

問題解決技法入門

7. 動的計画法

文教大学
堀田 敬介

切符購入問題

問)「東京－新神戸」間で新幹線を使う。下表は普通車自由席(一部指定席)回数券(6枚綴り)の値段である。素直に購入すれば ¥84,900 である。いくつか分割して購入すると安くなるだろうか？

分割例1) 東京－名古屋－新神戸 ¥62,160 + ¥42,660 = ¥104,820

分割例2) 東京－静岡－新大阪－新神戸
¥32,340 + ¥56,940 + ¥8,520 = ¥97,800

駅名	新幹線回数券(普通車自由席/指定席用)6枚綴り															東京	
	データ出典: 2014年JR東海Webサイト「お得なきっぷ」より(2015.2.3)																
東京	¥84,900	¥82,140	¥78,420	¥65,340	-	¥62,160	¥53,760	¥46,560	¥42,720	¥40,800	¥32,340	¥27,840	¥21,960	¥19,980	¥16,500	¥7,740	東京
新横浜	¥82,980	¥79,740	¥74,580	¥62,760	-	¥58,260	-	¥44,700	¥40,800	¥38,820	¥27,840	¥24,600	¥17,700	¥15,360	¥10,980	-	新横浜
小田原	-	¥66,720	¥63,420	-	-	¥46,560	-	¥38,820	¥30,360	¥27,840	¥17,700	¥14,340	¥10,380	-	-	-	小田原
熱海	-	¥65,340	-	-	-	¥44,700	-	-	-	-	¥15,360	-	-	-	-	-	熱海
三島	¥66,720	¥63,420	¥58,260	-	-	¥42,720	-	¥30,360	-	-	¥10,980	-	-	-	-	-	三島
新富士	-	¥62,760	¥56,940	-	-	¥38,820	-	-	-	-	¥7,740	-	-	-	-	-	新富士
静岡	¥62,760	¥56,940	¥53,760	-	-	¥32,340	-	-	¥12,300	¥9,660	-	-	-	-	-	-	静岡
掛川	-	¥53,760	¥46,560	-	-	¥25,860	-	-	-	¥7,740	-	-	-	-	-	-	掛川
浜松	¥53,760	¥46,560	¥42,720	¥32,340	-	¥24,600	¥15,600	¥8,400	-	-	-	-	-	-	-	-	浜松
豊橋	-	¥44,700	¥38,820	-	-	¥12,300	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	豊橋
三河安城	-	¥40,800	¥30,360	-	-	¥7,020	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	三河安城
名古屋	¥42,660	¥33,960	¥30,420	¥15,360	¥8,040	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	名古屋
岐阜羽島	¥32,340	¥27,840	¥24,600	¥9,660	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	岐阜羽島
米原	-	¥24,600	¥11,640	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	米原
京都	¥13,920	¥8,040	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	京都
新大阪	¥8,520	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	新大阪
新神戸	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	新神戸

※東京－新横浜以外は、東京=【東京(山手線内)】or【東京(都区内)】
 ※新横浜－小田原～三島以外は、新横浜=【新横浜(市内)】
 ※東京－新横浜間にある品川=【東京(山手線内)】

