

# 問題解決技法入門

## 7. 動的計画法

文教大学  
堀田 敬介

# 切符購入問題

問)「東京－新神戸」間で新幹線を使う。下表は普通車自由席(一部指定席)回数券(6枚綴り)の値段である。素直に購入すれば ¥84,900 である。いくつか分割して購入すると安くなるだろうか？

分割例1) 東京－名古屋－新神戸 ¥62,160 + ¥42,660 = ¥104,820

分割例2) 東京－静岡－新大阪－新神戸  
¥32,340 + ¥56,940 + ¥8,520 = ¥97,800

| 駅名   | 新幹線回数券(普通車自由席/指定席用)6枚綴り |         |         |         |        |         | データ出典: 2014年JR東海Webサイト「お得なきっぷ」より(2015.2.3) |         |         |         |         |         |         |         |         |        |      |
|------|-------------------------|---------|---------|---------|--------|---------|--------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|------|
| 東京   | ¥84,900                 | ¥82,140 | ¥78,420 | ¥65,340 | —      | ¥62,160 | ¥53,760                                    | ¥46,560 | ¥42,720 | ¥40,800 | ¥32,340 | ¥27,840 | ¥21,960 | ¥19,980 | ¥16,500 | ¥7,740 | 東京   |
| 新横浜  | ¥82,980                 | ¥79,740 | ¥74,580 | ¥62,760 | —      | ¥58,260 | —                                          | ¥44,700 | ¥40,800 | ¥38,820 | ¥27,840 | ¥24,600 | ¥17,700 | ¥15,360 | ¥10,980 | —      | 新横浜  |
| 小田原  | —                       | ¥66,720 | ¥63,420 | —       | —      | ¥46,560 | —                                          | ¥38,820 | ¥30,360 | ¥27,840 | ¥17,700 | ¥14,340 | ¥10,380 | —       | —       | —      | 小田原  |
| 熱海   | —                       | ¥65,340 | —       | —       | —      | ¥44,700 | —                                          | —       | —       | —       | ¥15,360 | —       | —       | —       | —       | —      | 熱海   |
| 三島   | ¥66,720                 | ¥63,420 | ¥58,260 | —       | —      | ¥42,720 | —                                          | ¥30,360 | —       | —       | ¥10,980 | —       | —       | —       | —       | —      | 三島   |
| 新富士  | —                       | ¥62,760 | ¥56,940 | —       | —      | ¥38,820 | —                                          | —       | —       | —       | ¥7,740  | —       | —       | —       | —       | —      | 新富士  |
| 静岡   | ¥62,760                 | ¥56,940 | ¥53,760 | —       | —      | ¥32,340 | —                                          | —       | ¥12,300 | ¥9,660  | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 静岡   |
| 掛川   | —                       | ¥53,760 | ¥46,560 | —       | —      | ¥25,860 | —                                          | —       | ¥7,740  | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 掛川   |
| 浜松   | ¥53,760                 | ¥46,560 | ¥42,720 | ¥32,340 | —      | ¥24,600 | ¥15,600                                    | ¥8,400  | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 浜松   |
| 豊橋   | —                       | ¥44,700 | ¥38,820 | —       | —      | ¥12,300 | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 豊橋   |
| 三河安城 | —                       | ¥40,800 | ¥30,360 | —       | —      | ¥7,020  | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 三河安城 |
| 名古屋  | ¥42,660                 | ¥33,960 | ¥30,420 | ¥15,360 | ¥8,040 | —       | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 名古屋  |
| 岐阜羽島 | ¥32,340                 | ¥27,840 | ¥24,600 | ¥9,660  | —      | —       | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 岐阜羽島 |
| 米原   | —                       | ¥24,600 | ¥11,640 | —       | —      | —       | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 米原   |
| 京都   | ¥13,920                 | ¥8,040  | —       | —       | —      | —       | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 京都   |
| 新大阪  | ¥8,520                  | —       | —       | —       | —      | —       | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 新大阪  |
| 新神戸  | —                       | —       | —       | —       | —      | —       | —                                          | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 新神戸  |

