A\})$
for S={B}, $x_B \geqq 0 = v(\{B\})$
for S={C}, $x_C \geqq 0 = v(\{C\})$

$v(S) - \sum_{i\in S} x_i$ 提携 S の配分 x に対する**不満**

コアとはいかなる提携に対しても不満を与えない配分の集合と言える

提携合理性を満たす配分の例：（x_A, x_B, x_C）＝（0.9, 0.7, 0.4） ⇨ いずれも不満はない

$x_A+x_B = 1.6 \geqq 0.8 = v(\{A,B\})$, $x_B+x_C = 1.1 \geqq 0.2 = v(\{B,C\})$, $x_C+x_A = 1.3 \geqq 0.4 = v(\{C,A\})$

提携合理性を満たさない配分の例：（x_A, x_B, x_C）＝（0.4, 0.3, 1.3）

$x_A+x_B = 0.7 < 0.8 = v(\{A,B\})$, $x_B+x_C = 1.6 \geqq 0.2 = v(\{B,C\})$, $x_C+x_A = 1.7 \geqq 0.4 = v(\{C,A\})$

⇨ $v(\{A,B\})$ －（x_A+x_B）=0.1←**不満（+）がある** ⇨ 提携解消（{A,B}提携のがまし）

協力ゲームの理論

◎ 3人ゲームのコア

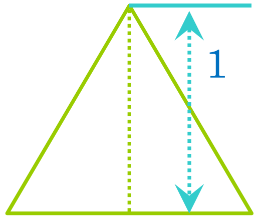
（個人合理性）
（全体合理性）

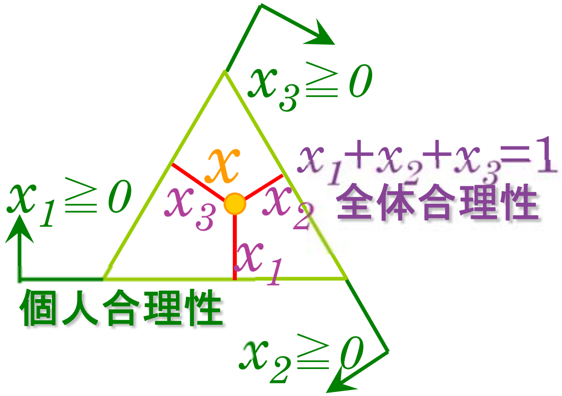
提携合理性

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

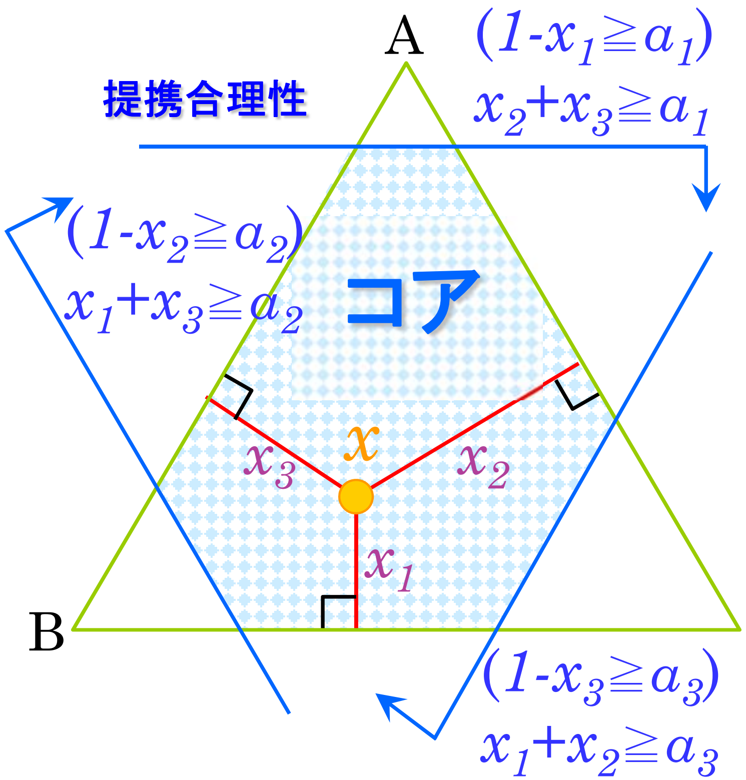
- $N = (1, 2, 3)$
- $v(\varphi) = 0,\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
  $v(\{1, 2\}) = a_3,\ v(\{2, 3\}) = a_1,\ v(\{3, 1\}) = a_2$,（ただし，$0 \leqq a_i \leqq 1,\ i=1,2,3$）
  $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
- ゲームの配分 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とすると，$\underbrace{x_i \geqq 0\ (i=1,2,3)}_{\text{個人合理性}}$, $\underbrace{x_1+x_2+x_3=1}_{\text{全体合理性}}$

高さ1の正三角形





正三角形の枠と内部の点集合をXとすると，$\boldsymbol{x} \in X$は配分を示す
（個人合理性・全体合理性を満たす）



Theorem
3人ゲーム(N, v)のコアが空でない必要十分条件は
$v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\}) \leqq 2v(\{1,2,3\})$

$$\left(\begin{array}{ll}
(\rightarrow) & x_1+x_2 \quad\ \geqq v(\{1,2\}) \\
 & \qquad x_2+x_3 \geqq v(\{2,3\}) \\
 & \underline{+)\ x_1 \qquad +x_3 \geqq v(\{3,1\})} \\
 & 2(x_1+x_2+x_3) \geqq v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\}) \\
\Leftrightarrow & 2v(\{1,2,3\}) \geqq v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\})
\end{array}\right)$$

注）ここでは，三角形の高さ1としているが，
一般には全体提携値$v(\{1,2,3\})$に設定する

協力ゲームの理論

Theorem
本質的定和n人ゲーム（N, v）のコアは空

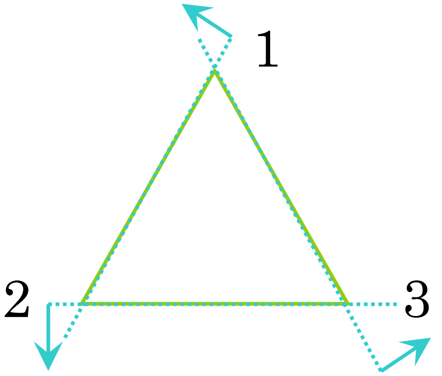
・加法的（additive）⇔ $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
・非本質的（inessential）⇔ 加法的 v を持つ協力ゲーム
・本質的（essential）⇔ そうでない協力ゲーム

演習：

- 以下の各ゲーム（全て優加法的）において，v を全て書き出し，コアを見つけよう．ただし，$v(N)=1$, $v(\varphi)=0$ とする．

（１） 3人定和ゲーム（[4] p.25 例3.2）

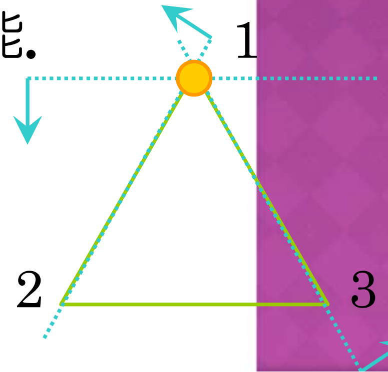
- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得．
  - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
  - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varphi) = 0$
  - → コア $C(v) = \varphi$