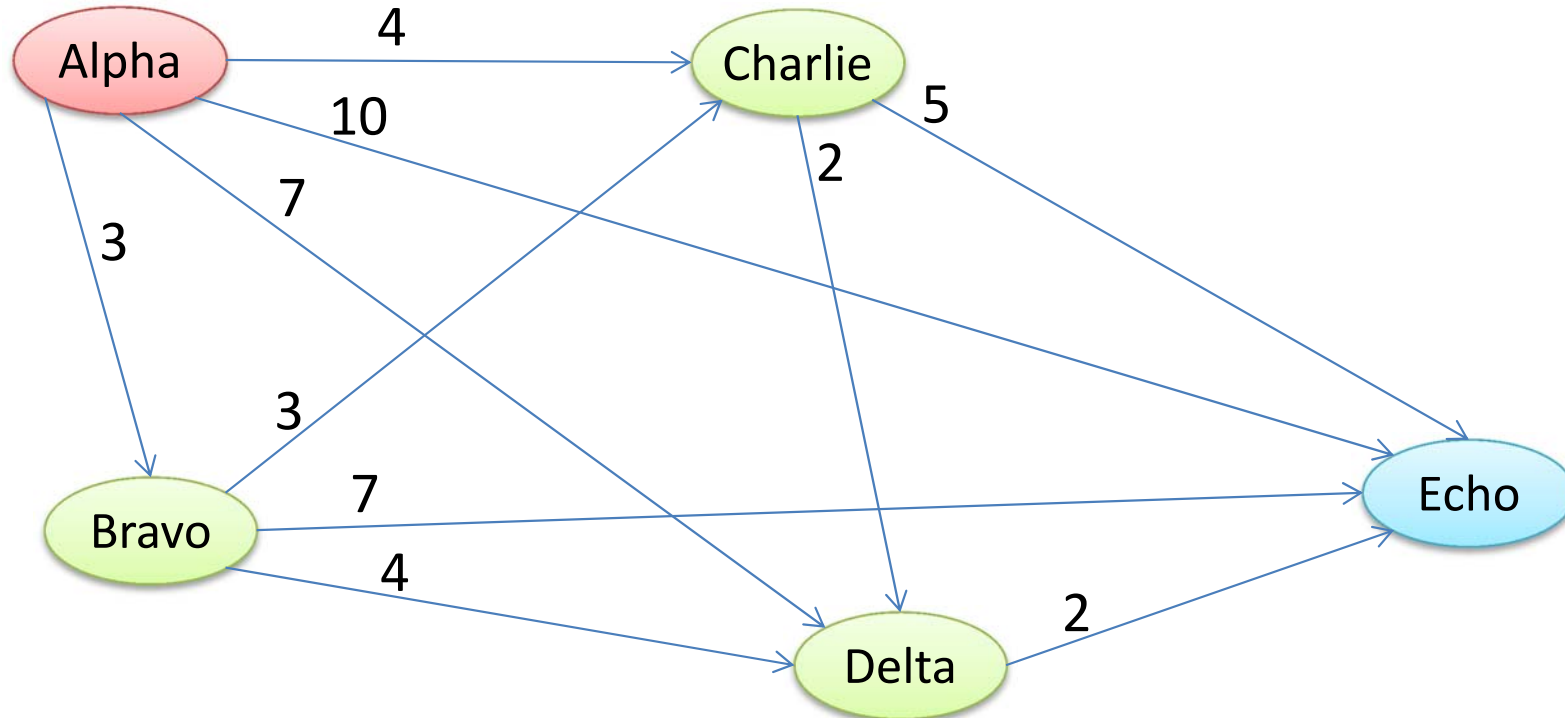
■ = のぞみ停車駅

※名古屋 = 名古屋(市内)
 ※京都 = 京都(市内)
 ※新大阪 = 新大阪(市内)
 ※新神戸 = 新神戸(市内)