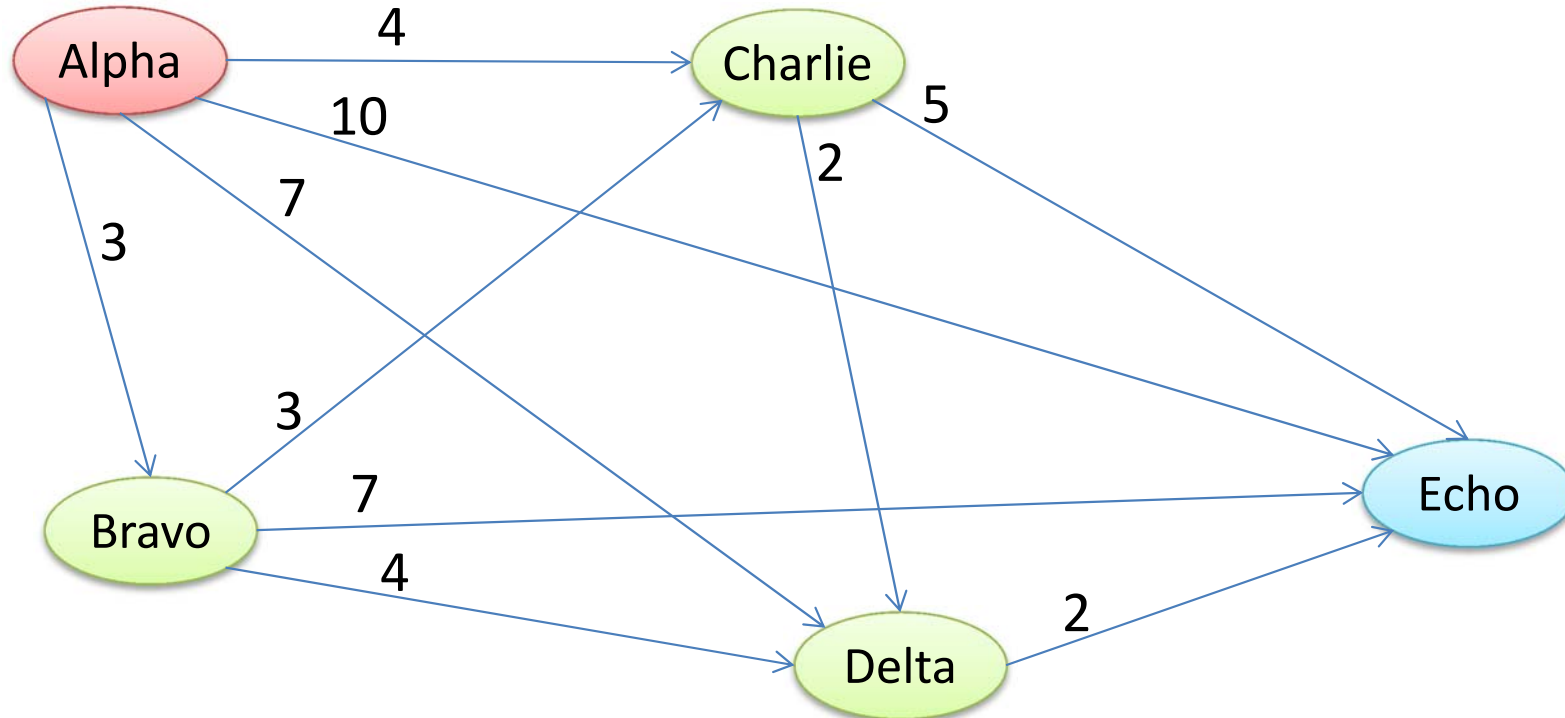
※東京－新横浜以外は、東京＝【東京(山手線内)】or【東京(都区内)】  
 ※新横浜－小田原～三島以外は、新横浜＝【新横浜(市内)】  
 ※東京－新横浜間にある品川＝【東京(山手線内)】

