意思決定科学： ゲーム理論2

情報学部 堀田敬介

2016/11/15,Tue. ～

Contents

2人非協力非零和ゲーム

- **Example**：
  - プレイヤーはAとBの2人
  - 各プレイヤーは，独立に自分の戦略を決定（非協力）
  - プレイヤーの利得の和は一定とは限らない（非零和）
  - 純粋戦略の数は有限

$N=\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}, (i=\mathrm{A,B})$

$S_\mathrm{A}=\{s_{\mathrm{A}1}, s_{\mathrm{A}2}\}, S_\mathrm{B}=\{s_{\mathrm{B}1}, s_{\mathrm{B}2}\},$

$f_i : S_\mathrm{A} \times S_\mathrm{B} \to R, (i=\mathrm{A,B})$

$f_\mathrm{A}(s_{\mathrm{A}1}, s_{\mathrm{B}1}) = 2 + f_\mathrm{B}(s_{\mathrm{A}1}, s_{\mathrm{B}1}) = 3 \neq 0$
$f_\mathrm{A}(s_{\mathrm{A}1}, s_{\mathrm{B}2}) = -1 + f_\mathrm{B}(s_{\mathrm{A}1}, s_{\mathrm{B}2}) = -2 \neq 0$
$f_\mathrm{A}(s_{\mathrm{A}2}, s_{\mathrm{B}1}) = -2 + f_\mathrm{B}(s_{\mathrm{A}2}, s_{\mathrm{B}1}) = -1 \neq 0$
$f_\mathrm{A}(s_{\mathrm{A}2}, s_{\mathrm{B}2}) = 1 + f_\mathrm{B}(s_{\mathrm{A}2}, s_{\mathrm{B}2}) = 1 \neq 0$

A，Bの利得表

A＼B	$s_{\mathrm{B}1}$	$s_{\mathrm{B}2}$
$s_{\mathrm{A}1}$	(2, 3)	(-1,-2)
$s_{\mathrm{A}2}$	(-2,-1)	(1,1)

2人非協力非零和ゲーム

- 双行列ゲーム
  - 利得関数

和が零（一定）という条件はない（非零和）

$$\forall i, j, \quad f_A(s_{A_i}, s_{B_j}) = a_{ij}, \quad f_B(s_{A_i}, s_{B_j}) = b_{ij}$$

  - 利得行列

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \ \boldsymbol{B} = [b_{ij}]$$

プレイヤーBの戦略（n個）の利得（右側）

プレイヤーA の戦略（m個） の利得（左側）

$$\begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix} =: (A, B)$$

双行列

2人非協力非零和ゲーム

性の戦い，男女の戦い，逢引きのジレンマ，…

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**
  - ある一組のカップルがデートをしたいと思っている
  - 男性は野球観戦を希望し，女性は映画鑑賞がしたい
  - 各々が好きなものを見るより一緒にいることの方が大事

男＼女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$\max_i \min_j a_{ij} = -1$

$\max_i \min_j b_{ij} = -1$

互いに支配戦略は持たない
ミニマックス原理に従うと，互いにどちらの戦略でも良い？
（または各戦略のマックスが大きくなる方を選ぶ！？）

2人非協力非零和ゲーム

男＼女	q_1 野球	q_2 映画
p_1 野球	(2,1)	(-1,-1)
p_2 映画	(-1,-1)	(1,2)

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**
  - 零和ゲームの時と同じ方法で，混合戦略で期待利得最大化すると…

$$\begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 2p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + p_2q_2 \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + 2p_2q_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},(1,0)) = 3p_1 - 1 \\ E_A(\boldsymbol{p},(0,1)) = -2p_1 + 1 \end{cases} \begin{cases} E_B((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_1 - 1 \\ E_B((0,1),\boldsymbol{q}) = -3q_1 + 2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \left((\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5}),(\tfrac{3}{5},\tfrac{2}{5}) \right),\ E_A(\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{5},\ E_B(\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{5}$$

ところが…

$$E_A(\boldsymbol{p},\hat{\boldsymbol{q}}) = p_1 - \frac{1}{5} \qquad E_B(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q}) = -q_1 + \frac{4}{5}$$