※背景緑色は指定席回数券(自由席回数券の設定はない)
 ※指定席券を自由席で使うこととする

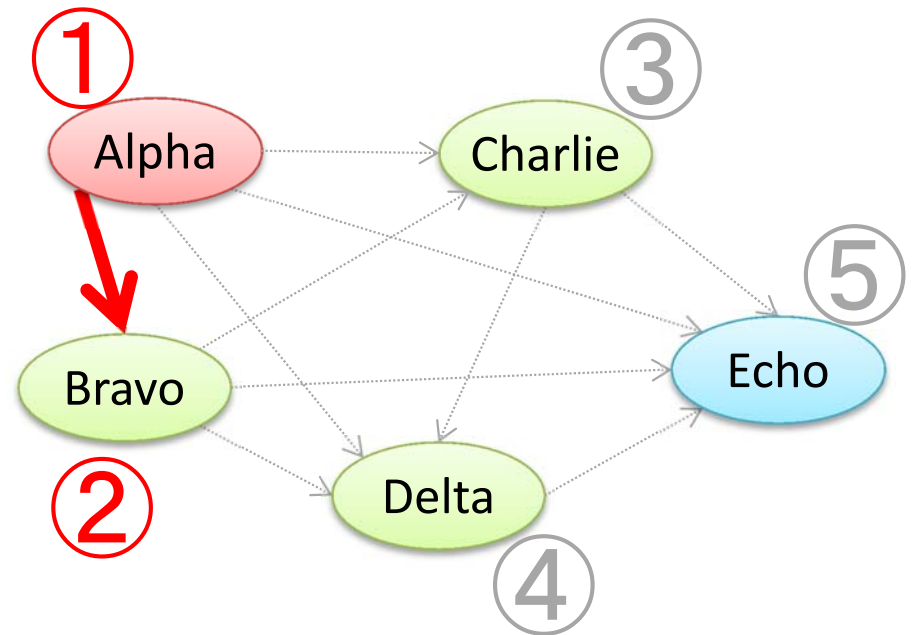
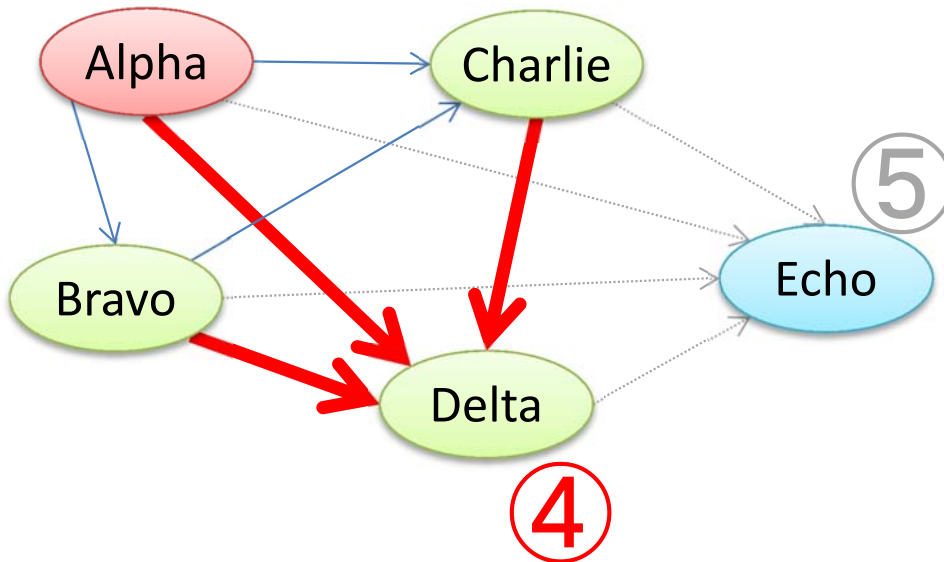
