

意思決定科学

ゲーム理論1

堀田 敬介

2016/10/25, Tue.~

Contents

- 🍪 ケーキを仲良く！
 - 🍪 アルゴリズムと解の性質
 - 🍪 The Steinhaus' loan divider procedure
 - 🍪 The Banach-Knaster last-dimisher procedure
- 🍪 ゲーム理論とは何か？
 - 🍪 ゲームの定義
- 🍪 2人非協力零和ゲーム
 - 🍪 ミニマックス原理と均衡解
 - 🍪 純粋戦略と混合戦略, ミニマックス定理
 - 🍪 2人零和ゲームと線形計画

ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた。
2人に均等に与えたいのだが、2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い、けんかになる。



どうしたら
いいだろう？



仮定: The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

ケーキを仲良く

- ◆ You Cut, I Choose ! (One divides, the other chooses.)
 - Bobにケーキを切らせ, Carolにケーキを選ばせる

ただし、これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」！
(Bobにどのように切らせるかの指定はない。Bobは自分の意思で切る)
(Carolにどのように選ばせるかの指定はない。Carolは自分の意思で選ぶ)

- ◆ 解は...
 - Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

ケーキを仲良く

◆「解」が持ってほしい2つの性質

- **proportionality** (An allocation is proportional.)
 - Each thinks he or she received a portion that has size or value of **at least** $1/n$.
- **envy-freeness** (An allocation is envy-free.)
 - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, **does not envy** any other player.

プレイヤーが2人の場合はこの2つの概念は等価

ケーキを仲良く（3人いたら？）

H. Steinhaus, 1948

◆ The Steinhaus' **lone-divider procedure** (3 players)

1. Bob がケーキを3分割するように切る (切り方は自由であることに注意)
- 2-1. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘
- 2-2. Ted も Carol と同様のことを行う。
(CarolもTedも、少なくとも1つは acceptable であることに注意)
3. case1: Carol (or Ted) が2個以上 acceptable cake がある場合
Ted→Carol→Bob (or Carol→Ted→Bob) の順にケーキを取る
- case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個の場合
Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて、残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う。

def.) call a piece **acceptable** to a player if he or she thinks the piece is at least $1/3$ of the cake.

ケーキを仲良く（3人いたら？）

◆ The Steinhaus' **loan-divider procedure** (3 plays)

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
 - Bobはちょうど $1/3$ (とBobが思う) piece に切る
 - Carol, Ted は acceptable cake を取る
- **envy-free ではない**
 - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが, Carol は Ted を妬む可能性がある。(Tedが、彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性がある)
 - case2: Carol, Ted は誰も妬まないが, Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある。(Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合, 2人のいずれかが $1/3$ 以上 (とBobが思う) cake を得るので)

ケーキを仲良く（n人いたら？）

H.W. Kuhn, 1967

◆ Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 plays) を n人版に拡張

- Frobenius & Konig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム)
- 4人版は Steinhaus も気づいていたらしい

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

◆ The **Banach-Knaster last-diminisher procedure**

- Steinhaus が 1948年に2人 (学生, ポーランド人) のアイデアを論文の形で発表
- ◆

ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- ◆ The Banach-Knaster **last-diminisher procedure**
 - The partners being ranged **A,B,C,...,N**.
 - **A** cuts from the cake **an arbitrary part**.
 - **B** **has** now **the right**, but is **not obliged**, to diminish **the slice** cut off.
 - Whatever he does, **C** has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice,
 - and so on up to **N**.
 - The rule obliges the **“last-diminisher”** to take as his part the slice he was **the last to touch**. This partner thus disposed of, the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake.
 - After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder.

