

問題解決技法入門

7-2. 線形計画法

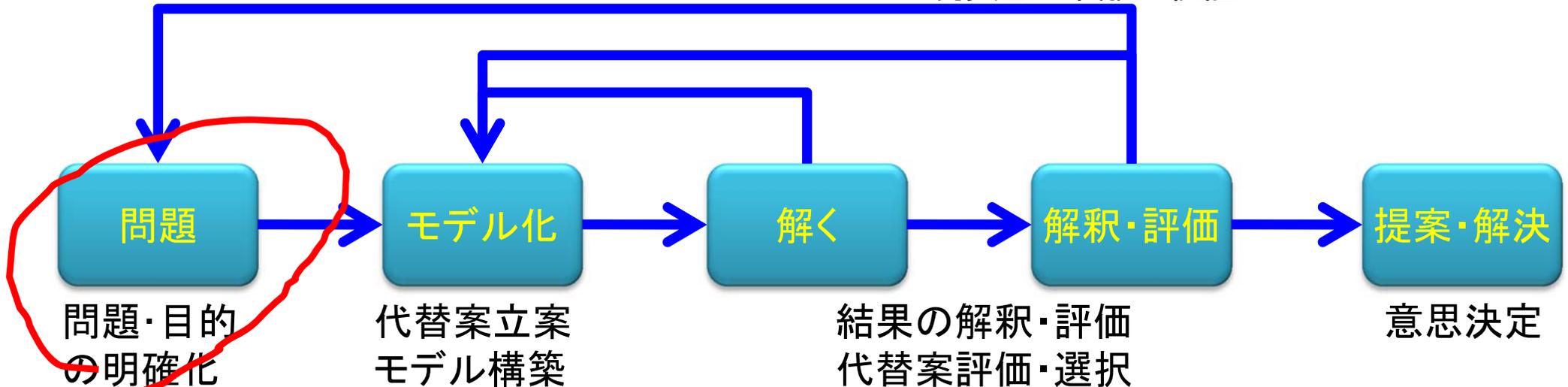
文教大学
堀田 敬介

問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

問題の見直し
問題の本質を再考

モデルの妥当性評価
現実との乖離の検証



- 問題発見・状況認識

- 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
- いったい何を知りたいのか？
- 問題の本質は何か？