（２） 3人拒否権ゲーム（[4] p.26 例3.3）

- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得．
- ただし，プレイヤー1には拒否権があり，資金の獲得にはプレイヤー1の協力が必要．即ち，プレイヤー2，3だけでは資金の獲得不可能．
  - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$
  - $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varphi) = 0$
  - → コア $C(v) = \{ (1,0,0) \}$

2,3が1との提携をめぐって競争すると，1が全部を得てしまう



協力ゲームの理論

- 演習：

（３） 家購入ゲーム（[4] p.26 例3.4）

家を売りたい　　　　　家を買いたい

評価額の差が最も大きくなるように売却し，その差の和で v を計算

$N=\{1,2,3,4\}$

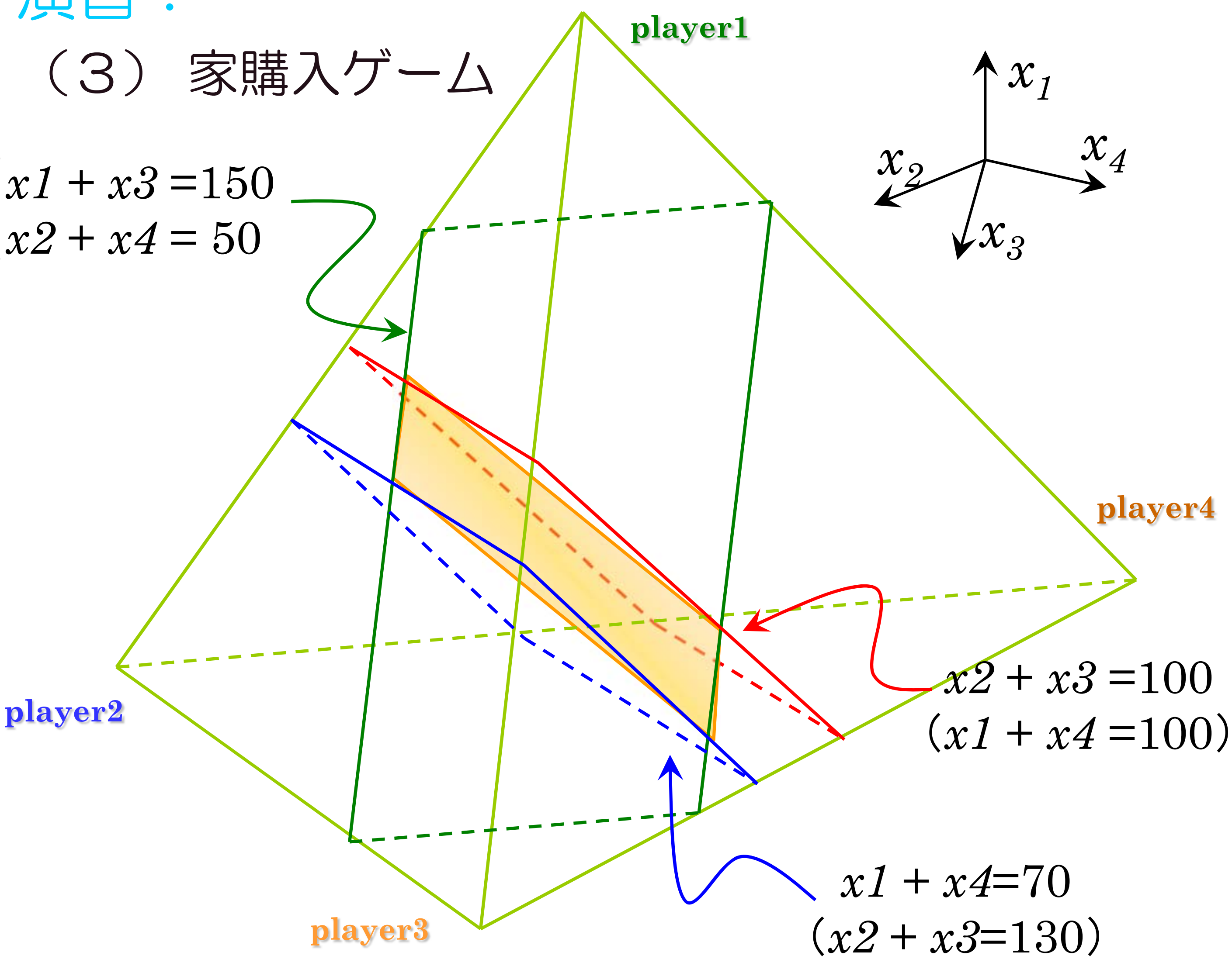
$v(\{1,2,3,4\}) = 200,$
$v(\{1,2,3\}) = 150,\ v(\{1,2,4\}) = 70,\ v(\{1,3,4\}) = 150,\ v(\{2,3,4\}) = 100,$
$v(\{1,2\}) = 0,\ v(\{1,3\}) = 150,\ v(\{1,4\}) = 70,\ v(\{2,3\}) = 100,\ v(\{2,4\}) = 50,\ v(\{3,4\}) = 0,$
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\varphi) = 0$

→ コア $C(v) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{X} \mid x1 + x3 = 150,\ x2 + x4 = 50,\ x1 + x4 \geqq 70,\ x2 + x3 \geqq 100 \,\}$

協力ゲームの理論

- 演習：

（３） 家購入ゲーム



$$\begin{cases} x1 + x3 = 150 \\ x2 + x4 = 50 \end{cases}$$

$x2 + x3 = 100$
$(x1 + x4 = 100)$

$x1 + x4 = 70$
$(x2 + x3 = 130)$

取引価格

p : $player1 \Leftrightarrow player3$
q : $player2 \Leftrightarrow player4$

とすると…

⇩

$$\begin{cases} x1 = p - 1000 \\ x2 = q - 900 \\ x3 = 1150 - p \\ x4 = 950 - q \end{cases}$$

⇩

$120 \leqq p\text{-}q \leqq 150$
$1000 \leqq p \leqq 1150$
$900 \leqq q \leqq 950$

$$C(v) = \{ \boldsymbol{x} \in X \mid \underline{x1 + x3 = 150,\ x2 + x4 = 50},\ \underline{x1 + x4 \geqq 70},\ \underline{x2 + x3 \geqq 100} \}$$

協力ゲームの理論

- **コアの存在条件**（線形計画法に基づく）
  - ゲーム (*N*, *v*) において，コアが非空となる必要十分条件

$$\exists \mathbf{x} \in X, \begin{cases} \sum_{i\in N} x_i = v(N), \\ \sum_{i\in S} x_i \ge v(S) \ \ (\phi \ne \forall S \subsetneq N) \end{cases}$$

(P)

$$\begin{array}{|l} \min . z = \sum_{i\in N} x_i \\ s.t. \sum_{i\in S} x_i \ge v(S), \ \phi \ne \forall S \subsetneq N \end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{|l} \max . \omega = \sum_{\phi\ne S\subsetneq N} \gamma_S v(S) \\ s.t. \ \sum_{\substack{i\in S \\ \phi\ne S\subsetneq N}} \gamma_S = 1 \ \ (i \in N) \\ \qquad \gamma_S \ge 0 \ \ (\phi \ne \forall S \subsetneq N) \end{array}$$