(from “Fair Division”, p.35 [Steinhaus’ description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

- ◆ The last-diminisher procedure
 - **proportional division**を保証する各プレイヤーの戦略
 - 切るプレイヤーがちょうど1/nと考えるpieceに切ること
 - **envy-freeではない**
 - 理由:例えば、ゲームを先に抜けたプレイヤーAが、ある段階で切られたケーキが1/nより大きい(とAが思う)ときでもそれを阻止できない。結果として1/nより大きいケーキが誰か(例えばB)に行く(とAが思う)ので、AはBを妬む。

ゲーム理論とは何か？

- ◆ ゲーム的状况 game situations
 - 複数の意思決定主体(プレイヤー)が存在し、各々目的を持ち、その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ◆ ゲーム理論 game theory
 - ゲーム的状况を数理モデルを用いて定式化し、プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

 John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日(火) 取得の情報

ゲーム理論とは何か？

- ◆ プレイヤー player

プレイヤーの集合

$N = \{1, 2, \dots, n\}$

 - 意思決定し、行動する主体。(2人, 3人, ..., n人, ..., ∞)
 - 例:個人, 複数の個人から成る組織, 政党, 国家, ...
- ◆ 戦略 strategy

プレイヤーiの戦略集合

$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\} \quad (i \in N)$

 - プレイヤーが取りうる行動。(有限, 無限)
- ◆ 利得と利得関数 payoff

プレイヤーiの利得関数

$f_i: S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow R \quad (i \in N)$

 - 各プレイヤーの戦略決定後、ゲームは終了し、結果が出る。結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値。利得 payoff, 効用 utility.

ゲームの定義

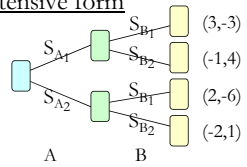
$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$

各プレイヤーは**自己の利得最大化**を目指し、**G**は全てのプレイヤーの**共有知識**とする

ゲーム理論とは何か？

◆ ゲームの表現形式

- 展開形 extensive form



- 戦略形 strategic form, 標準形 normal form

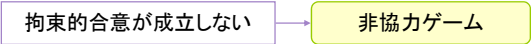
A \ B	SB1	SB2
SA1	3	1
SA2	-4	6

ゲーム理論とは何か？

◆ 非協力ゲームと協力ゲーム

- 各プレイヤーの戦略決定における前提

- プレイヤー間には、各プレイヤーがとるべき戦略について、強制力のある取り決めは存在しない。



- 全てのプレイヤー間に、とるべき戦略についての合意が成り立ち、それに基づいて戦略決定する。



ゲーム理論とは何か？

出展:「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

◆ 例) 喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中

- 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は、A=600人、B=300人
- 両店舗が別々の地域に出店すると、見込み客を全て獲得できる
- 両店舗が同じ地域に出店すると、スタボがダタールの2倍の客を獲得
- 同時にどちらか1地域に必ず出店(両方出店や出店中止はない)

◆ 問:ダタールはどちらに出店すべきか？ またそれは何故か？

ダタ \ スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

◆ 検討

- マキシミン基準(悲観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- マキシマックス基準(楽観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- ラプラス基準(平均値) → A地域へ出店せよ
- ゲーム理論による解答 → B地域へ出店せよ

「1人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用であるゲーム」では解が異なる！

2人非協力零和ゲーム

2人非協力零和ゲーム

◆ Example1:

2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」をしている

$N=\{1, 2\}$

プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}, (i \in N)$

2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち, 異なるならBさんの勝ち

$S_1=\{\text{表}, \text{裏}\}, S_2=\{\text{表}, \text{裏}\}$

表を出して勝ったら相手から2円貰い, 裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$f_i : S_1 \times S_2 \rightarrow R, (i \in N)$

$f_1(\text{表}, \text{表}) = 2 + f_2(\text{表}, \text{表}) = -2 = 0$

$f_1(\text{表}, \text{裏}) = -1 + f_2(\text{表}, \text{裏}) = 1 = 0$

$f_1(\text{裏}, \text{表}) = -2 + f_2(\text{裏}, \text{表}) = 2 = 0$

$f_1(\text{裏}, \text{裏}) = 1 + f_2(\text{裏}, \text{裏}) = -1 = 0$

A君の利得表

A \ B	表	裏
表	2	-1
裏	-2	1

Bさんの利得表

A \ B	表	裏
表	-2	1
裏	2	-1

2人非協力零和ゲーム

◆ Example2:

A君とBさんがゲームをしている. それぞれ3つずつの戦略があり, A君の利得表は以下の通りである. 2人は, 各々どんな戦略をとるべきか?