- 答えを導く

- 解法選択
- 解法構築
- パラメータ調整

- 推論・モデル作成

- 推論に基づきモデル作成
- 現実を支配する法則を数量的に明確化

- 結果評価・解釈

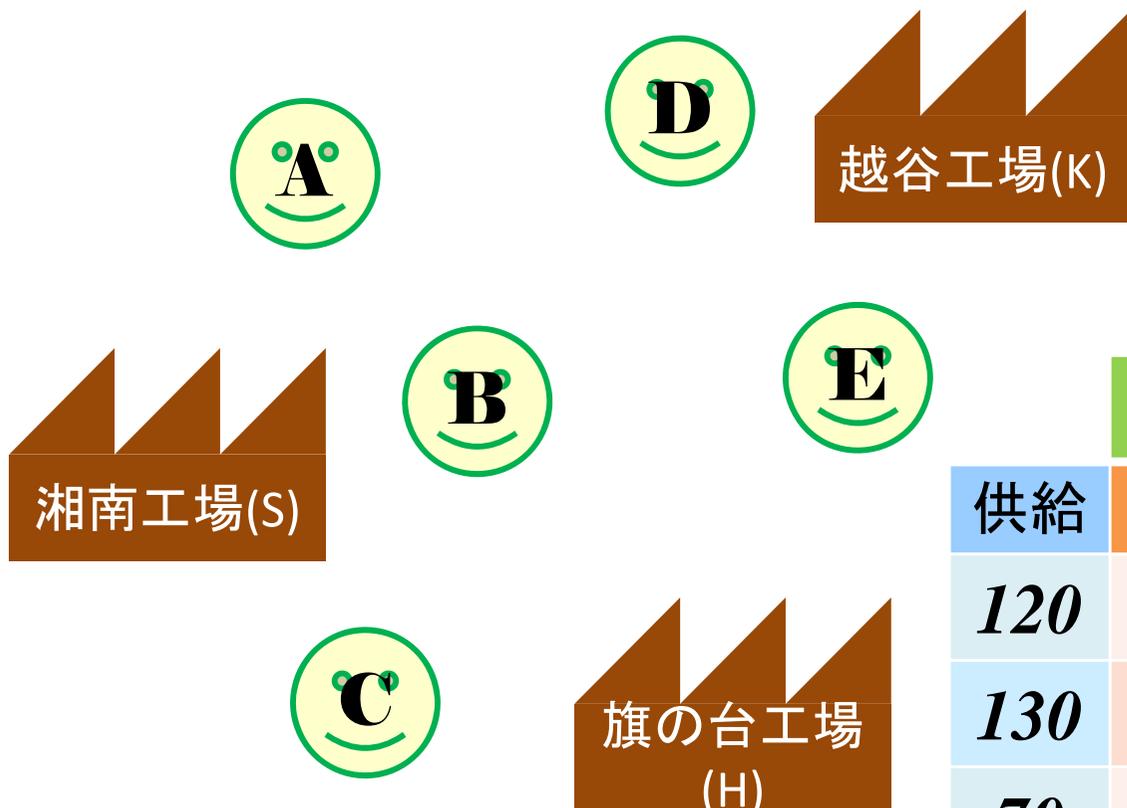
- 解法のもたらす結果の解釈・考察
- 得られた代替案の評価・分析

輸送問題

問) 文教重工には3工場(湘南・越谷・旗の台)あり, 製品を供給(製品生産量)できる

顧客は5人いて, 需要(製品を欲しい量)がある

3工場から5人の顧客それぞれへの単位あたり輸送コストは表の通り
輸送コストが最小となる配送計画をたてよ

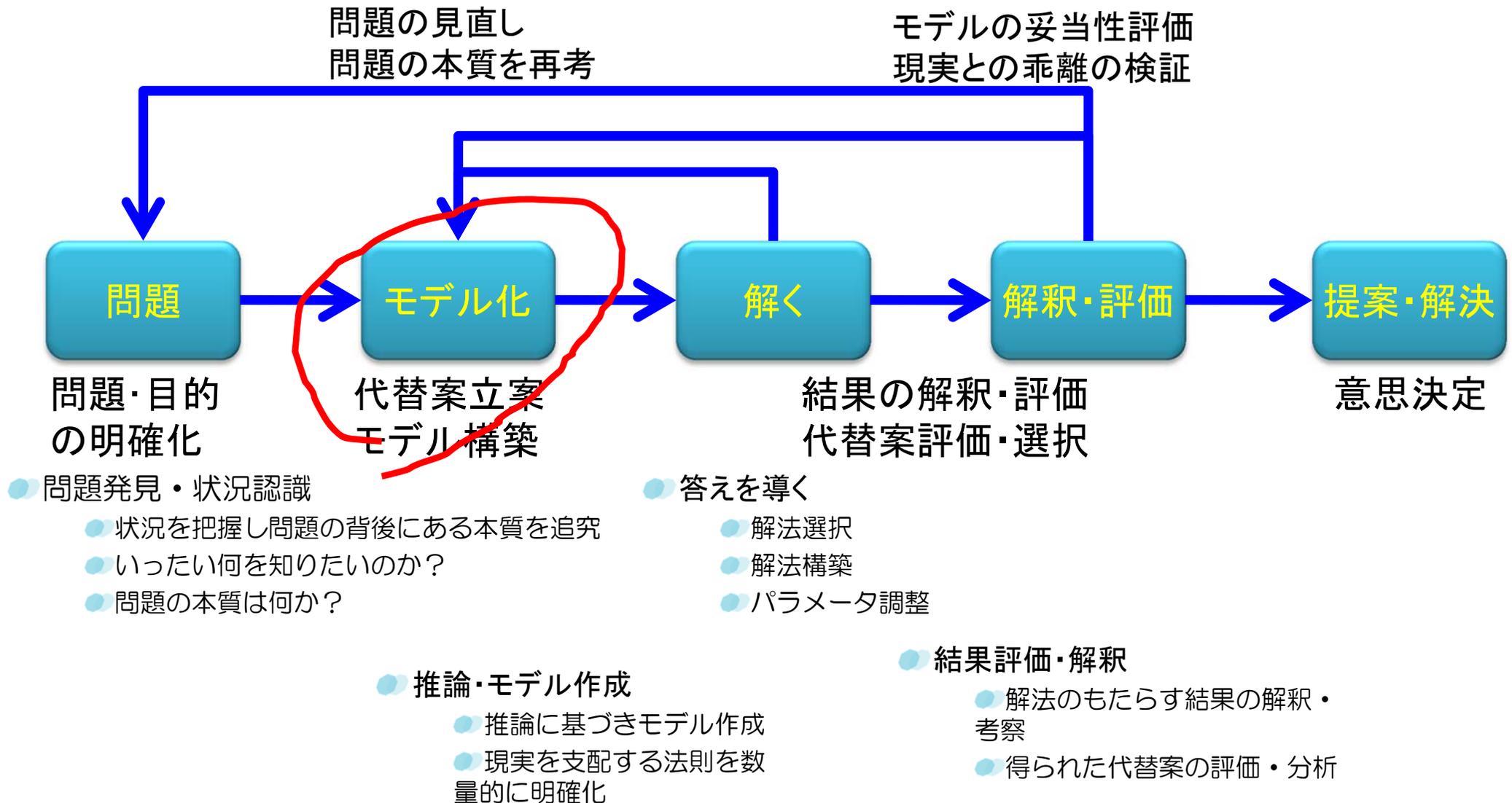


- ✓ 工場の供給量
- ✓ 顧客の需要量
- ✓ 工場から顧客へ製品を1単位配送するのにかかる輸送コスト表

		需要				
		50	80	60	70	40
供給	工場\顧客	A	B	C	D	E
120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3

問題解決

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



線形計画法

- 線形計画法 Linear Programming, LP
- 問題のモデル化

- 目的: 輸送コストを最小
- 条件1: 顧客の需要を満たす
- 条件2: 工場の出荷量は供給量まで
- 条件3: 輸送量は非負

目的関数 objective function

制約条件 constraints

非負条件 nonnegativity

変数設定

x_{ij} : 工場 i → 顧客 j への輸送量

ex) $x_{SB} = 30$: 湘南工場(S)から顧客Bへ製品を30輸送する
その輸送コスト: $2 \times 30 = 60$

		需要	50	80	60	70	40
供給	工場\顧客	A	B	C	D	E	
120	湘南(S)	3	2	4	5	8	
130	越谷(K)	5	6	5	3	2	
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3	

線形計画法

	需要	50	80	60	70	40
供給	工場\顧客	A	B	C	D	E
120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3

● 問題のモデル化

- 目的: 輸送コストを最小
- 条件1: 顧客の需要を満たす