(P)，**(D)**共に実行可能で最適解
*z**，*w** を持ち，*z** = *w**.
また，『z*≦*v*(*N*) ⇔ コアが非空』

Theorem

ゲーム(*N*, *v*)において，非空なコアが存在するための必要十分条件は，双対問題**(D)**の制約を満たす非負ベクトルγ_Sに対し

$$\sum_{\phi\ne S\subsetneq N}\gamma_S v(S) \le v(N)$$

協力ゲームの理論

コアは複数存在したり，空集合だったりする．
仁は，常にただ一つの配分を与える解である．
コアが非空のときは，仁はコアに含まれる．

- 仁（**nucleolus**） （Schmeidler,1969）
  - 提携 S と 配分 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ について

$$e(S,\mathbf{x}) := v(S) - \sum_{i\in S} x_i$$

【注：コアでは $\sum_{i\in S} x_i \ge v(S)$ より不満は常に0か負】

excess

を「配分$\boldsymbol{x}$ に対して 提携S が持つ不満」という

  - 配分 $\boldsymbol{x}$ に対して，全員集合N と 空集合φを除く 2^n-2 個の提携の不満の量を大きい順に並べる．

$$\theta_1(\mathbf{x}) \ge \theta_2(\mathbf{x}) \ge \ldots \ge \theta_{2^n-2}(\mathbf{x})$$

【注：全員集合の不満$e(N,\boldsymbol{x})=0$（∵）全体合理性）
空集合の不満 $e(\varphi,\boldsymbol{x})=0$（∵）$v(\varphi)=0$） 】

  - 2つの配分 $\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{y}$ について

「$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より受容的である」とは，以下が成り立つこと

acceptable

不満の量を大きい順に比較していき，最初に異なるところで不満が小さい方が好ましい（受容的）と考える

$$\exists k \in \{1,\cdots,2^n-2\},\left\{\begin{array}{l} \theta_1(\mathbf{x}) \ge \theta_2(\mathbf{x}) \ge \ldots \ge \theta_{k-1}(\mathbf{x}) \ge \theta_k(\mathbf{x}) \ge \cdots \\ \quad \parallel \qquad\quad \parallel \qquad \cdots \qquad \parallel \qquad\quad \wedge \\ \theta_1(\mathbf{y}) \ge \theta_2(\mathbf{y}) \ge \ldots \ge \theta_{k-1}(\mathbf{y}) \ge \theta_k(\mathbf{y}) \ge \cdots \end{array}\right.$$

それよりも受容的な配分が存在しない配分を仁という

仁 ＝ 最大不満の最小化

協力ゲームの理論

- 仁
  - 提携 S と 配分 $\boldsymbol{x}$ についての不満

$$e(S,\mathbf{x}) := v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

  - 各配分$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$の不満を大きい順に並べると例えばこんな感じ

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\theta_1(\mathbf{x}) & \ge & \theta_2(\mathbf{x}) & \ge & \ldots & \ge & \theta_{k-1}(\mathbf{x}) & \ge & \theta_k(\mathbf{x}) & \ge & \cdots \\
\wedge & & & & & & & & & & \\
\theta_1(\mathbf{y}) & \ge & \theta_2(\mathbf{y}) & \ge & \ldots & \ge & \theta_{k-1}(\mathbf{y}) & \ge & \theta_k(\mathbf{y}) & \ge & \cdots \\
\| & & \wedge & & & & & & & & \\
\theta_1(\mathbf{z}) & \ge & \theta_2(\mathbf{z}) & \ge & \ldots & \ge & \theta_{k-1}(\mathbf{z}) & \ge & \theta_k(\mathbf{z}) & \ge & \cdots \\
\wedge & & & & & & & & & & \\
\theta_1(\mathbf{w}) & \ge & \theta_2(\mathbf{w}) & \ge & \ldots & \ge & \theta_{k-1}(\mathbf{w}) & \ge & \theta_k(\mathbf{w}) & \ge & \cdots \\
\| & & \| & & & & \wedge & & & & \\
\theta_1(\mathbf{u}) & \ge & \theta_2(\mathbf{u}) & \ge & \ldots & \ge & \theta_{k-1}(\mathbf{u}) & \ge & \theta_k(\mathbf{u}) & \ge & \cdots \\
\| & & \wedge & & & & & & & & \\
\theta_1(\mathbf{v}) & \ge & \theta_2(\mathbf{v}) & \ge & \ldots & \ge & \theta_{k-1}(\mathbf{v}) & \ge & \theta_k(\mathbf{v}) & \ge & \cdots
\end{array}\right.$$

$\boldsymbol{x}$ より受容的な配分はない（$\boldsymbol{x}$が仁）

$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より**受容的**

$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{z}$より**受容的**

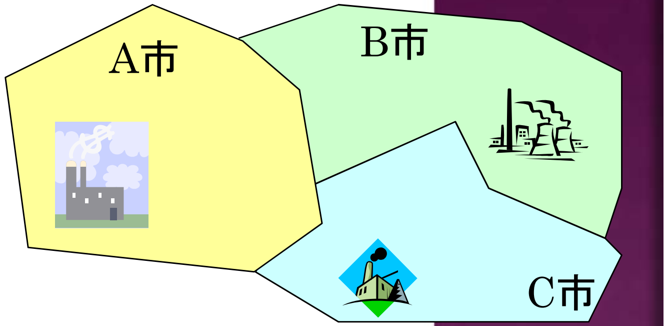
$\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{w}$ より**受容的**

$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}$ より**受容的**

$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ より**受容的**

協力ゲームの理論

費用分担問題における仁の応用
「滑走路使用料の決定」（岡田p.360参）



仁

- 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
  - $N = \{A, B, C\}$
  - $v(\varphi)=0,\ v(\{A\})=0,\ v(\{B\})=0,\ v(\{C\})=0,\ v(\{A,B\})=0.8,\ v(\{B,C\})=0.2,\ v(\{C,A\})=0.4,\ v(\{A,B,C\})=2$

不満
2^3-2=6個

$$\left\{\begin{array}{l}
e(\{A,B\},\boldsymbol{x})=v(\{A,B\})-(x_A+x_B)=0.8-(x_A+x_B) \\
e(\{B,C\},\boldsymbol{x})=v(\{B,C\})-(x_B+x_C)=0.2-(x_B+x_C) \\
e(\{C,A\},\boldsymbol{x})=v(\{C,A\})-(x_C+x_A)=0.4-(x_C+x_A) \\
e(\{A\},\boldsymbol{x})=v(\{A\})-x_A=-x_A \\
e(\{B\},\boldsymbol{x})=v(\{B\})-x_B=-x_B \\
e(\{C\},\boldsymbol{x})=v(\{C\})-x_C=-x_C
\end{array}\right\}$$

不満＼配分	(1,0.5,0.5)	(1, 1, 0)	(2, 0, 0)	(0.3,0.4,1.3)
$e(\{A,B\},\boldsymbol{x})$	−0.7	−1.2	−1.2	0.1
$e(\{B,C\},\boldsymbol{x})$	−0.8	−0.8	0.2	−1.5
$e(\{C,A\},\boldsymbol{x})$	−1.1	−0.6	−1.6	−1.2
$e(\{A\},\boldsymbol{x})$	−1.0	−1.0	−2.0	−0.3
$e(\{B\},\boldsymbol{x})$	−0.5	−1.0	0	−0.4
$e(\{C\},\boldsymbol{x})$	−0.5	0	0	−1.3