Bが $\hat{\boldsymbol{q}}$ をとるなら**A**は $\hat{\boldsymbol{p}}$ ではなく(1,0)にする方が期待利得が高くなる！

Aが $\hat{\boldsymbol{p}}$ をとるなら**B**は $\hat{\boldsymbol{q}}$ ではなく(0,1)にする方が期待利得が高くなる！

均衡しない

※零和ゲームの場合は，「**A**の利得＝**B**の損失」のため，ミニマックス原理による戦略決定が上手くいったが，非零和ゲームでは，互いの利得に関連がないため，これでは上手くいかない

2人非協力非零和ゲーム

2人零和ゲームでは，ミニマックス原理は最適応答原理に帰着

- **Definition** 最適応答と最適応答対応
  - 最適応答 **best response**
    - プレイヤーAの戦略 $\bar{s}_A \in S_A$ が，プレイヤーBの戦略 $s_B \in S_B$ に対する**最適応答**であるとは，以下が成り立つこと

$$f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \longleftarrow \text{純粋戦略の場合}$$

$$E_A(\bar{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p}} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longleftarrow \text{混合戦略の場合}$$

  - 最適応答対応 **best response correspondence**
    - Bの戦略 $s_B \in S_B$ に対するAの最適応答の集合

$$R_A(s_B) = \left\{ \bar{s}_A \in S_A \middle| f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \right\} \longleftarrow \text{純粋戦略の場合}$$

$$R_A(\boldsymbol{q}) = \left\{ \boldsymbol{p} \middle| E_A(\bar{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p}} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right\} \longleftarrow \text{混合戦略の場合}$$

を，**プレイヤーAの最適応答対応**とよび，

$$D_A = \left\{ (s_A, s_B) \middle| s_A \in R_A(s_B), s_B \in S_B \right\}$$

を，プレイヤーAの**最適応答集合**とよぶ

最適応答原理

2人非協力非零和ゲーム

- 最適応答と最適応答対応
  - プレイヤーA，Bが各々最適応答をとる場合，その組の集合は

$$D := D_A \cap D_B \longleftarrow \text{互いに最適応答なら均衡する（}D \neq \varnothing\text{なら均衡）}$$

となる

- 例：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	(7,7)	(0,8)	(5,5)
s_{A_2}	(8,0)	(6,6)	(2,7)
s_{A_3}	(4,5)	(3,1)	(6,2)

プレイヤーBの（純戦略での）最適応答

$s_{A_1} \to \max\{7,8,5\} = 8 \quad R_B(s_{A_1}) = \{s_{B_2}\}$

$s_{A_2} \to \max\{0,6,7\} = 7 \quad R_B(s_{A_2}) = \{s_{B_3}\}$

$s_{A_3} \to \max\{5,1,2\} = 5 \quad R_B(s_{A_3}) = \{s_{B_1}\}$

$$D_B = \left\{ (s_{A_2}, s_{B_3}), (s_{A_1}, s_{B_2}), (s_{A_3}, s_{B_1}) \right\}$$

プレイヤーAの（純戦略での）最適応答

$s_{B_1} \to \max\{7,8,4\} = 8 \quad R_A(s_{B_1}) = \{s_{A_2}\}$

$s_{B_2} \to \max\{0,6,3\} = 6 \quad R_A(s_{B_2}) = \{s_{A_2}\}$

$s_{B_3} \to \max\{5,2,6\} = 6 \quad R_A(s_{B_3}) = \{s_{A_3}\}$

$$D_A = \left\{ (s_{A_2}, s_{B_1}), (s_{A_2}, s_{B_2}), (s_{A_3}, s_{B_3}) \right\}$$

$D = \varnothing$ より，純粋戦略のみでは均衡しない

2人非協力非零和ゲーム

Nash均衡点は，零和ゲームの均衡点（鞍点）を含む一般的な概念

- **Definition Nash均衡点 Nash equilibrium point**
  - （混合）戦略の組$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ が次の条件を満たすとき，$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ を**Nash均衡点**とよぶ

$$E_A(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \geq E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \quad \forall \boldsymbol{p} \leftarrow \text{Bがq*をとるならAはp*がベスト}$$
$$E_B(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \geq E_B(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}) \quad \forall \boldsymbol{q} \leftarrow \text{Aがp*をとるならBはq*がベスト}$$