＝ のぞみ停車駅

※背景緑色は指定席回数券(自由席回数券の設定はない)  
 ※指定席券を自由席で使うことにする

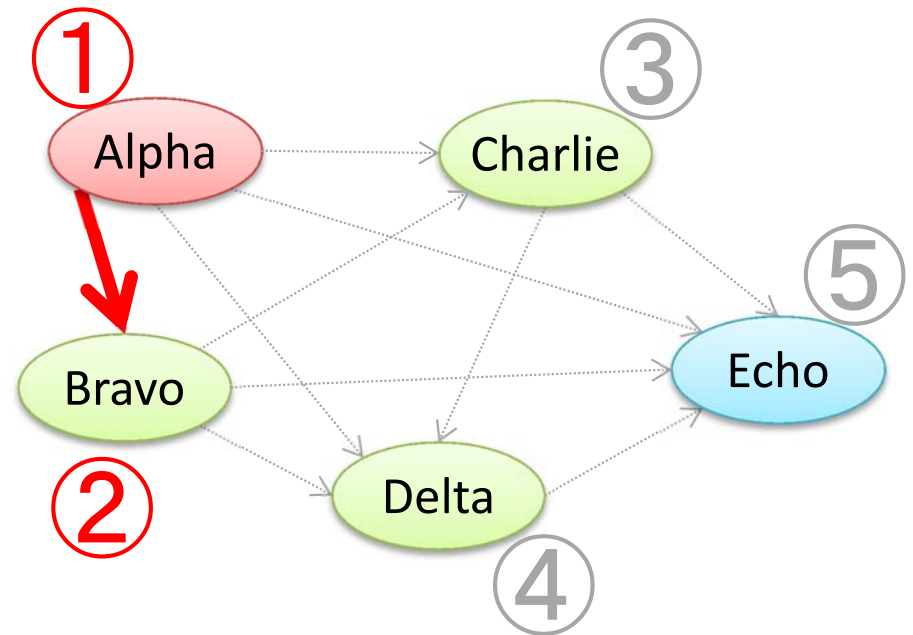