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-2	4	-1
s_{A2}	2	2	1
s_{A3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理 minimax principle

Example2でプレイヤーAの思考

最大化プレイヤー

戦略 s_{A1} を取ったときの最悪の事態は

$\min(-2, 4, -1) = -2$ (プレイヤーBが戦略 s_{B1} を取る)

戦略 s_{A2} を取ったときの最悪の事態は

$\min(2, 2, 1) = 1$ (プレイヤーBが戦略 s_{B3} を取る)

戦略 s_{A3} を取ったときの最悪の事態は

$\min(4, -3, 0) = -3$ (プレイヤーBが戦略 s_{B2} を取る)

戦略 s_{A2} を取る (最悪でも利得1が保証される)

もっと良い利得を得ることができるのか?

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理 minimax principle

Example2でプレイヤーAがBの立場で思考

Bが戦略 s_{B1} を取ったとき, Aである自分は戦略 s_{A3} を取る

$\max(-2, 2, 4) = 4$

Bが戦略 s_{B2} を取ったとき, Aである自分は戦略 s_{A1} を取る

$\max(4, 2, -3) = 4$

Bが戦略 s_{B3} を取ったとき, Aである自分は戦略 s_{A2} を取る

$\max(-1, 1, 0) = 1$

戦略 s_{B3} を取る (最悪でも損失1で済む)

Aは戦略 s_{A2} を取るとき, 利得1を得られ, それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる.

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理

• Example2:

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}	min	max	
s _{A1}	-2	4	-1	-2	1	
s _{A2}	2	2	1	1		
s _{A3}	4	-3	0	-3		
max	4	4	1	1		
min						

マキシミン値
maximin value
 $v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

マキシミン原理
maximin principle
[最大化プレイヤーの行動原理]

ミニマックス値
minimax value
 $v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス原理
minimax principle
[最小化プレイヤーの行動原理]

$v_1 = v_2$

2人非協力零和ゲーム

◆ 均衡点とゲームの値

• 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると、どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！

何らかの意味での均衡に到達

$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$

2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

(s_{A2}^*, s_{B3}^*) : ゲームの均衡点 equilibrium point

やむをえない...

しかたない...

演習1:

◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうか？ (1), (2)それぞれのゲームについて考えよ

(1)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	3	1	-1
s _{A2}	-1	0	2
s _{A3}	5	2	3

(2)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	5	6	4
s _{A2}	1	8	2
s _{A3}	7	2	3

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example3:

A君とBさんがゲームをしている。それぞれ3つずつの戦略があり、A君の利得表は以下の通りである。2人は、各々どんな戦略をとるべきか？

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}
s _{A1}	-4	2	0
s _{A2}	4	3	1
s _{A3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example3:

A \ B	s _{B1}	s _{B2}	s _{B3}	min	max	
s _{A1}	-4	2	0	-4	1	
s _{A2}	4	3	1	1		
s _{A3}	1	-3	2	-3		
max	4	3	2	2		
min						

マキシミン戦略

$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない! ?

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Proposition1

利得行列A=[a_{ij}]が与えられた時、以下が成り立つ

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない!

↓

いかなる場合に均衡点が存在し、ゲームが厳密に確定的であるか?