- **Theorem 1**
  - （混合）戦略の組 $(\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}})$ が互いに最適応答であるならば**Nash**均衡点であり，逆も成り立つ．即ち，**Nash**均衡点の集合をEとすると， $E = D_A \cap D_B$
- **Theorem 2**
  - （混合）戦略の組$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ が**Nash**均衡点であるための必要十分条件は

$$E_A(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \geq E_A(s_{A_i},\boldsymbol{q}^*) \quad \forall i = 1,\cdots,m$$
$$E_B(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \geq E_B(\boldsymbol{p}^*,s_{B_j}) \quad \forall j = 1,\cdots,n$$

2人非協力非零和ゲーム

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1\text{-}q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1\text{-}p \end{array} & \begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) \end{bmatrix} \end{array} = [\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}] \qquad \begin{cases} 0 \leq p \leq 1, \\ 0 \leq q \leq 1 \end{cases}$$

プレイヤー**A,B**が混合戦略をとったときのそれぞれの期待利得

$$\begin{aligned} E_A(p,q) &= a_{11}pq + a_{21}(1-p)q + a_{12}p(1-q) + a_{22}(1-p)(1-q) \\ &= \{(a_{11}-a_{21})+(a_{22}-a_{12})\}pq - (a_{22}-a_{12})p + (a_{21}-a_{22})q + a_{22} \\ &= (\bar{r}+\hat{r})pq - \hat{r}p + \tilde{r}q + a_{22} \\ &= \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p + \tilde{r}q + a_{22} \end{aligned}$$

ただし$\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} \end{cases}$

$$\begin{aligned} E_B(p,q) &= b_{11}pq + b_{21}(1-p)q + b_{12}p(1-q) + b_{22}(1-p)(1-q) \\ &= \{(b_{11}-b_{21})+(b_{22}-b_{12})\}pq - (b_{22}-b_{12})p + (b_{21}-b_{22})q + b_{22} \\ &= (\bar{c}+\hat{c})pq - \hat{c}p + \tilde{c}q + b_{22} \\ &= \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}q - \hat{c}p + b_{22} \end{aligned}$$

ただし$\begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} \end{cases}$

2人非協力非零和ゲーム

Theorem 2
(p,q)が**Nash**均衡解 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((1,0),\boldsymbol{q}) \\ E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((0,1),\boldsymbol{q}) \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(1,0)) \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(0,1)) \end{cases}$

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**
  - プレイヤー**A**の最適応答 p は**Theorem2**より

$$\begin{cases} E_A(p,q) \geq E_A(1,q) \\ E_A(p,q) \geq E_A(0,q) \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p + \tilde{r}q + a_{22} \geq \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}1 + \tilde{r}q + a_{22} \\ \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p + \tilde{r}q + a_{22} \geq \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}0 + \tilde{r}q + a_{22} \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}(1-p) \leq 0 \\ \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p \geq 0 \end{cases}$$

  - 故に，**B**の戦略 q に対する**A**の最適応答 p は

$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} > 0$となる$q$ に対しては $\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ p \geq 0 \end{cases} \rightarrow p = 1$

$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} = 0$となる$q$ に対しては $\begin{cases} 1-p\text{: 任意} \\ p\text{: 任意} \end{cases} \rightarrow p\text{: 任意}$

$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} < 0$となる$q$ に対しては $\begin{cases} 1-p \geq 0 \\ p \leq 0 \end{cases} \rightarrow p = 0$

2人非協力非零和ゲーム

Theorem 2
(p,q)が**Nash**均衡解 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((1,0),\boldsymbol{q}) \\ E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((0,1),\boldsymbol{q}) \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(1,0)) \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(0,1)) \end{cases}$