- 条件2: 工場の出荷量は供給量まで
- 条件3: 輸送量は非負

● 問題の定式化 (LPファイル形式)

minimize

$$\begin{aligned} & 3x_{SA} + 2x_{SB} + 4x_{SC} + 5x_{SD} + 8x_{SE} \\ & + 5x_{KA} + 6x_{KB} + 5x_{KC} + 3x_{KD} + 2x_{KE} \\ & + 7x_{HA} + 3x_{HB} + 1x_{HC} + 2x_{HD} + 3x_{HE} \end{aligned}$$

subject to

$$x_{SA} + x_{KA} + x_{HA} = 50$$

...

$$x_{SA} + x_{SB} + x_{SC} + x_{SD} + x_{SE} \leq 120$$

...

目的関数 objective function

制約条件 constraints

非負条件 nonnegativity

線形計画法

• 問題の定式化

	需要	50	80	60	70	40
供給	工場\顧客	A	B	C	D	E
120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3

minimize

$$\begin{aligned} & 3x_{SA} + 2x_{SB} + 4x_{SC} + 5x_{SD} + 8x_{SE} \\ & + 5x_{KA} + 6x_{KB} + 5x_{KC} + 3x_{KD} + 2x_{KE} \\ & + 7x_{HA} + 3x_{HB} + 1x_{HC} + 2x_{HD} + 3x_{HE} \end{aligned}$$

subject to

$$\begin{aligned} x_{SA} + x_{KA} + x_{HA} &= 50 \\ x_{SB} + x_{KB} + x_{HB} &= 80 \\ x_{SC} + x_{KC} + x_{HC} &= 60 \\ x_{SD} + x_{KD} + x_{HD} &= 70 \\ x_{SE} + x_{KE} + x_{HE} &= 40 \\ x_{SA} + x_{SB} + x_{SC} + x_{SD} + x_{SE} &\leq 120 \\ x_{KA} + x_{KB} + x_{KC} + x_{KD} + x_{KE} &\leq 130 \\ x_{HA} + x_{HB} + x_{HC} + x_{HD} + x_{HE} &\leq 70 \end{aligned}$$