各配分の不満を大きい順に並べる

$\theta_1(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_2(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_3(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_4(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_5(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_6(\boldsymbol{x})$

$-0.5 \geqq -0.5 \geqq -0.7 \geqq -0.8 \geqq -1.0 \geqq -1.1$

$0 \geqq -0.6 \geqq -0.8 \geqq -1.0 \geqq -1.0 \geqq -1.2$

$0.2 \geqq 0 \geqq 0 \geqq -1.2 \geqq -1.6 \geqq -2.0$

$0.1 \geqq -0.3 \geqq -0.4 \geqq -1.2 \geqq -1.3 \geqq -1.5$

(1,0.5,0.5) は(1, 1, 0) より受容的
(1, 1, 0) は(2, 0, 0) より受容的
(0.3,0.4,1.3) は(2, 0, 0) より受容的　など

協力ゲームの理論

1回目LP= 最大不満が確定
2回目LP= 第2最大不満が確定
…

- 仁の求め方 LPを繰り返し解き，仁を得る

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{e}(\{A,B\},\boldsymbol{x})=v(\{A,B\})-(x_A+x_B)=0.8-(x_A+x_B)\\ \underline{e}(\{B,C\},\boldsymbol{x})=v(\{B,C\})-(x_B+x_C)=0.2-(x_B+x_C)\\ \underline{e}(\{C,A\},\boldsymbol{x})=v(\{C,A\})-(x_C+x_A)=0.4-(x_C+x_A)\\ \underline{e}(\{A\},\boldsymbol{x})=v(\{A\})-x_A=-x_A\\ \underline{e}(\{B\},\boldsymbol{x})=v(\{B\})-x_B=-x_B\\ \underline{e}(\{C\},\boldsymbol{x})=v(\{C\})-x_C=-x_C\end{array}\right\}$$

ただし，全体合理性
$x_A+x_B+x_C=2$（$=v(N)$）
も満たす必要がある

※最初のLP制約7本は変形し
[4, 2&7] → $-\varepsilon \leqq x_A \leqq \varepsilon+1.8$
[5, 3&7] → $-\varepsilon \leqq x_B \leqq \varepsilon+1.6$
[6, 1&7] → $-\varepsilon \leqq x_C \leqq \varepsilon+1.2$
ともかける．第1LPの最適値
ε*=−0.6を代入すると
$0.6 \leqq x_A \leqq 1.2$
$0.6 \leqq x_B \leqq 1.0$
$0.6 \leqq x_C \leqq 0.6$ （→ x_C=0.6）
第2LP最適値ε*=−0.7代入で
$0.7 \leqq x_A \leqq 1.1$
$0.7 \leqq x_B \leqq 0.9$

<u>**最小コア**を求めるLP</u>

最大不満最小化

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & \varepsilon\\ \text{s.t.} & 0.8-(x_A+x_B)\le\varepsilon\\ & 0.2-(x_B+x_C)\le\varepsilon\\ & 0.4-(x_C+x_A)\le\varepsilon\\ & -x_A\le\varepsilon\\ & -x_B\le\varepsilon\\ & -x_C\le\varepsilon\\ & x_A+x_B+x_C=2\end{array}$$

→ 最適値：ε*=−0.6
最適解：(x_A,x_B,x_C)=(0.8,0.6,0.6)

不満がε*=−0.6に一致する提携 S を除く
$e(\{A,B\},\boldsymbol{x})=e(\{C\},\boldsymbol{x})$=−0.6 より，
$\theta_1(\boldsymbol{x})$ ($=\theta_2(\boldsymbol{x})$=−0.6) が確定し，
提携{A,B}と{C}の式を除く（→ x_C=0.6）

→ **第2最大不満最小化**

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & \varepsilon\\ \text{s.t.} & \cancel{0.8-(x_A+x_B)\le\varepsilon}\\ & 0.2-(x_B+\overset{\mathbf{0.6}}{x_C})\le\varepsilon\\ & 0.4-(\overset{\mathbf{0.6}}{x_C}+x_A)\le\varepsilon\\ & -x_A\le\varepsilon\\ & -x_B\le\varepsilon\\ & \cancel{-x_C\le\varepsilon}\\ & x_A+x_B+\overset{\mathbf{0.6}}{x_C}=2\end{array}$$

→ 最適値：ε*=−0.7
最適解：(x_A,x_B)=(0.7,0.7)

不満がε*=−0.7に一致する提携 S を除く
即ち，$e(\{A\},\boldsymbol{x})=e(\{B\},\boldsymbol{x})$=−0.7 より，
$\theta_3(\boldsymbol{x})$ ($=\theta_4(\boldsymbol{x})$=−0.7) が確定し，
提携{A}と{B}の式を除く（→ $x_A=x_B$=0.7）

→ 唯一配分の**仁**は
$(x_A,x_B,x_C)=(0.7,0.7,0.6)$

※このとき，
$\theta_5(\boldsymbol{x})$=−0.9, $\theta_6(\boldsymbol{x})$=−1.1
不満はすべて負で，仁がコアにあることが確認できる

協力ゲームの理論

シャープレイ値も仁と同様，唯一の解を与える
コア・仁が「不満」をもとにしているのに対し，シャプレー値は「貢献度」をもとにした解
コアに含まれるとは限らない

シャプレー値（Shapley value）

- 提携に対するプレイヤーの貢献度をもとにした解
- プレイヤーが1人ずつ加わり全員提携を作る順列を考える
- プレイヤーが加わることにより新たに獲得できる量を**貢献度**とする

全員提携の順列が{1,2,…,i-1,i,…}のとき，

i番目に加わるプレイヤーの貢献度 ＝ $v(\{1,2,\ldots,i\text{-}1,i\})-v(\{1,2,\ldots,i\text{-}1\})$

- **シャプレー値**とは，n!個の全順列が当確率で起こるときの，プレイヤーの貢献度の期待値
  - プレイヤー i のシャプレー値

プレイヤー i を含む提携 S を固定したとき，
提携 S-{i} のメンバー数＝|S|-1
N/S のプレイヤー数＝n-|S|
より，提携 S-{i} +{i}+N/Sの順列の総数は(|S|-1)!(n-|S|)!通り.
故に i が最後に参加して提携 S となる確率が(|S|-1)!(n-|S|)!/n!