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**
  - プレイヤー**B**の最適応答 q は**Theorem2**より

$$\begin{cases} E_B(p,q) \geq E_B(p,1) \\ E_B(p,q) \geq E_B(p,0) \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}q - \hat{c}p + b_{22} \geq \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}1 - \hat{c}p + b_{22} \\ \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}q - \hat{c}p + b_{22} \geq \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}0 - \hat{c}p + b_{22} \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}(1-q) \leq 0 \\ \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}q \geq 0 \end{cases}$$

  - 故に，**A**の戦略 p に対する**B**の最適応答 q は

$(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c} > 0$となる$p$ に対しては $\begin{cases} 1-q \leq 0 \\ q \geq 0 \end{cases} \rightarrow q = 1$

$(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c} = 0$となる$p$ に対しては $\begin{cases} 1-q\text{: 任意} \\ q\text{: 任意} \end{cases} \rightarrow q\text{: 任意}$

$(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c} < 0$となる$p$ に対しては $\begin{cases} 1-q \geq 0 \\ q \leq 0 \end{cases} \rightarrow q = 0$

2人非協力非零和ゲーム

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**
  - 例：

	q	$1\text{-}q$
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p	s_{A_1}	(6,5)	(2,7)
$1\text{-}p$	s_{A_2}	(3,4)	(6,1)

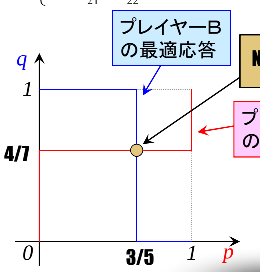
$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} = 6 - 3 = 3 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 6 - 2 = 4 \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} = 3 - 6 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} = 5 - 4 = 1 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = 1 - 7 = -6 \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} = 7q - 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} q > 4/7 \rightarrow p := 1 \\ q = 4/7 \rightarrow p : \text{任意} \\ q < 4/7 \rightarrow p := 0 \end{cases}$$

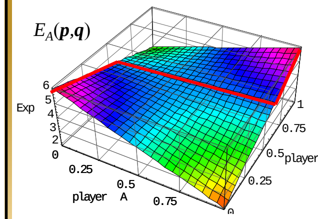
$$(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c} = -5p + 3$$

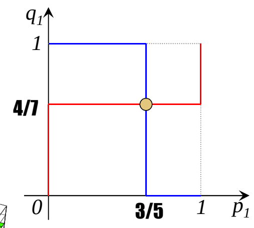
$$\rightarrow \begin{cases} p < 3/5 \rightarrow q := 1 \\ p = 3/5 \rightarrow q : \text{任意} \\ p > 3/5 \rightarrow q := 0 \end{cases}$$

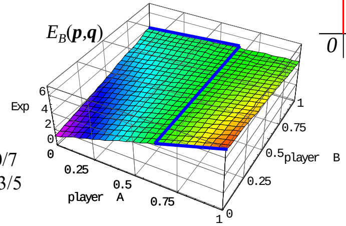


2人非協力非零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(6,5)	(2,7)
s_{A_2}	(3,4)	(6,1)







$E_A(\boldsymbol{p},(4/7,3/7))=30/7$
$E_B((3/5,2/5),\boldsymbol{q})=23/5$

2人非協力非零和ゲーム

- **Theorem 3**
  - （混合戦略まで拡大すると，）双行列ゲームには，少なくとも**1**つ**Nash**均衡点が存在する
- **Theorem 4**（**cf. Theorem 2**）
  - （混合）戦略の組（p^*,q^*）が**Nash**均衡点であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ が写像 $R_A(\boldsymbol{q})\times R_B(\boldsymbol{p})$ の不動点であること．即ち，
  $$\boldsymbol{p}^* \times \boldsymbol{q}^* \in R_A(\boldsymbol{q}^*) \times R_B(\boldsymbol{p}^*)$$

↑

戦略の組が均衡点であるための必要十分性（**Theorem 2, 4**など）
の証明は，「**Brouwer**の不動点定理」「角谷の不動点定理」などから

演習1：

- 次の双行列ゲームの**Nash**均衡点を求めよ

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(-2 , 1)	(4 , 6)
s_{A_2}	(6 , -8)	(-2 , 2)

Coffee Brake!