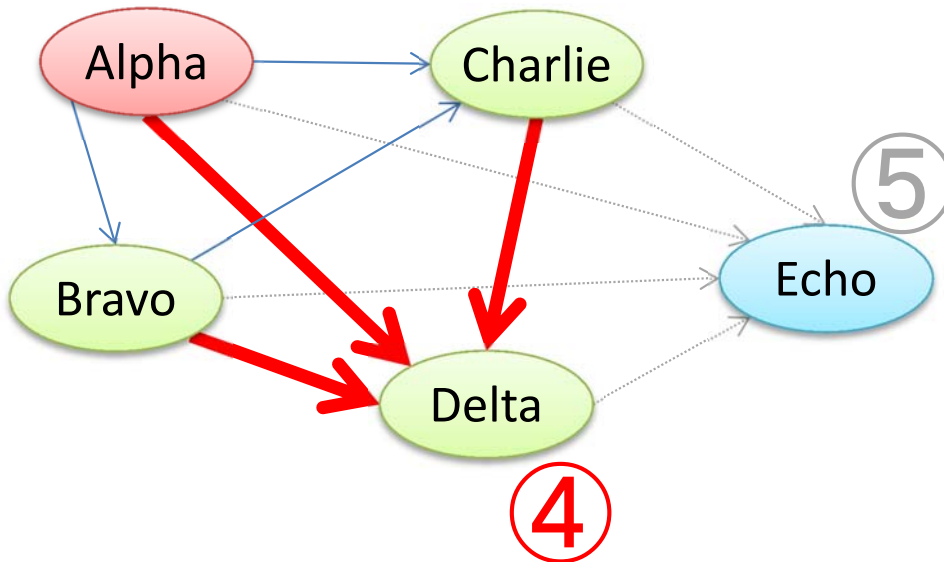
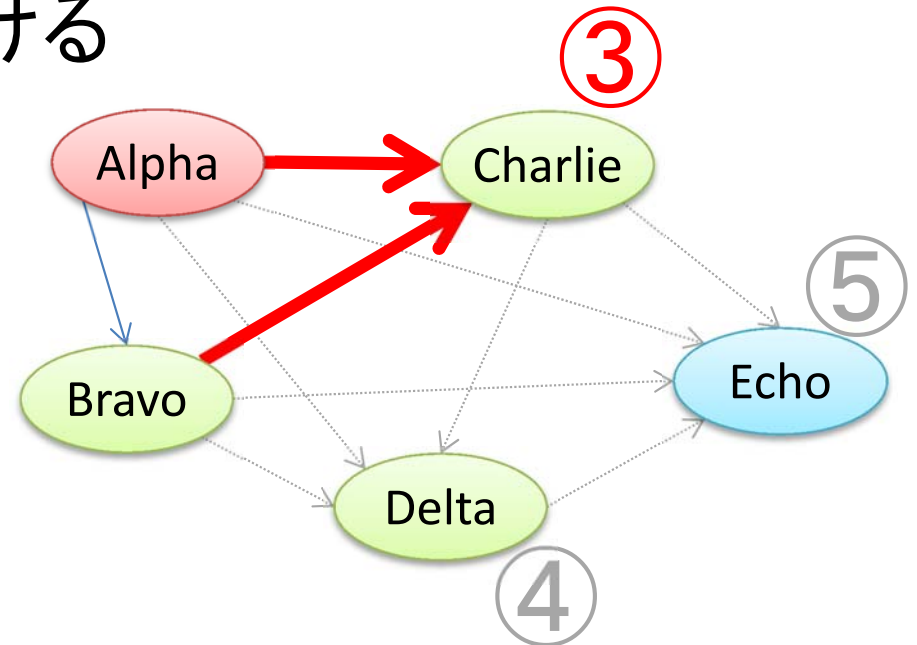
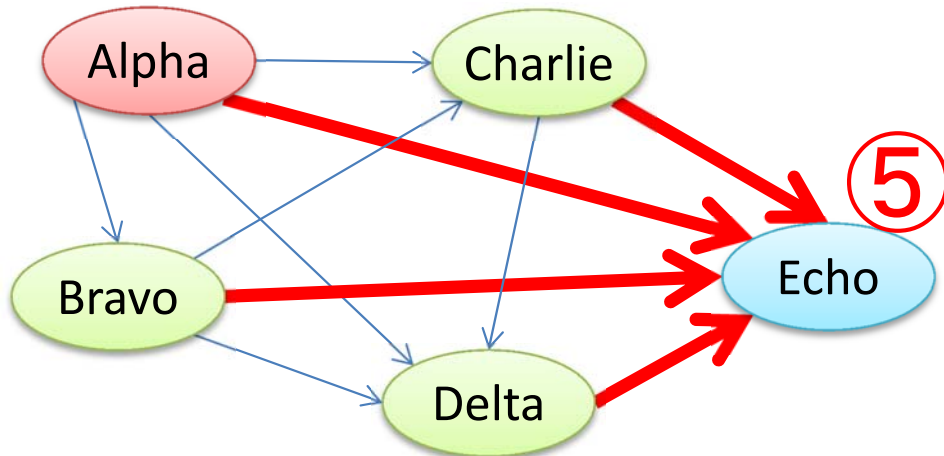
# 動的計画法とは？