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{S\subseteq N,\ S\ni i} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S)-v(S-\{i\}))$$

$$\underbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \cdots\bigcirc}_{\text{S-1}}\ i\ \underbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \cdots\bigcirc}_{n\text{-}|\text{S}|}$$

$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n)$$

- 補足：シャプレー値は4つの公準を満たす唯一の解である
- 補足：vが優加法的なら個人合理性も満たし配分となる

公準1：全体合理性
公準2：ナルプレイヤーの零評価
公準3：対称性
公準4：加法性

協力ゲームの理論

$v(\varphi) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$
$v(\{A,B\}) = (5+3)-7.2 = 0.8$
$v(\{B,C\}) = (3+2)-4.8 = 0.2$
$v(\{C,A\}) = (2+5)-6.6 = 0.4$
$v(\{A,B,C\}) = (5+3+2)-8 = 2$

- シャプレー値
  - 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
    - $N = \{A, B, C\}$
    - $v(\varphi)=0$, $v(\{A\})=0$, $v(\{B\})=0$, $v(\{C\})=0$, $v(\{A,B\})=0.8$, $v(\{B,C\})=0.2$, $v(\{C,A\})=0.4$, $v(\{A,B,C\})=2$

6

全体提携の順列	貢献度		
	A	B	C
A←B←C	0.0	0.8	1.2
A←C←B	0.0	1.6	0.4
B←A←C	0.8	0.0	1.2
B←C←A	1.8	0.0	0.2
C←A←B	0.4	1.6	0.0
C←B←A	1.8	2.0	0.0
合計	4.8	4.2	3.0

各プレイヤーのシャプレー値
（各順列の出現率が同等として
各プレイヤーの貢献度の期待値）

$$\begin{cases} \phi_A = 4.8/6 = 0.8 \\ \phi_B = 4.2/6 = 0.7 \\ \phi_C = 3.0/6 = 0.5 \end{cases}$$

シャプレー値による唯一の配分

$$(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$$

この例では，（たまたま）シャプレー値がコアに含まれるが，シャプレー値は常にコアに含まれるとは限らない

協力ゲームの理論

- 演習
  - 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
    - N = {A, B, C}
    - $v(\varphi)=0,\ v(\{A\})=0,\ v(\{B\})=0,\ v(\{C\})=0,\ v(\{A,B\})=0.8,\ v(\{B,C\})=0.2,\ v(\{C,A\})=0.4,\ v(\{A,B,C\})=2$
    - 個人合理性：$x_A \geqq 0,\ x_B \geqq 0,\ x_C \geqq 0$
    - 全体合理性：$x_A + x_B + x_C = 2$
    - 提携合理性：$x_A + x_B \geqq 0.8,\ x_B + x_C \geqq 0.2,\ x_C + x_A \geqq 0.4$
    - 仁による配分 ：$(x_A, x_B, x_C) = (0.7, 0.7, 0.6)$
    - シャプレー値による配分：$(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$

準配分

配分

コア

  - シャプレー値による配分の不満を計算し，仁による配分の不満と比較しよう

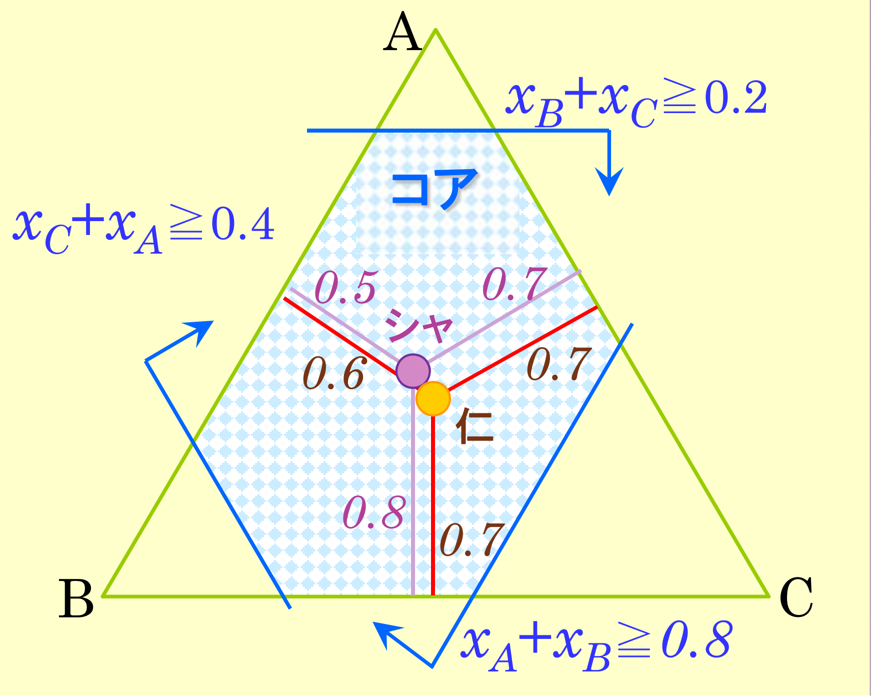
$$\theta_1(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_2(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_3(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_4(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_5(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_6(\boldsymbol{x})$$

$$-0.5 \geqq -0.7 \geqq -0.7 \geqq -0.8 \geqq -0.9 \geqq -1.0 \quad \ldots \text{シャ}$$

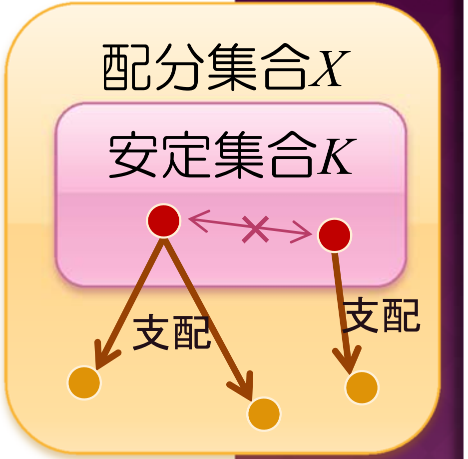
$$-0.6 \geqq -0.6 \geqq -0.7 \geqq -0.7 \geqq -0.9 \geqq -1.1 \quad \ldots \text{仁}$$

  - コア，仁，シャプレー値を図示しよう

高さ2（$=v(\{A,B,C\})$）の正三角形



協力ゲームの理論



安定集合（stable set） 〔von Neumann-Morgenstren解〕

- コア = 他の配分に支配されない配分の集合
- 安定集合 = 他の配分を支配する配分の集合
  - 配分集合K∈Xが安定集合とは，次の1,2が成り立つこと
    1. 内部安定性（internal stability） $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}$ は互いに支配関係にない
    2. 外部安定性（external stability）$\forall \mathbf{z} \in X-K, \exists \mathbf{x} \in K,$ $\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ を支配

- Dom $\boldsymbol{x}$:= { $\boldsymbol{y}$ | $\boldsymbol{y}$∈X, $\boldsymbol{x}$ dom $\boldsymbol{y}$ } ：配分 $\boldsymbol{x}$ に支配される配分の集合
- Dom A := ∪Dom $\boldsymbol{x}$ ：集合Aの配分に支配される配分の集合
  - 内部安定性 ⇔ K ∩ Dom K = φ
  - 外部安定性 ⇔ K ∪ Dom K = A
  - 安定集合 ⇔ K = A − Dom K を満たす集合 K⊂A

Theorem

ゲーム（N, v）のコアC および安定集合 K が共に非空ならば

$$C \subset K$$

協力ゲームの理論

$\boldsymbol{x}$ dom$_S$ $\boldsymbol{y}$
（$\boldsymbol{x}$がSを通して$\boldsymbol{y}$を支配）