- **John F. Nash (1928-)**
  - 紹介サイトの情報
    - **Non-Cooperative Games Nash [pdf]**
  - **A Beautiful Mind**

いずれも**2004**年**11**月**9**日(火)取得の情報

補足:2人非協力零和ゲーム

零和ゲームの場合は
➢最適応答戦略
➢ミニマックス戦略
いずれの考え方でも均衡解を求められるよ

- **2**人非協力零和ゲームの**Nash**均衡点
  - 例:プレイヤー**A**の利得表

		q_1	q_2
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p_1	s_{A_1}	3	-2
p_2	s_{A_2}	-1	4

$$\begin{cases}\bar{r}=a_{11}-a_{21}=3-(-1)=4\\ \hat{r}=a_{22}-a_{12}=4-(-2)=6\\ \tilde{r}=a_{21}-a_{22}=(-1)-4=-5\end{cases}$$

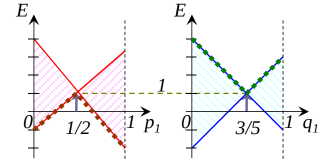
$$(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=10q_1-6 \rightarrow \begin{cases}q_1>3/5\rightarrow p_1:=1\\ q_1=3/5\rightarrow p_1:\text{任意}\\ q_1<3/5\rightarrow p_1:=0\end{cases}$$

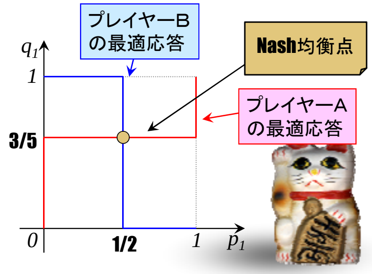
$$\begin{cases}\bar{c}=b_{11}-b_{21}=(-3)-1=-4\\ \hat{c}=b_{22}-b_{12}=(-4)-2=-6\\ \tilde{c}=b_{21}-b_{22}=1-(-4)=5\end{cases}$$

$$(\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=-10p_1+5 \rightarrow \begin{cases}p_1<1/2\rightarrow q_1:=1\\ p_1=1/2\rightarrow q_1:\text{任意}\\ p_1>1/2\rightarrow q_1:=0\end{cases}$$

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=10p_1q_1-6p_1-5q_1+4$$

$$\begin{cases}E(\boldsymbol{p},(1,0))=4p_1-1\\ E(\boldsymbol{p},(0,1))=-6p_1+4\end{cases},\quad \begin{cases}E((1,0),\boldsymbol{q})=5q_1-2\\ E((0,1),\boldsymbol{q})=-5p_1+4\end{cases}$$





2人非協力非零和ゲーム

- 例2:囚人のジレンマ **prisoner's dilemma**
  - 2人の凶悪犯が別個に取り調べを受けている
  - 現状では証拠不十分で軽い罪でしか起訴できないため,2人とも**3**年
  - 各囚人は司法取引を持ちかけられ,応じた方は**1**年,応じない方は**10**年,ただし,2人ともが応じた場合は2人とも**8**年

A＼B	黙秘	自白
黙秘	(3,3)	(10,1)
自白	(1,10)	(8,8)

注意:値が小さい方が嬉しい!

※司法取引:被告が自分の罪を認める代わりに罪を軽くしてもらうこと

2人非協力非零和ゲーム

- 例2:囚人のジレンマ **prisoner's dilemma**

		q_1	q_2
	A＼B	黙秘	自白
p_1	黙秘	(3,3)	(10,1)
p_2	自白	(1,10)	(8,8)

注意:値が小さい方が嬉しい!

明らかにもっと良い解がある
Pareto最適でない!