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• 鞍点 saddle point

• 行列A=[a_{ij}]において、任意の i, j に対し、

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$$

が成り立つとき、(i₀, j₀)をこの行列の鞍点といい、a_{i₀j₀}を鞍点値という。

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

鞍点 a_{i₀j₀}

maximin player の視点

minimax player の視点

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Theorem1

• (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は、その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること。またこのとき、鞍点が均衡点。

• 最適戦略 optimal strategy

• 均衡点(i*, j*)は鞍点なので、プレイヤーAが戦略i*を用いると、プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくともv(A)を得ることができ、また、Bが戦略j*を取る限り、Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない。

戦略 i* がAの最適戦略

Confidential

7

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

Theorem2

厳密に確定的な零和ゲームにおいて、均衡点が複数ある場合、各均衡点の値は等しい。また、 (i^*, j^*) , (i_0, j_0) が均衡点ならば、 (i^*, j_0) , (i_0, j^*) も均衡点である。

i_0

i^*

j_0

j^*

$a_{i_0 j_0}$

$a_{i_0 j^*}$

$a_{i^* j_0}$

$a_{i^* j^*}$

均衡戦略は交換可能

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

Example3:

$A \setminus B$	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

主体的な賭、最適な賭の確率

期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

Example3:

$q_j \geq 0, (j = 1, 2, 3)$
 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

$A \setminus B$	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

$p_1 \geq 0, (i = 1, 2, 3)$
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

混合戦略
mixed strategy

純粋戦略
pure strategy

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

Example3:

$A \setminus B$	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

player Aの期待効用 (player A = 期待効用最大化プレイヤー = maximin player)

$E_1(p, s_{B1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3$ ← player B が戦略 s_{B1} の時の期待効用

$E_1(p, s_{B2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3$ ← player B が戦略 s_{B2} の時の期待効用

$E_1(p, s_{B3}) = p_2 + 2p_3$ ← player B が戦略 s_{B3} の時の期待効用

player Bの期待損失 (player B = 期待損失最小化プレイヤー = minimax player)

$E_2(s_{A1}, q) = -4q_1 + 2q_2$ ← player A が戦略 s_{A1} の時の期待損失

$E_2(s_{A2}, q) = 4q_1 + 3q_2 + q_3$ ← player A が戦略 s_{A2} の時の期待損失

$E_2(s_{A3}, q) = q_1 - 3q_2 + 2q_3$ ← player A が戦略 s_{A3} の時の期待損失

補足: A, Bが各々混合戦略 $(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3)$ のとき

$E_1(p, q) = E(p, s_{B1})q_1 + E(p, s_{B2})q_2 + E(p, s_{B3})q_3$

$E_2(p, q) = E(s_{A1}, q)p_1 + E(s_{A2}, q)p_2 + E(s_{A3}, q)p_3$

$E(p, q) := E_1(p, q) = E_2(p, q)$

Confidential

9

2人非協力零和ゲーム

◆ 最適混合戦略

- Example3:
 - player A = 期待効用最大化プレイヤー = maximin player

$\begin{cases} E(\mathbf{p}, (1, 0)) = 6p_2 - 3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B_2} \text{ の時の期待効用} \\ E(\mathbf{p}, (0, 1)) = -p_2 + 2 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B_3} \text{ の時の期待効用} \end{cases}$
 - player B = 期待損失最小化プレイヤー = minimax player

$\begin{cases} E((1, 0), \mathbf{q}) = 2q_2 + 1 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A_2} \text{ の時の期待損失} \\ E((0, 1), \mathbf{q}) = -3q_2 + 2 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A_3} \text{ の時の期待損失} \end{cases}$

	q_2	q_3
A \ B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	3	1
p_3	-3	2

Aの最適戦略
 $\mathbf{p}^* = (0, 5/7, 2/7)$

Bの最適戦略
 $\mathbf{q}^* = (0, 1/7, 6/7)$

$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$: 均衡解

2人非協力零和ゲーム

	q_2	q_3
$A \setminus B$	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3
p_3	s_{A_3}	-3