end

目的関数 objective function

制約条件 constraints

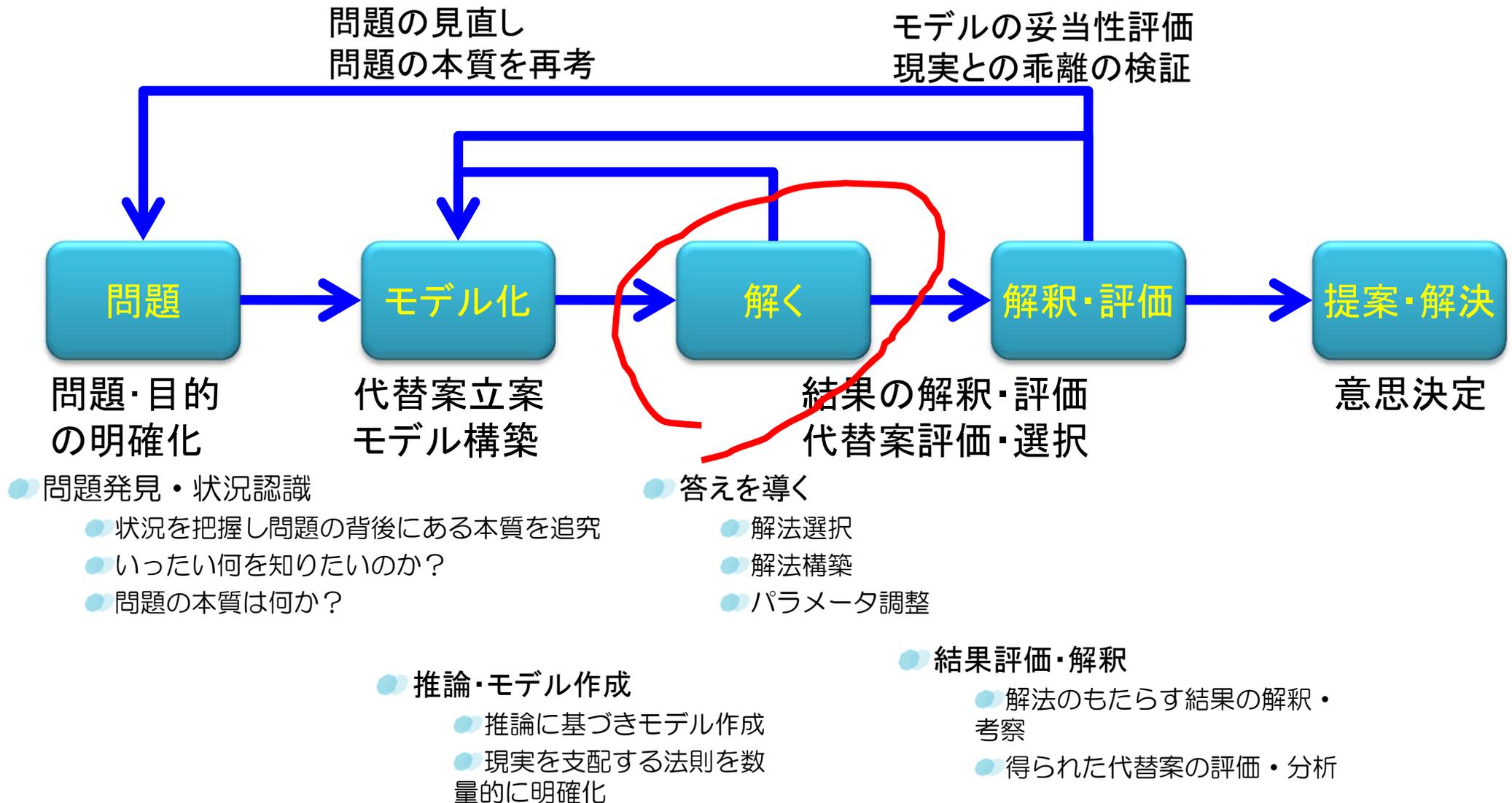
非負条件 nonnegativity

※LPファイル形式では書かない

→ ファイル名「ex.lp」で保存(LPファイル)

問題解決

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



線形計画法

- 問題を解く

- ソルバー

- gurobi (Zonghao Gu, Edward Rothberg, Robert Bixby)
 - cplex (IBM ILOG CPLEX)
 - Xpress (FICO, MSI)
 - SCIP (ZIB, Solving Constraint Integer Programs)
 - lp solve
 - GLPK (Gnu Linear Programming Kit)
 - Excel solver (Microsoft)
 - etc.

- LPファイル(例: ex.lp)を読み込んで最適化！

- 文教大の環境では, Y:¥LP に保存(YドライブのLPフォルダ)

線形計画法

- gurobiで最適化(解く)

Y:>cd LP [Enter]

Y:¥LP>gurobi [Enter]

LPファイル読込

gurobi> m=read("ex.lp")

最適化(解く)

gurobi> m.optimize()

