

## アルゴリズムと計算量 ～論理的な思考で何が得られるのか考える～

「なんとなく」な思考ではなく「論理的に考える」ということを考察しよう。

<問1> 6人の学生がいる。背の小さい順に並び替えなさい。



図 3.1 せいくらべ

<問2> どうやって並び替えたのかを説明する文を書きなさい。

<問3> あなたが行った<問1>の手順と<問2>のあなたの説明は本当に同じか熟考しなさい。

人間は、全体を見てなんとなく入れ替え、小さい順に並べることが出来る。これは人間の凄いところである（現在のコンピュータでは不可能）。しかしながら、なんとなく出来てしまうが故に、

- ✓ どうしてできたのか、明確に説明出来ない（実際に行った手順と人への説明が食い違う）
- ✓ 人数が増えた場合に破綻する（例えば1000人いたら？）
- ✓ 同じことを再現できない（人によってたどる道筋が異なる）

であろう。これは、論理の積み重ねによって並び替える、ことをしていないためである。あるいは、そのような知識や技術、経験をしていないためである。では、論理的な思考による積み重ねで得られることとは何だろうか？ 先ほどの対比で言えば、次の通りとなろう。

- ✓ どうしてできたのか、明確に説明出来る
- ✓ 人数が増えても対応できる（例えば100万人いても大丈夫）
- ✓ 同じことを何度でも再現できる（誰がやっても同じ順に実行される）

この手の間に論理的に答えるやり方の1つは、問に対する**入力**と**出力**が何か、明確で簡潔な**手続き**、および**終了条件**を考えることである。これを**アルゴリズム**とよぶ（厳密には、どんな入力例に対しても有限時間や有限回の反復で終わることが保証されるものだけをアルゴリズムとよぶ）。

アルゴリズムは、よく料理のレシピに例えられるが、「**入力**=準備する材料」「**出力**=完成目標の料理」「**手続き**=レシピ」「**終了条件**=味見で合格」である。



メモ

《論理的な並べ替え方法の一例》

【入力】：人の列（＜問1＞では6人の学生とその身長）

【出力】：背の低い順にならんだ人の列

【手続き】：左から右に2人ずつ順に見ていく．最初の2人を比較し，右の方が低ければ2人の位値をいれかえる．1人右にずれて次の2人を同様に比較する．これを一番右まで続ける．以上を1ループとし，終了判定が成立しない限り繰り返す．

【終了判定】：手続き操作の1ループを人数回繰り返したら終了（＜問1＞は6人なので6回）．

アルゴリズムを設計した場合，次にやるべきことはそのアルゴリズムの評価である．アルゴリズムが出来たから，あとは実行するだけでいいやというのは，まだ「なんとなく思考」である．論理的に考える場合は，時間計算量と空間計算量の評価をする．即ち，入力サイズに対して，どのぐらいの時間で終わるのか（時間計算量）と，計算にどの程度の記憶領域が必要か（空間計算量）を見積もることである．ちなみに，実行する前の評価を怠ると大変な目に遭うことがある．

＜問4＞

1. アルゴリズムの時間評価：入力が6人の場合，何回の比較・繰り返し回数で終わるか？
2. アルゴリズムの空間評価：入力が6人の場合，計算に必要な記憶容量はどの程度か？
3. アルゴリズムの改善：このアルゴリズムをより効率的に実行するにはどう改良したら良いか？
4. それ以外のアルゴリズムを考えることができるか？ もっと良い他のやり方が無いか？

＜問5＞ 図3.2の格子状の道路において，左上点をスタートとし，右下のゴールへたどり着くルート（行き方）は何通りあるか？ ただし，各辺は右と下にしか進めないとする．

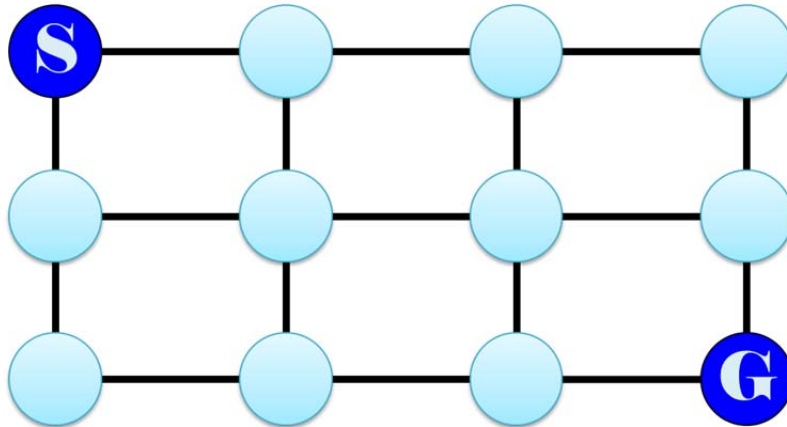


図3.2 スタートからゴールまで何通り？

メモ

《素朴な方法と論理的な数え上げ方法の例》

- [1]. 素朴な方法： 順番に1つずつ数える
- [2]. 論理的な数え方1： 交差点の和を積み重ねる
- [3]. 論理的な数え方2： 組合せ数を考える

<問6>

何通りのルート（行き方）があるか、その数を知りたいだけならば、論理的に考え[3]のやり方で計算して終わりである。しかし、具体的にその全てのルートを確認するには、[1]のように1つ1つ見ていくしかない。