◆ 最適混合戦略

- Example3:

player A
maximin player

player B
minimax player

player A

player B

2人非協力零和ゲーム

- 混合戦略の意味
 - p^*, q^* の確率のくじをつくって、引いていずれかに決する方法が、なぜ合理的な決定方法なのか？

Aの最適戦略 $p^*=(0, 5/7, 2/7)$ Bの最適戦略 $q^*=(0, 1/7, 6/7)$
 - player A は S_{A_2} なら 3, S_{A_3} なら 2 が望ましいが、 $p_2^*q_3^* + p_3^*q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる。

しかし、これは事後的  しまった！
- このような状況も全て考慮に入れた上で、最適戦略が決定された！

	q_2	q_3
$A \setminus B$	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2 s_{A_2}	3	1
p_3 s_{A_3}	-3	2

演習2:

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうなるか？

(1)

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

(2)

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

(3)

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}
s_{A_1}	3	1	3	4
s_{A_2}	4	4	2	3
s_{A_3}	2	3	1	2

(4)

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	2	4
s_{A_2}	-1	3	0
s_{A_3}	2	1	-2

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
 - プレイヤーA, Bの純粋戦略
 $S_A = \{s_{A_i} \mid i=1, \dots, m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j=1, \dots, n\}$
 - プレイヤーAの利得行列 (Bの損失行列)

$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

利得関数
 $E(p, q) = p^T A q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$
 - プレイヤーA, Bの混合戦略

$p = (p_1, \dots, p_m) \rightarrow s_{A_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$
 $\begin{cases} p_1 + \dots + p_m = 1 \\ p_1, \dots, p_m \geq 0 \end{cases}$
 $q = (q_1, \dots, q_n) \rightarrow s_{B_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$
 $\begin{cases} q_1 + \dots + q_n = 1 \\ q_1, \dots, q_n \geq 0 \end{cases}$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
 - プレイヤーAの保証水準
 $\min_q E(p, q) \rightarrow v_1 = \max_p \min_q E(p, q)$

p を操作して 期待利得最大
 - プレイヤーBの保証水準
 $\max_p E(p, q) \rightarrow v_2 = \min_q \max_p E(p, q)$

q を操作して 期待損失最小
 - Proposition2**

$\max_p \min_q E(p, q) \leq \min_q \max_p E(p, q)$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

Theorem3

$$\max_p \min_q E(p, q) = \min_q \max_p E(p, q)$$

また、これを成立させる戦略の組 (p^*, q^*) を **均衡点** といい、均衡点における利得 $v(A)$ をゲームの値という。

$$v(A) := p^{*T} A q^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

Theorem4

戦略の組 (p^*, q^*) が均衡点であるための必要十分条件は、 (p^*, q^*) が関数 $E(p, q)$ の**鞍点**であること。即ち、
 $\forall p, q, \underline{E(p, q^*)} \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, q)$ が成立すること。

Bが q^* の時、Aは p^* にするのが**利得最大**

Aが p^* の時、Bは q^* にするのが**損失最小**

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

Theorem5

$v(A)$ がゲームの値、 (p^*, q^*) が均衡点であるための必要十分条件は
 $\forall i, j, \underline{E(s_{A_i}, q^*)} \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, s_{B_j})$ が成立すること。

$$\forall i = 1, \dots, m, \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq E(p^*, q^*)$$
$$\forall j = 1, \dots, n, E(p^*, q^*) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

Example4

A \ B	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
s_{B_1}	-2	-1	2	3	3
s_{A_1}	-2	-1	2	3	3
s_{A_2}	5	2	4	-1	0
s_{A_3}	4	1	3	-2	-1

$E(p, s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$
 ~~$E(p, s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2$~~
 $E(p, s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$
 $E(p, s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$
 ~~$E(p, s_{B_5}) = 3p_1$~~

$p^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0)$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

Example5: 一般の 2×2 ゲーム

A \ B	q_1	q_2
s_{B_1}	a_{11}	a_{12}
s_{A_1}	a_{11}	a_{12}
s_{A_2}	a_{21}	a_{22}

鞍点が存在すればそれが**均衡点**。
なければ、混合戦略を考えるが、このとき、必ず $E(p, s_{B_1})$ と $E(p, s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1}, q)$ と $E(s_{A_2}, q)$ は交点を持つ。