- 例) スパイであるあなたは敵国で諜報活動をしている  
ある時、相棒がヘマをやらかし、安全な地点まで速やかに移動しなければならなくなった。 現在地点 (Alpha) から、 安全な地点 (Echo) までの間に 3箇所 の 拠点 (Bravo ~ Delta) がある。各地点間の移動に対する リスク (危険度) は以下の数値で表される。さて、最もリスクの少ない道を通りたい。どこを通れば良いか？



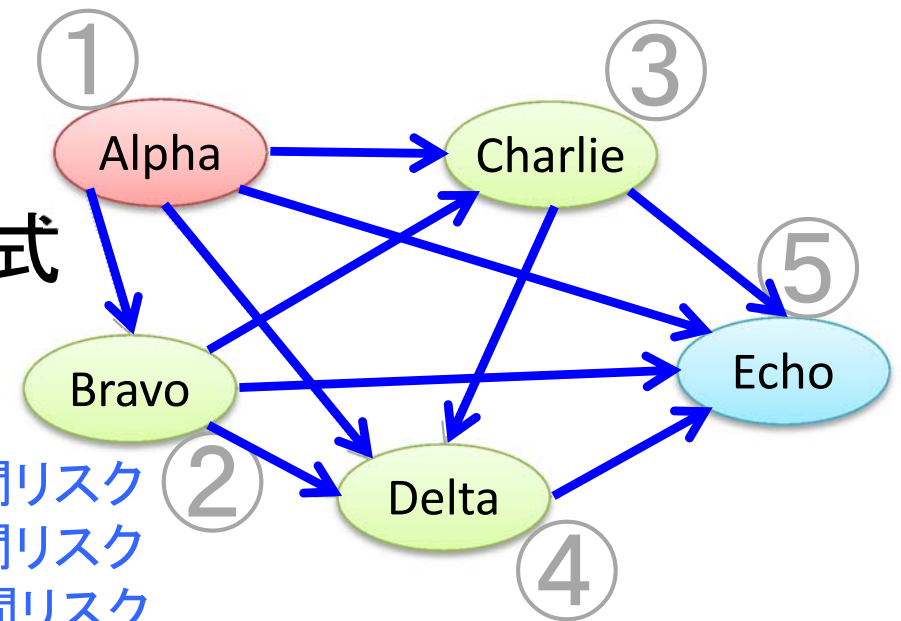
# 動的計画法とは？

- Step1: トポロジカル順を見つける



# 動的計画法とは？

- Step2: トポロジカル逆順に漸化式



Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AE}, & \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow E \text{間リスク} \\ p_B + c_{BE}, & \leftarrow B \text{までの最小リスク} + B \rightarrow E \text{間リスク} \\ p_C + c_{CE}, & \leftarrow C \text{までの最小リスク} + C \rightarrow E \text{間リスク} \\ p_D + c_{DE} \} & \leftarrow D \text{までの最小リスク} + D \rightarrow E \text{間リスク} \end{array}$$

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AD}, & \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow D \text{間リスク} \\ p_B + c_{BD}, & \leftarrow B \text{までの最小リスク} + B \rightarrow D \text{間リスク} \\ p_C + c_{CD} \} & \leftarrow C \text{までの最小リスク} + C \rightarrow D \text{間リスク} \end{array}$$

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AC}, & \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow C \text{間リスク} \\ p_B + c_{BC} \} & \leftarrow B \text{までの最小リスク} + B \rightarrow C \text{間リスク} \end{array}$$

Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow B \text{間リスク}$$

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$

$p_i$  : 拠点  $i$  までの最小リスク  
 $c_{ij}$  : 拠点  $i \rightarrow j$  間のリスク

# 動的計画法とは？

## • Step3: トポロジカル順に計算

Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \{ p_A + c_{AE}, p_B + c_{BE}, p_C + c_{CE}, p_D + c_{DE} \} = \min \{ 0+10, 3+7, 4+5, 6+2 \} = 8$$

←  $\times A \rightarrow E$   
 ←  $\times B \rightarrow E$   
 ←  $\times C \rightarrow E$   
 ←  $\bigcirc D \rightarrow E$

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \{ p_A + c_{AD}, p_B + c_{BD}, p_C + c_{CD} \} = \min \{ 0+7, 3+4, 4+2 \} = 4$$

←  $\times A \rightarrow D$   
 ←  $\times B \rightarrow D$   
 ←  $\bigcirc C \rightarrow D$

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \{ p_A + c_{AC}, p_B + c_{BC} \} = \min \{ 0+4, 3+3 \} = 3$$