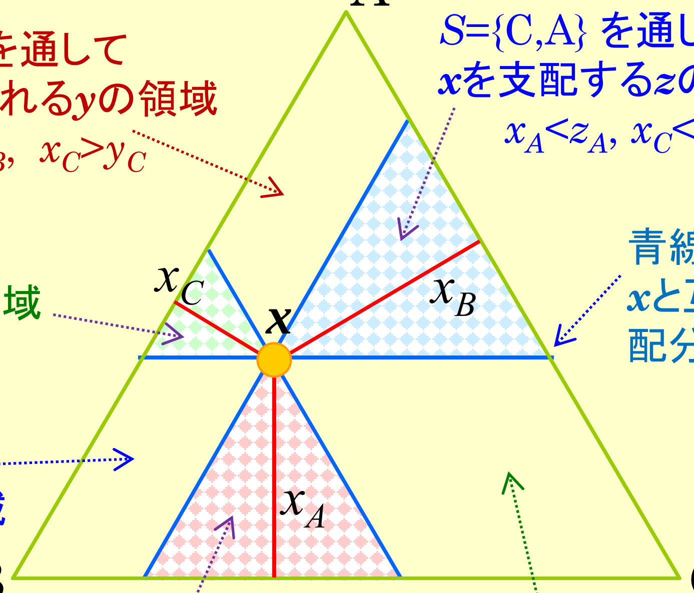
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i\in S} x_i \le v(S) & \text{（有効条件）} \\ x_i > y_i (\forall i \in S) & \text{（選好条件）} \end{cases}$$

安定集合

- 3人ゲーム(N, v)

＊高さ1（$=v(\{A,B,C\})$）の正三角形

ある配分$\boldsymbol{x}$について**選好条件**



S={B,C} を通して
$\boldsymbol{x}$に支配される$\boldsymbol{y}$の領域
$x_B>y_B$, $x_C>y_C$

S={C,A} を通して
$\boldsymbol{x}$を支配する$\boldsymbol{z}$の領域
$x_A<z_A$, $x_C<z_C$

S={A,B} を通して
$\boldsymbol{x}$を支配する$\boldsymbol{z}$の領域
$x_A<z_A$, $x_B<z_B$

青線上は全て
$\boldsymbol{x}$と互いに支配関係にない
配分の領域

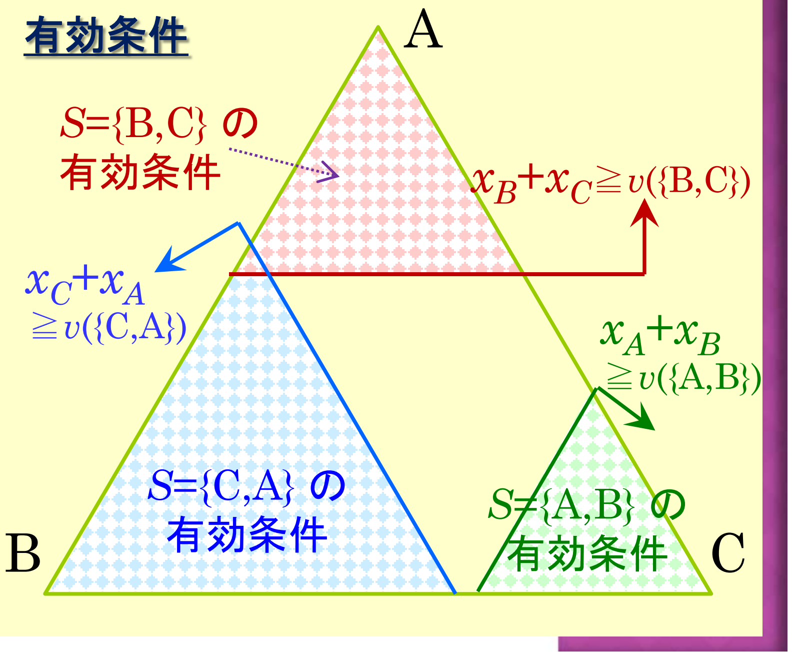
S={C,A} を通して
$\boldsymbol{x}$に支配される$\boldsymbol{y}$の領域
$x_A>y_A$, $x_C>y_C$

S={B,C} を通して
$\boldsymbol{x}$を支配する$\boldsymbol{z}$の領域
$x_B<z_B$, $x_C<z_C$

S={A,B} を通して
$\boldsymbol{x}$に支配される$\boldsymbol{y}$の領域
$x_A>y_A$, $x_B>y_B$

$\boldsymbol{x}$ dom$_S$ $\boldsymbol{y}$ とは，
（有効条件）
S={A,B} → $x_A + x_B \leqq v(\{A,B\})$
S={B,C} → $x_B + x_C \leqq v(\{B,C\})$
S={C,A} → $x_C + x_A \leqq v(\{C,A\})$
（選好条件）
S={A,B} → $x_A>y_A$, $x_B>y_B$
S={B,C} → $x_B>y_B$, $x_C>y_C$
S={C,A} → $x_A>y_A$, $x_C>y_C$

有効条件



S={B,C} の
有効条件

$x_B+x_C \geqq v(\{B,C\})$

x_C+x_A
$\geqq v(\{C,A\})$

x_A+x_B
$\geqq v(\{A,B\})$

S={C,A} の
有効条件

S={A,B} の
有効条件

- ➢ 安定集合内の任意の配分$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$は互いに支配関係にない
→ 2点は三角形の3辺と平行な線上にある

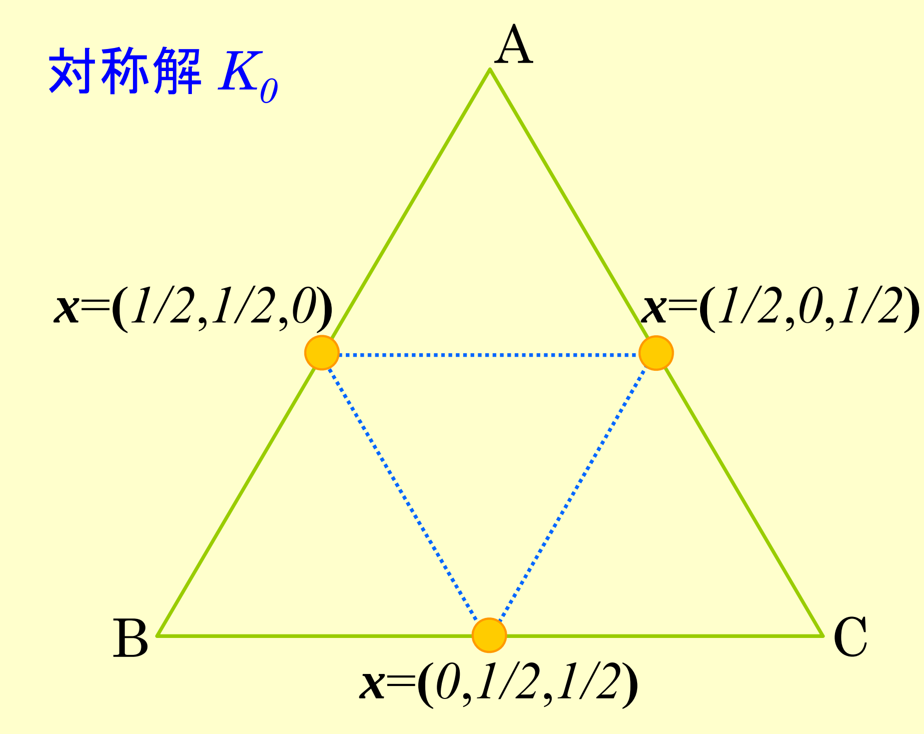
協力ゲームの理論

- 安定集合
  - 例題：定和3人ゲーム(N, v)
    - $v(\varphi)=v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0$,
    - $v(\{A,B\})=v(\{B,C\})=v(\{C,A\})=1$,
    - $v(\{A,B,C\})=1$