均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \right)$$
$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}} \right)$$

$$\begin{cases} E(p, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(p, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \\ E(s_{A_1}, q) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}, q) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

演習3:

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える。プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると、ゲームの解はどうか？

(1)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}
s _{A1}	4	-2
s _{A2}	-3	3

(2)

A \ B	s _{B1}	s _{B2}
s _{A1}	3	1
s _{A2}	-1	5

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
 - プレイヤーAの利得行列と混合戦略 p

$$\begin{matrix} & s_{B1} & s_{B2} & \cdots & s_{Bn} \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

まとめると...

$$\begin{aligned} \max. & u \\ \text{s.t.} & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} E(p, s_{B1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(p, s_{B2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \vdots \\ E(p, s_{Bn}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$
$$\max_p \min \{E(p, s_{B1}), E(p, s_{B2}), \dots, E(p, s_{Bn})\}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
 - プレイヤーBの損失行列 (Aの利得行列) と混合戦略 q

$$\begin{matrix} & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

まとめると...

$$\begin{aligned} \min. & w \\ \text{s.t.} & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \cdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} E(s_{A1}, q) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ E(s_{A2}, q) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \vdots \\ E(s_{Am}, q) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \end{cases}$$
$$\min_q \max \{E(s_{A1}, q), E(s_{A2}, q), \dots, E(s_{Am}, q)\}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題
(LPの主問題: **P**)

プレイヤーBの最適化問題
(LPの双対問題: **D**)

$$\begin{aligned} \max. & u \\ \text{s.t.} & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min. & w \\ \text{s.t.} & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \cdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{aligned}$$

注) (P) (D)ともに自明解 ($p=(1,0,\dots,0), q=(1,0,\dots,0)$)があるので実行可能。
→ 双対定理より、最適解が存在し、最適値は一致する

Theorem6

(P), (D)の最適解が $(p^*, u^*), (q^*, w^*)$ のとき、 (p^*, q^*) がゲームの均衡点であり、 $v := u^* = w^*$ がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- Example6:じゃんけん

A \ B				min	max	
	0	2	-7	-7	-2	
	-2	0	4	-2		
	7	-4	0	-4		
max	7	2	4	$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$ $\times$ $2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$		
min	2					

マキシミン戦略

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも、支配戦略は存在しない。
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない。

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- Example6:じゃんけん

	q_1	q_2	q_3
A \ B			
p_1	0	2	-7
p_2	-2	0	4
p_3	7	-4	0

$$\begin{array}{ll} \max. & u \\ \text{s.t.} & -2p_2 + 7p_3 \geq u \\ & 2p_1 - 4p_3 \geq u \\ & -7p_1 + 4p_2 \geq u \\ & p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min. & w \\ \text{s.t.} & 2q_2 - 7q_3 \leq w \\ & -2q_1 + 4q_3 \leq w \\ & 7q_1 - 4q_2 \leq w \\ & q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{array}$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692), u^* = 0$
 $(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (0.538462, 0.153846, 0.307692), w^* = 0$

演習4:

◆ LPによる均衡解の求解

- 2人のプレイヤーA, Bは、プレイヤーAの利得行列(Bの損失行列)が以下で与えられるゲームをする。各プレイヤーの問題をLPで表し、均衡解とゲームの値を求めよ。

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}	s_{B4}	s_{B5}
s_{A1}	1	5	-2	-4	3
s_{A2}	4	-1	3	2	-7
s_{A3}	-4	3	6	-2	2
s_{A4}	1	6	-4	3	-3
s_{A5}	-3	-6	4	5	1

参考文献

- S.J. Brams & A.D. Taylor, "Fair Division", Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2008)
- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣(2000)
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2001)
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版(2003)
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房(2005)
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)