問5の格子のサイズは、辺の数が縦2×横3であった。格子のサイズが増えていったときに、全てのルート（行き方）を数えるのにどのぐらいの時間が掛かるだろうか。

一つのルートを数える際に、一辺をたどるのに1秒かかるとしよう。縦2×横3のサイズの場合、どのルートだとしても5つの辺をたどることが論理的に導き出される（なぜか？）

従って、一つのルートを数えるのに5秒かかることになる。よって、ルート数が仮に10通りだとしたら、全部数え上げるのに10通り×5秒=50秒かかる（時間計算量の評価にもう慣れた？）

格子の縦・横のサイズが次表のように増えていったら、ルート数がいくつになるか、また、何秒かかるか求めなさい。

縦	横	ルートの数	辺の数	計算時間
2	3		5	
10	10			
30	30			
50	50			
100	100			

ニューヨークのマンハッタン、札幌市や京都市の中心街は、道路が格子になっていることで有名である。地図を見て、縦×横がどのぐらいのサイズなのか数え、上記表と比べてみよう。

《参考》「同じ所を通らなければ、上や左に進んでも良い」場合はどうなるだろうか？ 何通りのルートがあり、どのぐらい時間が掛かりそうだろうか？ 実はこの場合はとても難しい（論理的に考えても超難しい）ので、「数え上げお姉さん」に聞くことにしよう。

→ You tube 「数え上げお姉さん」に聞いてみよう  
(JST ERATO 湊 離散構造処理系プロジェクト)

メモ

<問 7> 島に橋が架かっている。ここはパワースポットで、全ての橋を丁度一度ずつ渡ってお祈りをしたものだけに御利益があるそうだ。どの島から出発しても構わないので、全ての橋を丁度一度ずつ通りなさい。最後に訪れる島は元の島でなくてもよい。島は何度訪問しても構わないし、橋はどちら向きに渡っても構わないが、どの橋も使えるのは一回だけである。できるか？

できる場合はそのルートを示せ。できない場合は、どうやってもできないことを示せ。

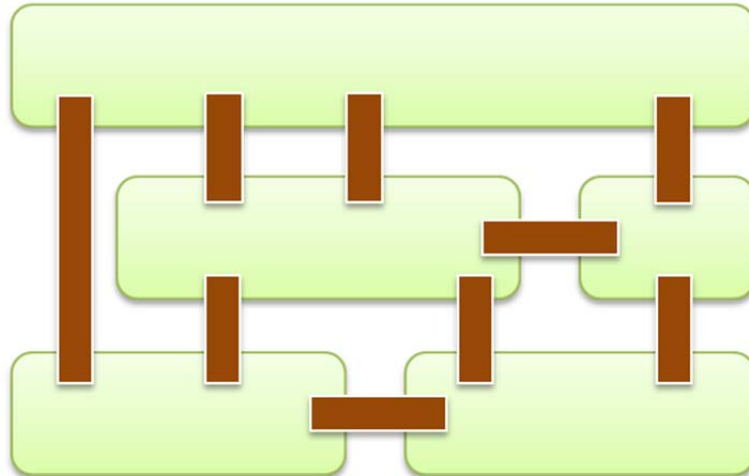


図 3.3 一度ずつ全ての橋を渡ろう

答えが「できる」の場合は『そのルートを示せば良い』が、「できない」と言いたい場合は、『なんとなくそう思う』『そんな気がする』『自分が試した限りではできなかった』では駄目で、「どのように工夫したとしても誰にも絶対にできない」ことを、論理的に導き出さねばならないことに注意せよ。この問題は、論理的な帰結でなければ答えが得られない場合がある問題である。

#### 《参考》

- ✓ オイラー閉路, オイラー路
- ✓ ハミルトン閉路, ハミルトン路
- ✓ ミレニアム懸賞問題, 7つの未解決問題 (クレイ数学研究所) :  $P \neq NP$  予想
- ✓ 一筆書きと巡回はどちらが難しい?

#### 《参考文献》

- ✚ 論理的思考に慣れる・手助けになる, 関連するお薦めの本
- ◇ 易 : W. J. Cook 「驚きの数学 巡回セールスマン問題」青土社 (2013)
- ◇ 易 : P. Gritzmann, R. Brandenberg 「最短経路の本」シュプリンガー (2007)
- ◇ 易 : 小島寛之 「算数の発想」NHK ブックス (2006)
- ◇ 普 : A. Levitin, M. Levitin 「アルゴリズム パズル」オライリー (2014)
- ◇ 難 : J. Matousek, J. Nešetřil 「離散数学への招待」上・下 シュプリンガー (2002)

メモ