解の表示

gurobi> m.printAttr('X')

gurobi> m.ObjVal

※win8: 左下winマークで右クリック→「コマンドプロンプト」
※win7: 左下winマーク→「すべてのプログラム」→「アクセサリ」→

- 「コマンドプロンプト」を起動する
- 'ex.lp'ファイルが保存されているフォルダへ移動(例ではYドライブのLPフォルダ)
(cd = change directory)
- 'gurobi'コマンドでgurobiを起動する

```
cmd コマンドプロンプト - gurobi
gurobi> m = read("ex.lp")
gurobi> m.optimize()
Optimize a model with 8 rows, 15 columns and 30 nonzeros
Presolve time: 0.00s
Presolved: 8 rows, 15 columns, 30 nonzeros

Iteration   Objective          Primal Inf.    Dual Inf.      Time
   0         5.9000000e+02    7.000000e+01   0.000000e+00   0s
   2         6.7000000e+02    0.000000e+00   0.000000e+00   0s

Solved in 2 iterations and 0.01 seconds
Optimal objective 6.700000000e+02
gurobi> m.printAttr('X')

Variable      X
-----
xSA           50
xSB           70
xKD           70
xKE           40
xHB           10
xHC           60
gurobi> m.ObjVal
670.0
gurobi>
```

線形計画法

- cplexで最適化(解く)

Y:>cd LP [Enter]

Y:¥LP>cplex [Enter]

LPファイル読込

CPLEX> read ex.lp

問題の表示

CPLEX> d p a

最適化(解く)

CPLEX> opt

解の表示

CPLEX> d so v -

```
コマンドプロンプト - cplex
CPLEX> read ex.lp
Problem 'ex.lp' read.
Read time = 0.00 sec. (0.00 ticks)
CPLEX> d p a
Minimize
obj: 3 xSA + 2 xSB + 4 xSC + 5 xSD + 8 xSE + 5 xKA + 6 xKB + 5 xKC + 3 xKD
      + 2 xKE + 7 xHA + 3 xHB + xHC + 2 xHD + 3 xHE
Subject To
c1: xSA + xKA + xHA = 50
c2: xSB + xKB + xHB = 80
c3: xSC + xKC + xHC = 60
c4: xSD + xKD + xHD = 70
c5: xSE + xKE + xHE = 40
c6: xSA + xSB + xSC + xSD + xSE <= 120
c7: xKA + xKB + xKC + xKD + xKE <= 130
c8: xHA + xHB + xHC + xHD + xHE <= 70
Bounds
All variables are >= 0.
CPLEX> opt
Tried aggregator 1 time.
No LP presolve or aggregator reductions.
Presolve time = -0.00 sec. (0.01 ticks)

Iteration log . . .
Iteration:      1   Dual objective      =      160.000000

Dual simplex - Optimal: Objective = 6.7000000000e+002
Solution time =    0.00 sec. Iterations = 7 (0)
Deterministic time = 0.01 ticks (13.28 ticks/sec)

CPLEX> d so v -
Variable Name      Solution Value
xSA                 40.000000
xSB                 80.000000
xKA                 10.000000
xKD                 60.000000
xKE                 40.000000
xHC                 60.000000
xHD                 10.000000
All other variables in the range 1-15 are 0.
CPLEX>
```