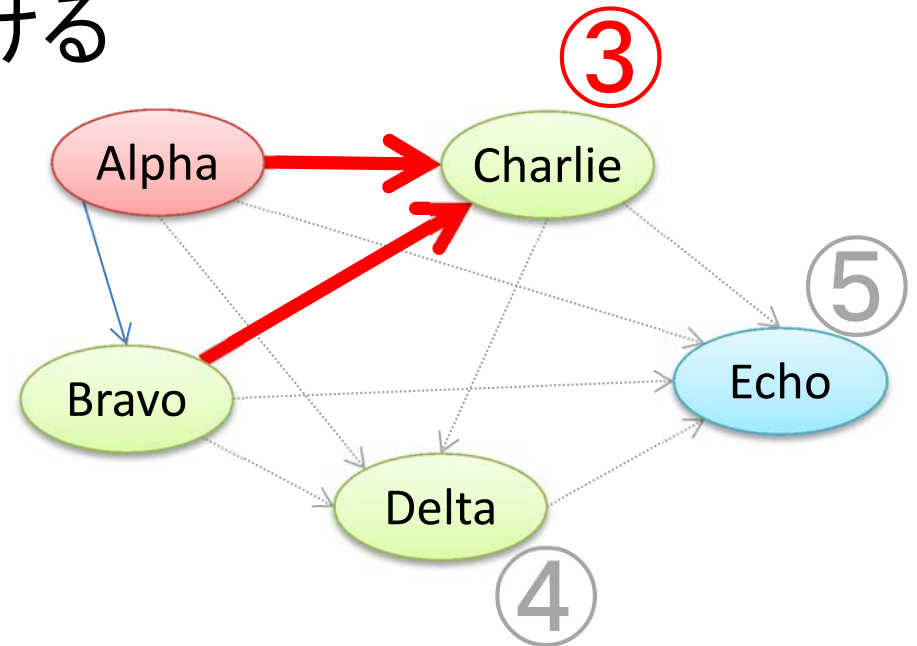
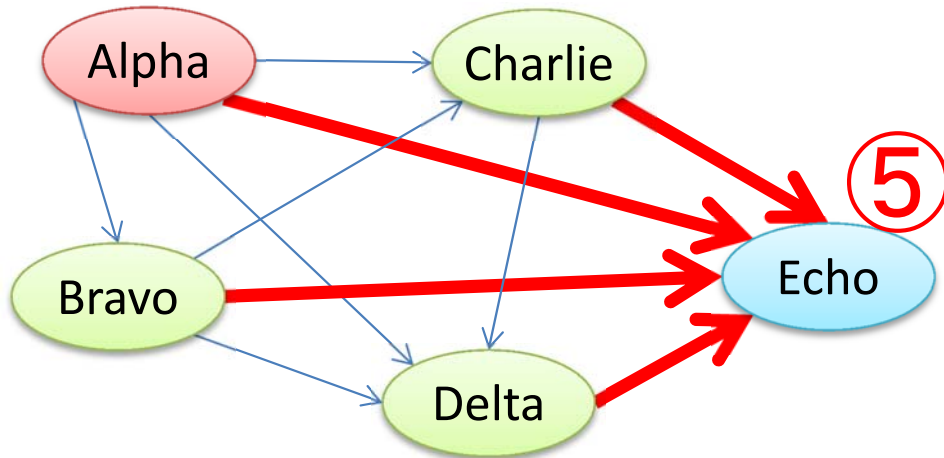
動的計画法とは？