各プレイヤーとも,「自白」が支配戦略! 結果として,
(自白,自白)が**Nash**均衡点であり,ゲームは支配可解

最適応答原理に従って考えても…,

$$D_A=\{((0,1),\boldsymbol{q})\,|\,\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{q}\le\boldsymbol{1}\}$$

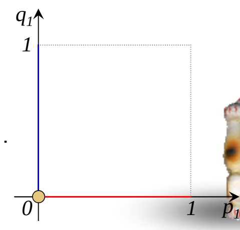
$$D_B=\{(\boldsymbol{p},(0,1))\,|\,\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{p}\le\boldsymbol{1}\}$$

$$\longrightarrow D:=D_A\cap D_B=\{((0,1),(0,1))\}$$

最適応答原理に従ってまじめに計算しても…

$$\begin{cases}(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=0q_1-2<0\\ (\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=0p_1-2<0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}p_1=0\\ q_1=0\end{cases}$$

注意:±逆で計算



2人非協力非零和ゲーム

- **Nash**均衡点が最適戦略か？
  - **2**人零和ゲーム
    - ミニマックス戦略が最適戦略！ ← 行動の指針を与えてくれる
  - **2**人非零和ゲーム
    - **Nash**均衡点が最適戦略を与えるわけではない！
    - ゲームの値が異なる複数の均衡点が存在する場合がある！
    - **Nash**均衡点は，必ずしも**Pareto**最適ではない！

→ 最適応答原理は不十分かも…！？
（しかし他に適切なものがあるか？）

Nash均衡点の精緻化
協力ゲームへの転換

非協力ゲーム
•得られる解の状態を示すことで，何らかの均衡戦略をとるべきことを教える
•均衡状態が複数あることを示すことで，戦略決定判断が困難であることも教える

戦略形ゲーム

- 演習：
  - 身近な所，あるいは社会において，囚人のジレンマと同じ状況となっていると思われる例を**1**つあげ，戦略形の形で表現せよ

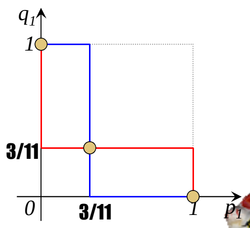
A＼B	**C**（協調）	**D**（裏切り）
C（協調）	（　，　）	（　，　）
D（裏切り）	（　，　）	（　，　）

2人非協力非零和ゲーム

- 例3：面会ゲーム
  - 遠く離れている2人が至急会う必要がある
  - 今居る場所は互いにわかっており，会いに行くか，相手が来るのを待つかの選択が出来る．（途中で会うことはない）

A＼B	行く	待つ
行く	(-6,-6)	(6,10)
待つ	(10,6)	(0,0)

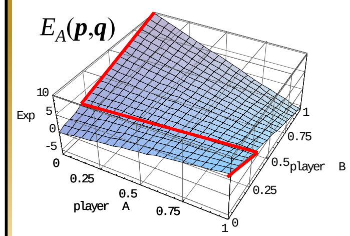
$$
\begin{cases}
(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=-22q_1+6\begin{cases}>0\rightarrow p_1=1\\=0\rightarrow p_1\in[0,1]\\<0\rightarrow p_1=0\end{cases}\\
(\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=-22p_1+6\begin{cases}>0\rightarrow q_1=1\\=0\rightarrow q_1\in[0,1]\\<0\rightarrow q_1=0\end{cases}
\end{cases}
$$

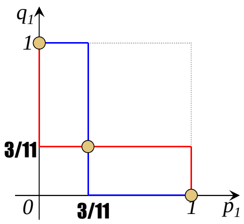


Nash均衡点
（（**0,1**），（**1,0**）），
（（**3/11,8/11**），（**3/11,8/11**）），
（（**1,0**），（**0,1**））

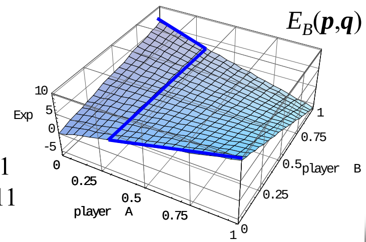
2人非協力非零和ゲーム

$E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$





$E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$



$E_A(\boldsymbol{p},(3/11,8/11))=30/11$
$E_B((3/11,8/11),\boldsymbol{q})=30/11$

2人非協力非零和ゲーム

- 例4：弱虫ゲーム **chicken game**
  - 2人の人間が2台の車をそれぞれ運転する
  - 2人は，お互いに向かって車を走らせる
  - 2台ともそのまま走り続ければ，やがてぶつかり死ぬため，直前で回避してよい．
  - しかし，相手より先によけた（進路を変えた）プレイヤーは「チキン」と罵られ，臆病者のレッテルを貼られる