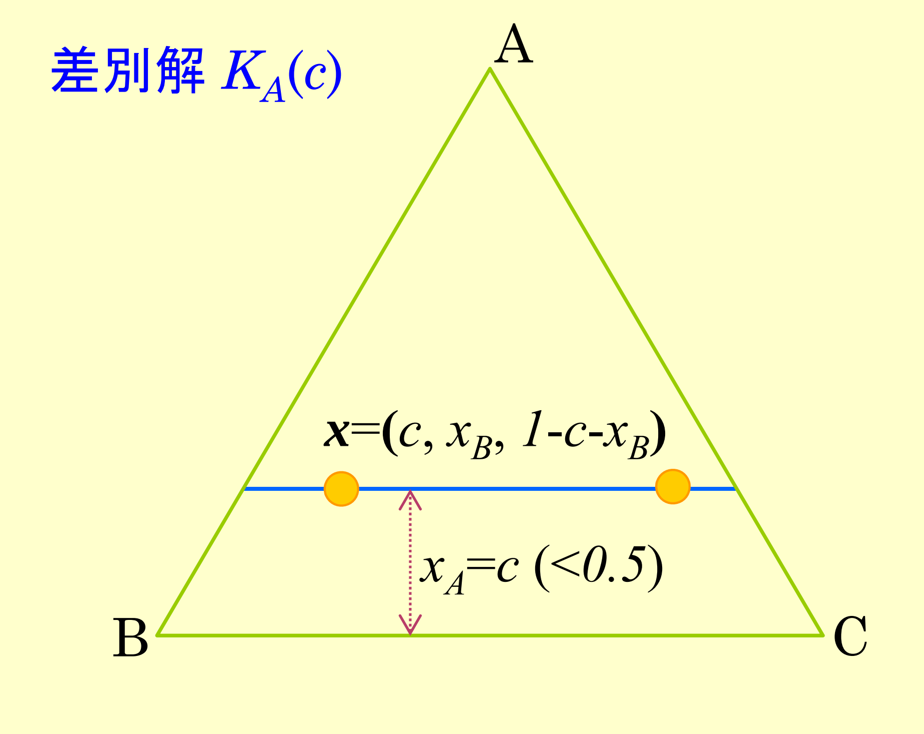
※) {A,B} が有効集合となるのは，正三角形全領域．{B,C}, {C,A} も同様

安定集合

- ✓ 対称解 K_0 ＝右上図の3点
- ✓ 差別解 K_A (c)＝右下図青線全て（青線は$0 \leqq c < 0.5$で動く）
- ✓ 差別解 K_B (c)＝同様
- ✓ 差別解 K_C (c)＝同様



対称解 K_0



差別解 $K_A(c)$

協力ゲームの理論

演習

- 3人提携ゲーム（N, v）を考える
  - プレイヤー
    - $N = \{A, B, C\}$
  - 特性関数
    - $v(\varphi)=v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0,$
    - $v(\{A,B\})=0.8,\ v(\{B,C\})=0.7,\ v(\{C,A\})=0.4,$
    - $v(\{A,B,C\})=1$

1. vが優加法的であることを確認せよ
2. コアを図示せよ
3. 仁を求め，図に示せ
4. シャプレー値を求め，図に示せ
5. 仁とシャプレー値の不満を計算・比較せよ

Excel参照

投票ゲーム

投票ゲーム

- n人のプレイヤー（N={1,2,…,n}）による投票で何らかの決定がなされるシステムを考える.
  - Nの部分集合 ＝ **提携**（coalition）
    - **勝利提携**（winning coalition）$\boldsymbol{W}$
    - **敗北提携**（losing coalition） $\boldsymbol{L}$

→ **(N, W)：投票ゲーム**（voting game）

ただし，以下の性質を持つ

（１） $N \in \boldsymbol{W}$,　$\varphi \in \boldsymbol{L}$

（２） $S \in \boldsymbol{W}$ かつ $S \subseteq T \rightarrow T \in \boldsymbol{W}$

（３） $S \in \boldsymbol{W} \rightarrow N - S \in \boldsymbol{L}$

全員提携は勝利提携，空集合は敗北提携

勝利提携を含む提携は勝利提携

勝利提携の補集合は敗北提携

- 例：3つの政党 N={A,B,C} の議員で構成されている議会 定数21，各党議席数(10,10,1)．過半数で議案可決.
  - 勝利提携 $\boldsymbol{W}$ = { {A, B, C}, {A, B}, {B, C}, {C, A} }
  - 敗北提携 $\boldsymbol{L}$ = { {A}, {B}, {C}, φ }

各党 N={1,2,3} の **影響力（投票力指数）** はどの程度か？

投票ゲーム

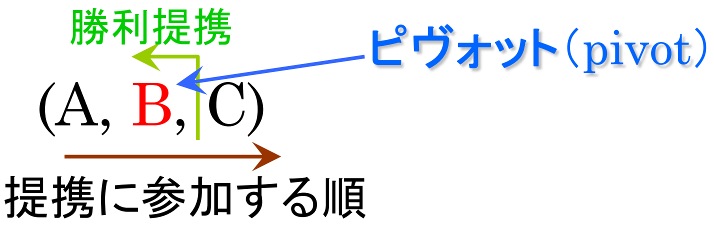
- 投票力指数が満たすべき性質
  - [8] p.45～　公理1～4　など

- 投票力指数
  - シャプレー・シュービック指数（Shapley-Shubik index） (1954)
  - バンザフ指数（Banzhaf index） (1965)
  - ディーガン・パックル指数（Deegan-Packel index） (1978)
  - ……

投票ゲーム

協力ゲームの解の1つシャープレイ値を，投票者の影響力の評価に適用したもの.

- 投票力指数
  - シャプレー・シュービック指数（SS指数）
    - 例)3政党 N={A,B,C}, 議席数=(10,8,2),議会定数20,過半数11で法案成立
      - 勝利提携 $\boldsymbol{W} = \{ \{A, B, C\}, \{A, B\}, \{C, A\} \}$



勝利提携

ピヴォット（pivot）

(A, B, C)

提携に参加する順

全ての順列

(A, C, B),
(B, A, C),
(B, C, A),
(C, A, B),
(C, B, A)

AのSS指数：$\varphi_A = 4/6 = 2/3$
BのSS指数：$\varphi_B = 1/6$
CのSS指数：$\varphi_C = 1/6$

全ての順列の生起確率が等しいと仮定したときの，各投票者のピヴォットとなる回数の期待値

SS指数：φ

$$\varphi = (\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C) = (2/3, 1/6, 1/6)$$

投票ゲーム

全ての投票者が賛成・反対を表明しているとき，自らの投票態度を変更することによって結果を変えることの出来る投票者（スウィング）となる回数の期待値

- 投票力指数
  - バンザフ指数（絶対Bz指数）
    - 例)3政党 N={A,B,C}, 議席数=(10,8,2),議会定数20,過半数11で法案成立
      - 勝利提携 $\boldsymbol{W}$ = { {A, B, C}, {A, B}, {C, A} }
      - AのBz指数を求める時，2政党集合{B,C}の全ての部分集合を考える