- 例) スパイであるあなたは敵国で諜報活動を続けているある時、相棒がヘマをやらかし、安全な地点まで速やかに移動しなければならなくなった。 現在地点 (Alpha) から、 安全な地点 (Echo) までの間に 3箇所の拠点 (Bravo~Delta) がある。各地点間の移動に対する リスク (危険度) は以下の数値で表される。さて、最もリスクの少ない道を通りたい。どこを通れば良いか？



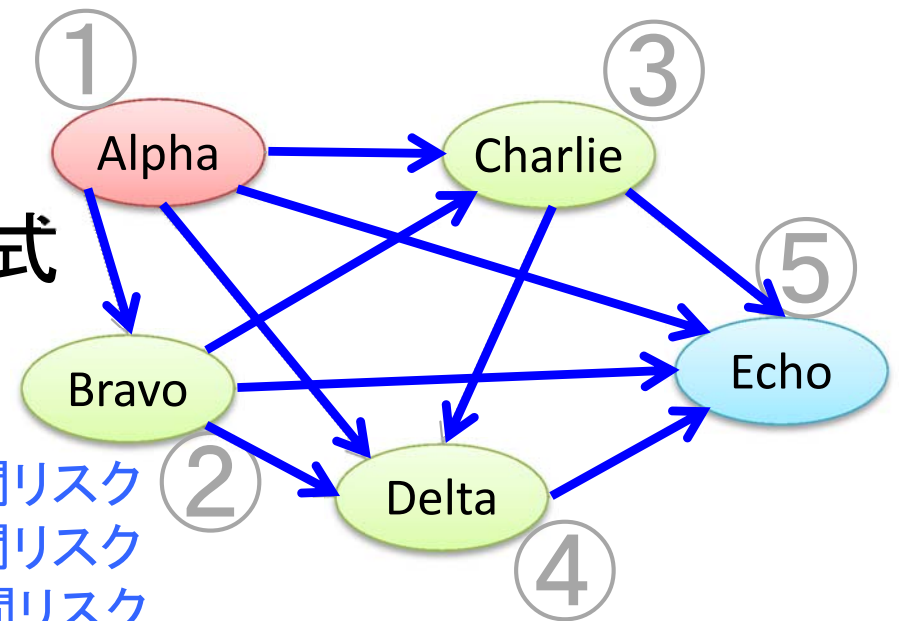
動的計画法とは？

- Step1: トポロジカル順を見つける



動的計画法とは？

- Step2: トポロジカル逆順に漸化式



Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \left\{ \begin{array}{l} p_A + c_{AE}, \quad \leftarrow A \text{ までの最小リスク} + A \rightarrow E \text{ 間リスク} \\ p_B + c_{BE}, \quad \leftarrow B \text{ までの最小リスク} + B \rightarrow E \text{ 間リスク} \\ p_C + c_{CE}, \quad \leftarrow C \text{ までの最小リスク} + C \rightarrow E \text{ 間リスク} \\ p_D + c_{DE} \} \quad \leftarrow D \text{ までの最小リスク} + D \rightarrow E \text{ 間リスク} \end{array} \right.$$

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \left\{ \begin{array}{l} p_A + c_{AD}, \quad \leftarrow A \text{ までの最小リスク} + A \rightarrow D \text{ 間リスク} \\ p_B + c_{BD}, \quad \leftarrow B \text{ までの最小リスク} + B \rightarrow D \text{ 間リスク} \\ p_C + c_{CD} \} \quad \leftarrow C \text{ までの最小リスク} + C \rightarrow D \text{ 間リスク} \end{array} \right.$$

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \left\{ \begin{array}{l} p_A + c_{AC}, \quad \leftarrow A \text{ までの最小リスク} + A \rightarrow C \text{ 間リスク} \\ p_B + c_{BC} \} \quad \leftarrow B \text{ までの最小リスク} + B \rightarrow C \text{ 間リスク} \end{array} \right.$$

Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} \quad \leftarrow A \text{ までの最小リスク} + A \rightarrow B \text{ 間リスク}$$

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$

p_i : 拠点 i までの最小リスク
 c_{ij} : 拠点 $i \rightarrow j$ 間のリスク

動的計画法とは？

• Step3: トポロジカル順に計算

Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \{ p_A + c_{AE}, p_B + c_{BE}, p_C + c_{CE}, p_D + c_{DE} \} = \min \{ 0+10, 3+7, 4+5, 6+2 \} = 8$$

← × A→E
← × B→E
← × C→E
← ○ D→E

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \{ p_A + c_{AD}, p_B + c_{BD}, p_C + c_{CD} \} = \min \{ 0+7, 3+4, 4+2 \} = 6$$

← × A→D
← × B→D
← ○ C→D

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \{ p_A + c_{AC}, p_B + c_{BC} \} = \min \{ 0+4, 3+3 \} = 4$$