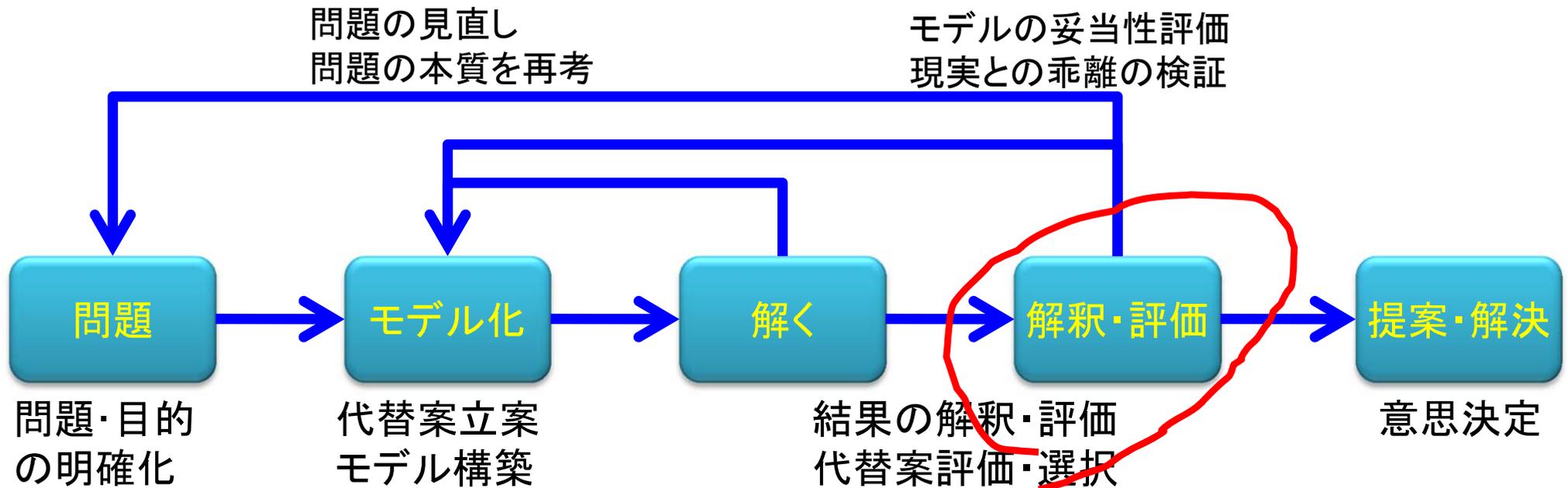
d p a = display problem all

opt = optimize

d so v = display solution variables

問題解決

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



● 問題発見・状況認識

- 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
- いったい何を知りたいのか？
- 問題の本質は何か？

● 答えを導く

- 解法選択
- 解法構築
- パラメータ調整

● 推論・モデル作成

- 推論に基づきモデル作成
- 現実を支配する法則を数量的に明確化

● 結果評価・解釈

- 解法のもたらす結果の解釈・考察
- 得られた代替案の評価・分析

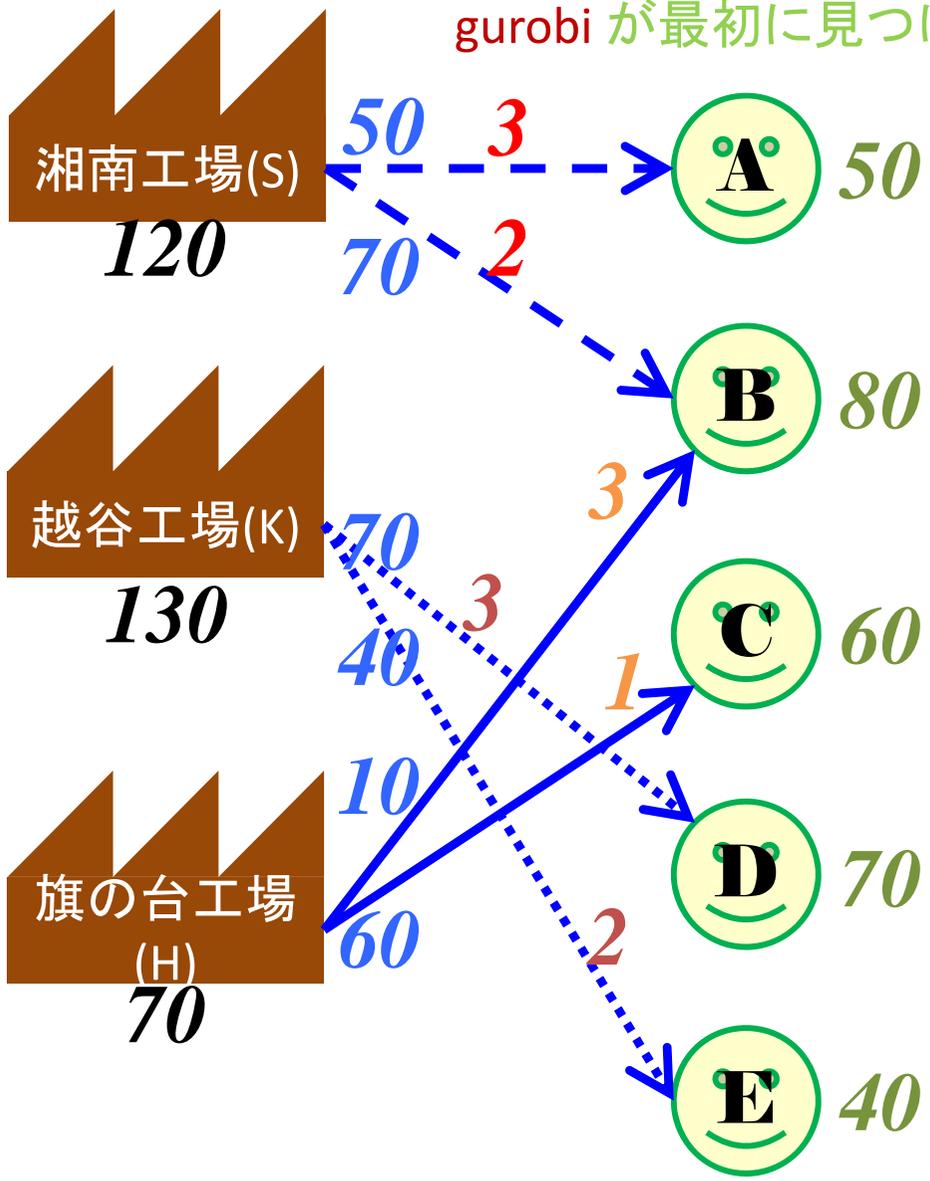
輸送問題

最適値 \downarrow
 $670 = 6.7 \times 10^2$

```
Optimal objective 6.700000000e+02
gurobi> m.printAttr('X')
-----
Variable          X
-----
xSA                50
xSB                70
xKD                70
xKE                40
xHB                10
xHC                60
gurobi> m.ObjVal
670.0
```