⇩

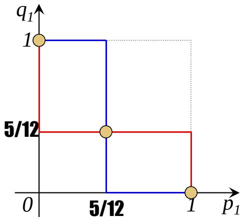
A＼B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

2人非協力非零和ゲーム

- 例4：弱虫ゲーム **chicken game**

A＼B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

$$\begin{cases}(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=-12q_1+5\begin{cases}>0\to p_1=1\\=0\to p_1\in[0,1]\\<0\to p_1=0\end{cases}\\(\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=-12p_1+5\begin{cases}>0\to q_1=1\\=0\to q_1\in[0,1]\\<0\to q_1=0\end{cases}\end{cases}$$



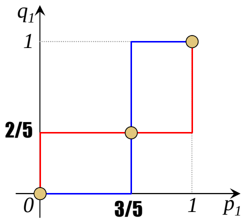
Nash均衡点
（(**0,1**),(**1,0**)），→ (9,0)
（(**5/12,7/12**),(**5/12,7/12**)），→ $E_A(\boldsymbol{p},(5/12,7/12))=10/12$, $E_B((5/12,7/12),\boldsymbol{q})=10/12$
（(**1,0**),(**0,1**)）→ (0,9)

2人非協力非零和ゲーム

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**

男＼女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\begin{cases}(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=5q_1-2\begin{cases}>0\to p_1=1\\=0\to p_1\in[0,1]\\<0\to p_1=0\end{cases}\\(\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=5p_1-3\begin{cases}>0\to q_1=1\\=0\to q_1\in[0,1]\\<0\to q_1=0\end{cases}\end{cases}$$



Nash均衡点
（(**1,0**),(**1,0**)），→ (2,1)
（(**3/5,2/5**),(**2/5,3/5**)），→ $E_A(\boldsymbol{p},(5/12,7/12))=1/5$, $E_B((5/12,7/12),\boldsymbol{q})=1/5$
（(**0,1**),(**0,1**)）→ (1,2)

2人非協力非零和ゲーム

- 例5：病的な例

$$\begin{cases}E_A(p,q)=8p_1q_1+8p_2q_1+4p_1q_2+4p_2q_2=8q_1+4q_2\\E_B(p,q)=8p_1q_1+4p_2q_1+8p_1q_2+4p_2q_2=8p_1+4p_2\end{cases}$$

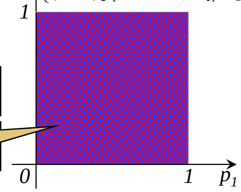
↑自分の期待利得を自分の戦略で決められないことによる

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(8,8)	(4,8)
s_{A_2}	(8,4)	(4,4)

$$\begin{cases}(0+0)q_1-0=0\to p_1\in[0,1]\\(0+0)p_1+0=0\to q_1\in[0,1]\end{cases}$$

全ての純粋戦略の組が**Nash**均衡点！

全ての混合戦略の組が**Nash**均衡点！



Nash均衡点の精緻化

友情ルール：自分の利得が同じなら，相手の利得が大きくなる戦略を選ぶ → (s_{A_1},s_{B_1})が均衡点

嫌がらせルール：自分の利得が同じなら，相手の利得が小さくなる戦略を選ぶ → (s_{A_2},s_{B_2})が均衡点

Aが友情 & **B**が嫌がらせルールに従う → (s_{A_1},s_{B_2})，
Aが嫌がらせ & **B**が友情ルールに従う → (s_{A_2},s_{B_1})

2人非協力非零和ゲーム

- 例6：共有地の悲劇（囚人のジレンマのn人拡張版）
  - 数軒の酪農家が共有の牧草地を所有している．各酪農家が先を争って牛を放牧し，自分の利益最大をはかる限り，牛の数を増やし続けると，待っているのは共有地の荒廃という悲劇である．
  - 単純なモデルでの考察
    - 酪農家は4軒 (i=1,2,3,4)
    - 酪農家iが放牧する牛の数 q_i
    - 各酪農家は3頭まで牛を購入でき，購入価格は全て等しく2
    - 酪農家iの収益をx_iとし，$x_i = q_i\{16-(q_1+q_2+q_3+q_4)\} - 2q_i$