← ○ A→C
← × B→C

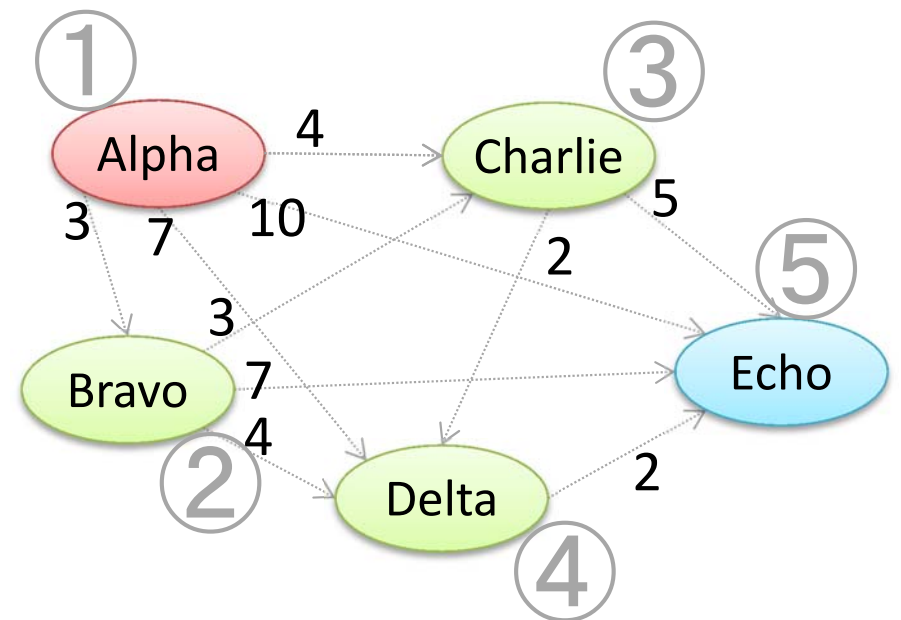
Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} = \min \{ 0+3 \} = 3$$

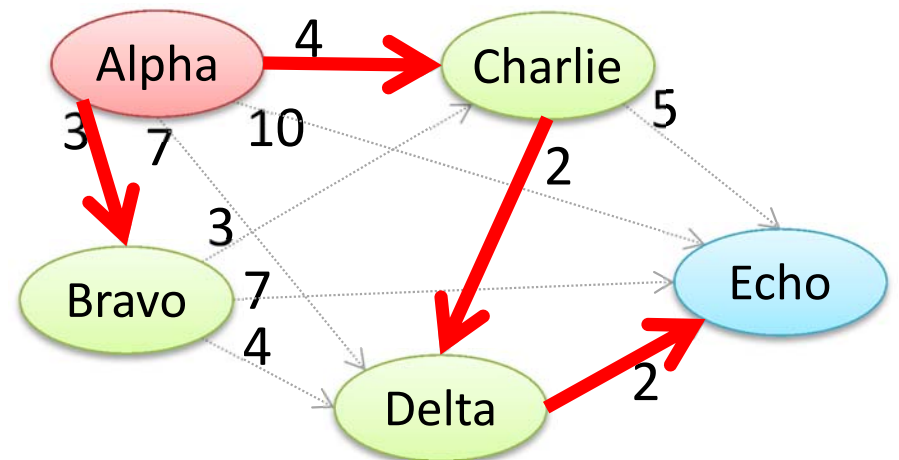
← ○ A→B

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$



p_i : 拠点 i までの最小リスク
 c_{ij} : 拠点 $i \rightarrow j$ 間のリスク



最小リスク経路は
 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$

動的計画法とは？

- **動的計画法**

逐次的(段階的)な決定を行う問題について、最適な決定を求める一般的な解法の枠組み

- 段階 ← トポロジカル順, 離散的な時刻(期)
- 決定
- 状態

- **最適性の原理 principle of optimality**

最適方策は、最初の状態および最初の決定がどうであったにせよ、残りの決定は最初の決定の結果生じた状態に対して、最適方策になっていなければならない([1])

参考文献

- [1] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- [2] 久保幹雄「動的計画法」【久保・田村・松井 編『応用数理計画ハンドブック』第7章】(2002)