最適解・最適値の評価・検証)

gurobi が最初に見つけた解



- ✓ 工場の供給量
- ✓ 顧客の需要量
- ✓ 工場から顧客へ製品を1単位配送するのにかかる輸送コスト表

		需要	50	80	60	70	40
供給	工場\顧客	A	B	C	D	E	
	120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2	
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3	

輸送問題

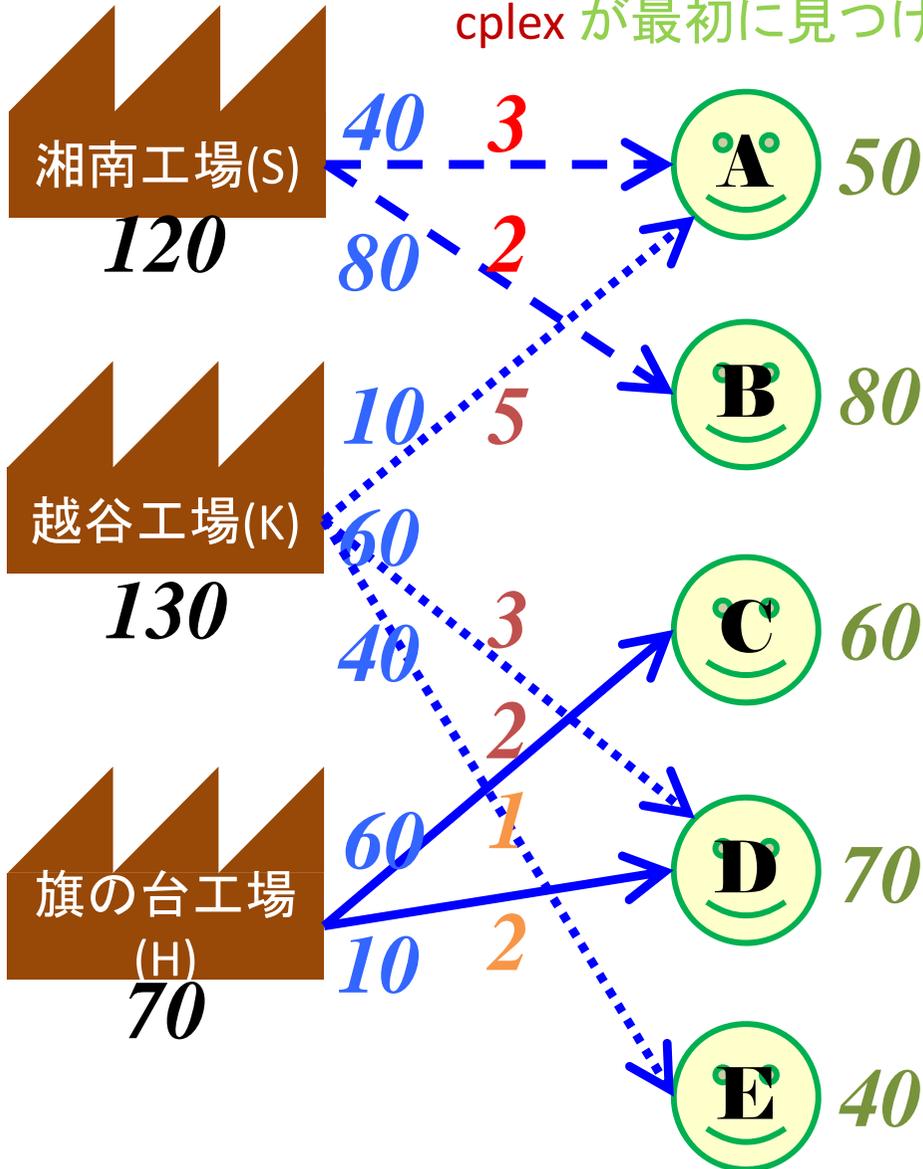
最適値 \downarrow
 $670 = 6.7 \times 10^2$

```
Dual simplex - Optimal: Objective = 6.7000000000e+002
Solution time = 0.00 sec. Iterations = 7 (0)
Deterministic time = 0.01 ticks (13.28 ticks/sec)

CPLEX> d so v -
Variable Name          Solution Value
xSA                     40.000000
xSB                     80.000000
xKA                     10.000000
xKD                     60.000000
xKE                     40.000000
xHC                     60.000000
xHD                     10.000000
All other variables in the range 1-15 are 0.
```