{B,C}, {B}, {C}, ∅

敗北提携 (∅ ,A) 敗北提携
敗北提携 (B + ,A) 勝利提携
敗北提携 (C ,A) 勝利提携
敗北提携 (B, C ,A) 勝利提携

スウィング
（swing）

⇨ Aの絶対Bz指数：3/4

- Bの指数を求める場合

敗北提携 (∅ ,B) 敗北提携
敗北提携 (A + ,B) 勝利提携
敗北提携 (C ,B) 敗北提携
勝利提携 (A, C ,B) 勝利提携

⇨ Bの絶対Bz指数：1/4

⇨ 絶対Bz指数: $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(3/4,1/4,1/4)$

正規Bz指数: $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\hat{\beta}_A,\hat{\beta}_B,\hat{\beta}_C)=(3/5,1/5,1/5)$←合計が1になるよう正規化

投票ゲーム

注）**極小勝利提携**とは，勝利提携のうち，1人でも抜けると敗北提携になってしまう提携

- 投票力指数
  - ディーガン・パックル指数（DP指数）
    - 投票者は「**極小勝利提携W^m**」に属すとき，影響力を持つと考える
    - 極小勝利提携に属す投票者の影響力は全て同じとする
    - 投票者 i のDP指数は $\gamma_i = \dfrac{1}{|W^m|}\displaystyle\sum_{S\in W^m, S\ni i}\frac{1}{|S|}$

各極小勝利提携の生起確率が同じと仮定したときの，各投票者の影響力の割合

- 例)3政党 N={A,B,C}, 議席数=(10,8,2),議会定数20,過半数11で法案成立
  - 勝利提携 $\boldsymbol{W}$ = { {A, B, C}, {A, B}, {C, A} }
  - 極小勝利提携 $\boldsymbol{W}^m$ = { {A,B}, {C,A} }, ｜$\boldsymbol{W}^m$｜ = 2

$$\begin{array}{llll} & A & B & C \\ \{A,B\} \rightarrow & (1/2, & 1/2, & 0) \\ \{C,A\} \rightarrow & (1/2, & 0, & 1/2) \end{array}$$

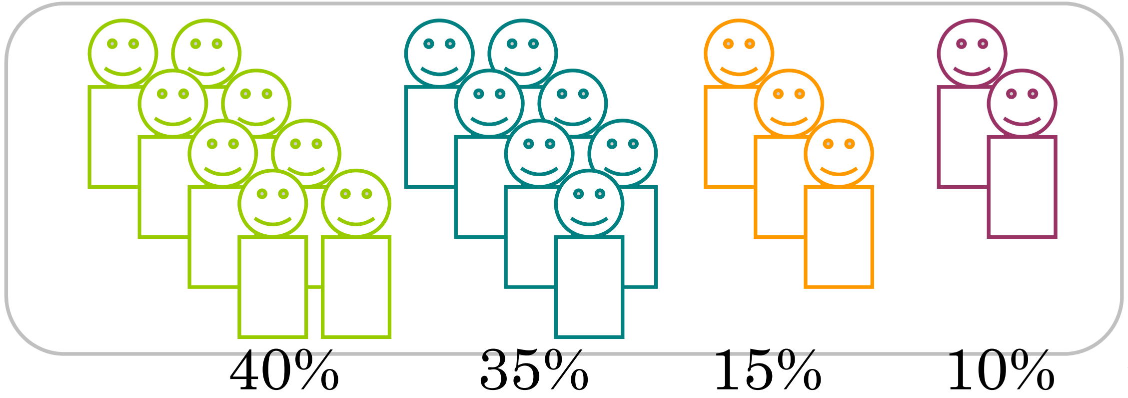
⇒

政党Aについての和：1/2+1/2 = 1
政党Bについての和：1/2+ 0 =1/2
政党Cについての和： 0 +1/2 =1/2

⇒ DP指数 : $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C) = (1/2, 1/4, 1/4)$ ←合計が1になるよう正規化

投票ゲーム

- 投票力指数の意味
  - 例：定数20の議会，4政党所属議員で構成．過半数で議案可決．

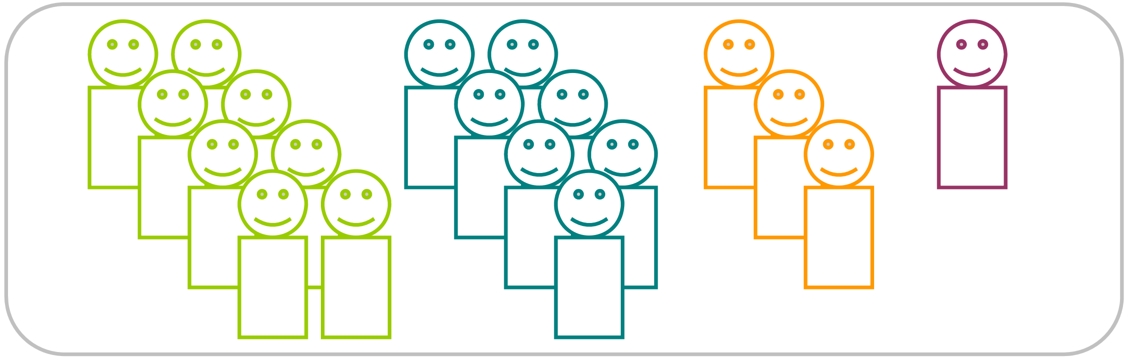


この比率が各党の力(議会発言力)なのか？

構成比率

SS指数
Bz指数
DP指数

– 例:定数が19に変化し，議席数が(8,7,3,1)となった．



投票ゲーム

- 演習：
  - 以下の各投票ゲームにおけるSS指数， Bz指数，DP指数を計算しよう

（１） 3人のプレイヤー $N=\{1,2,3\}$ による単純多数決ゲームを考える．ただし，プレイヤー1には拒否権がある．

（２） 4つの政党がそれぞれ議席数（40, 30, 10, 5）を占めている議会において，2/3以上の賛成で議案を通すことが出来る．

（３） β社の株を5人の人が所有しており，その比率は（30%, 25%, 25%, 15%, 5%） である．株主総会において，過半数の意見が通るとする．

投票力指数の説明と投票力指数を計算する，松井先生のWebサイト

参考文献

[1] 鈴木光男 「ゲーム理論入門」 共立出版（1981, 2003（新装版））

[2] 鈴木光男 「新ゲーム理論」 勁草書房（1994）

[3] 岡田章 「ゲーム理論」 有斐閣（1996, 2011 （新版））

[4] 鈴木光男・武藤滋男 「協力ゲームの理論」 東京大学出版会(1985)

[5] 中山幹夫・舟木由喜彦・武藤滋男 「ゲーム理論で解く」 有斐閣ブックス(2000)

[6] 舟木由喜彦 「エコノミックゲームセオリー」 サイエンス社(2001)

[7] 武藤滋男・小野理恵 「投票システムのゲーム分析」 日科技連(1998)

[8] 森雅夫・松井知己 「オペレーションズ・リサーチ」 朝倉書店(2004)

[9] 松井知己 『投票力指数を計算する』 http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/voting/voting.html

[10] 毛利裕昭・岡本吉央 「離散最適化と協力ゲーム（１）（２）」 オペレーションズ・リサーチ(2003)Vol.48,no.1,2