←  $\bigcirc A \rightarrow C$   
 ←  $\times B \rightarrow C$

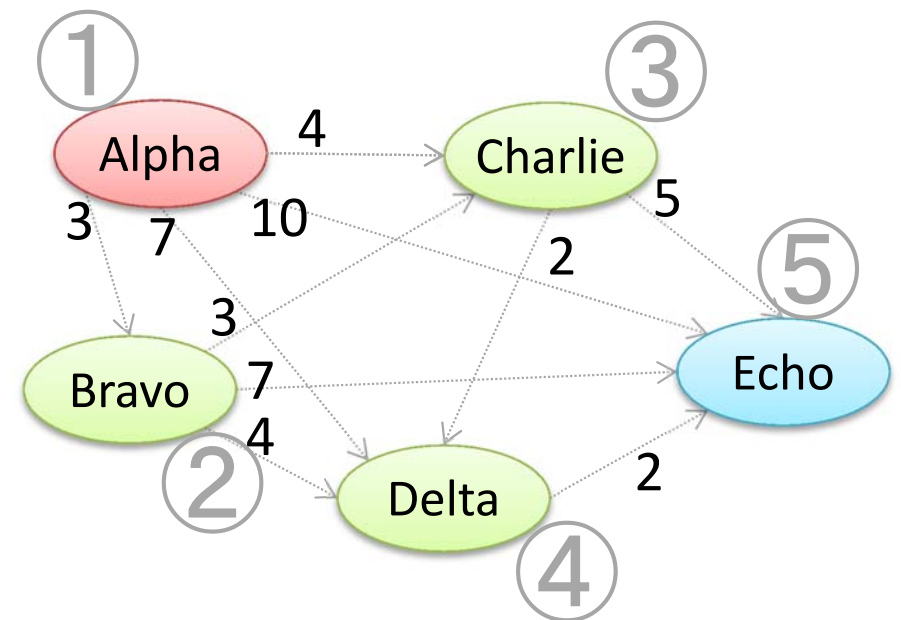
Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} = \min \{ 0+3 \} = 3$$

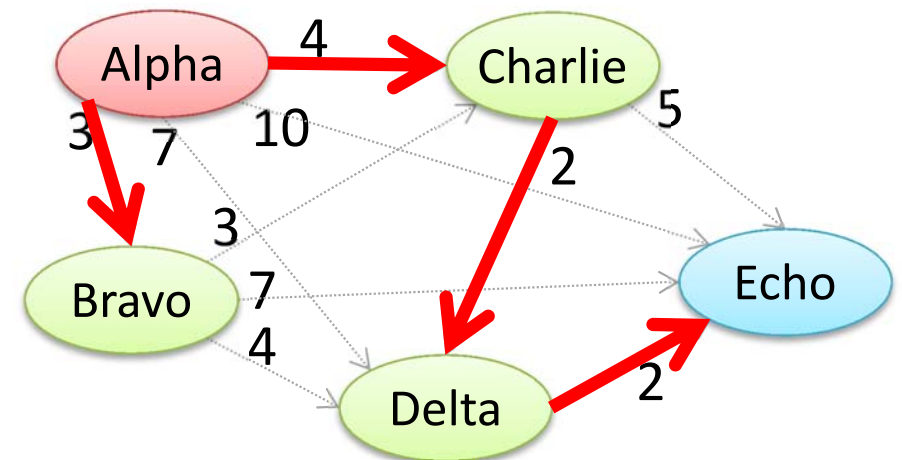
←  $\bigcirc A \rightarrow B$

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$



$p_i$  : 拠点  $i$  までの最小リスク  
 $c_{ij}$  : 拠点  $i \rightarrow j$  間のリスク



最小リスク経路は  
 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$

# 動的計画法とは？

- 動的計画法

逐次的(段階的)な決定を行う問題について、最適な決定を求める一般的な解法の枠組み

- 段階    ← トポロジカル順, 離散的な時刻(期)
- 決定
- 状態

- 最適性の原理 principle of optimality

最適方策は、最初の状態および最初の決定がどうであったにせよ、残りの決定は最初の決定の結果生じた状態に対して、最適方策になっていなければならない([1])

# 参考文献

- [1] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- [2] 久保幹雄「動的計画法」【久保・田村・松井 編『応用数理計画ハンドブック』第7章】(2002)