最適解・最適値の評価・検証)

cplex が最初に見つけた解



- ✓ 工場の供給量
- ✓ 顧客の需要量
- ✓ 工場から顧客へ製品を1単位配送するのにかかる輸送コスト表

		需要	50	80	60	70	40
供給	工場 \ 顧客	A	B	C	D	E	
120	湘南(S)	3	2	4	5	8	
130	越谷(K)	5	6	5	3	2	
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3	

線形計画法とは？

- 線形計画法

複数の等式・不等式で与えられる線形制約（一次制約）のもとで、線形の目的関数を最大化（または最小化）する

- 線形計画問題を解くための主な手法 algorithm

- 単体法 simplex method, G.B.Dantzig(1947)
- 内点法 interior point method, N.Karmarkar (1984)
- (楕円体法 ellipsoid method, Yudin, A.S.Nemirovskii(1976), Khachiyan(1979))

- 参考

- 主問題, 双対問題 primal problem, dual problem
- 双対定理, 相補性定理 duality theorem, complementarity slackness theorem
- 感度分析 sensitivity analysis

演習

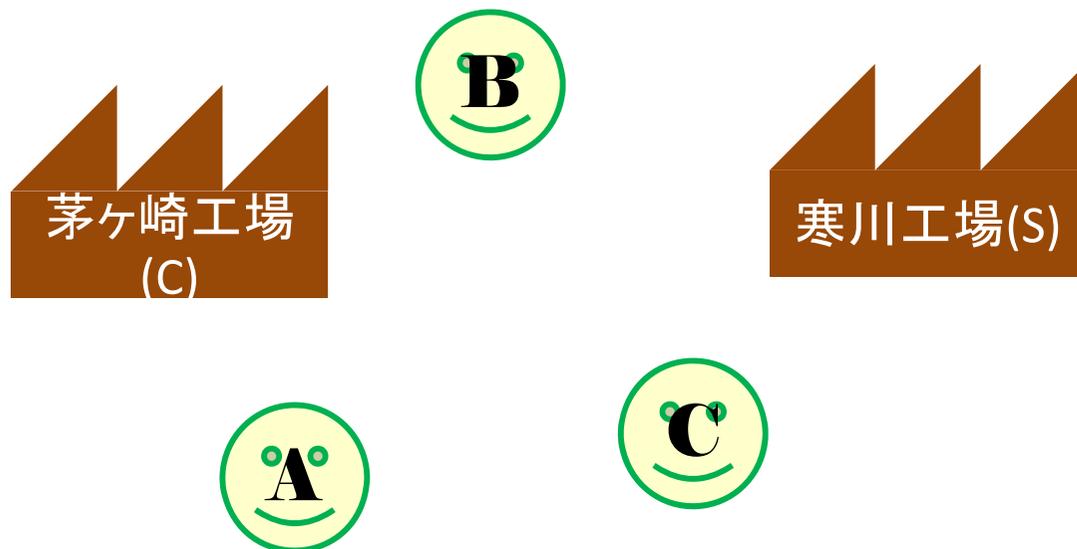
問) 茅ヶ崎重工は2工場(茅ヶ崎・寒川)あり, 製品を供給(製品生産量)できる

顧客はA,B,Cの3人いて, 需要(製品を欲しい量)がある

2工場から4人の顧客それぞれへの単位あたり輸送コストは表の通り

表の空欄8箇所を, 2,3,4,5,6,7 を1つずつ好きなように入れなさい

輸送コストが最小となる配送計画をたてよ



- ✓ 工場の供給量
- ✓ 顧客の需要量
- ✓ 工場から顧客へ製品を1単位配送するのにかかる輸送コスト表

		需要	40	20	50
供給	工場\顧客	A	B	C	
70	茅ヶ崎(C)				
50	寒川(S)				

もっと知りたい人へ

- 参考文献

- [1] 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- [2] 藤田・今野・田邊「最適化法」岩波書店(1994)
- [3] 田村明久・村松正和「最適化法」共立出版(2002)
- [4] 坂和正敏「線形計画法の基礎と応用」朝倉書店(2012)
- [5] 小島・土谷・水野・矢部「内点法」朝倉書店(2001)

- 関連する授業

- 「**ネットワークモデル分析**」(4セメ)
- 「**最適化モデル分析**」(5セメ)
- 「**意思決定科学**」(6セメ)
- etc.