たくさん放牧すると収益が減る！

i＼others	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6
3	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6

弱支配

Nash均衡点

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Definition** 戦略的同等性
  - ゲームGのNash均衡点がG'のそれであり，かつその逆も成立するとき，2つのゲームは**戦略的に同等**であるという
- **Theorem 5**
  - 2つの双行列ゲームG, G'において，任意の要素について，

$$\exists\alpha_1>0,\alpha_2>0,\exists\beta_1,\beta_2,\ \begin{cases}a'_{ij}=\alpha_1 a_{ij}+\beta_1\\ b'_{ij}=\alpha_2 b_{ij}+\beta_2\end{cases}$$

という関係があるとき，GとG'は戦略的に同等である

- 例：

G

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(3,-1)	(0,2)
s_{A_2}	(-2,4)	(5,-2)

戦略的同等

G'

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(5,-1)	(-1,8)
s_{A_2}	(-5,14)	(9,-4)

$\alpha_1=2,\beta_1=-1,\alpha_2=3,\beta_2=2$

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Nash均衡点を求める**

$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ Nash均衡点

$$\overset{\text{Th.2}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}v_1:=E_A(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\ge E_A(s_{A_i},\boldsymbol{q}^*) & \forall i=1,\cdots,m\\ v_2:=E_B(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\ge E_B(\boldsymbol{p}^*,s_{B_j}) & \forall j=1,\cdots,n\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v_1\ge\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^* & \forall i=1,\cdots,m\\ v_2\ge\sum_{i=1}^m b_{ij}p_j^* & \forall j=1,\cdots,n\end{cases}$$

$$\overset{\text{Th.5}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}v_1\ge\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}q_j^* & \forall i=1,\cdots,m\\ v_2\ge\sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij}p_j^* & \forall j=1,\cdots,n\end{cases}$$

ただし，$(\forall i,j,\ \tilde{a}_{ij},\tilde{b}_{ij}>0)$ → $v_1,v_2>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1\ge\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}\tilde{q}_j & \forall i=1,\cdots,m\\ 1\ge\sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij}\tilde{p}_i & \forall j=1,\cdots,n\end{cases}$$

ただし，$\begin{cases}\tilde{q}_j:=q_j^*/v_1\\ \tilde{p}_i:=p_i^*/v_2\end{cases}$

→ $\begin{cases}u_i:=1-\sum_{j=1}^n\tilde{a}_{ij}\tilde{q}_j(\ge 0) & (i=1,\cdots,m)\\ w_j:=1-\sum_{i=1}^m\tilde{b}_{ij}\tilde{p}_i(\ge 0) & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$ とおく

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Proposition 1** 相補性 **complementarity**

$$\begin{cases}u_i:=1-\sum_{j=1}^n\tilde{a}_{ij}\tilde{q}_j\\ w_j:=1-\sum_{i=1}^m\tilde{b}_{ij}\tilde{p}_i\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^m u_i\tilde{p}_i=0 & (j=1,\cdots,n)\\ \sum_{j=1}^n w_j\tilde{q}_j=0 & (i=1,\cdots,m)\end{cases}$$ が成立

まとめると…

Nash均衡点が存在する

$$\Leftrightarrow\ \left|\begin{array}{l}u_i:=1-\sum_{j=1}^n\tilde{a}_{ij}q_j\ \ (i=1,\cdots,m)\\ w_j:=1-\sum_{i=1}^m\tilde{b}_{ij}p_i\ \ (j=1,\cdots,n)\\ \sum_{i=1}^m u_ip_i=0\\ \sum_{j=1}^n w_jq_j=0\\ u_i,p_i\ge 0\ \ (i=1,\cdots,m)\\ w_j,q_j\ge 0\ \ (j=1,\cdots,n)\end{array}\right.$$

を満たす $\begin{array}{l}u_i,p_i(i=1,\cdots,m)\\ w_j,q_j(j=1,\cdots,n)\end{array}$ が存在

Nash均衡点と線形相補性問題

- **LCP, Linear Complementarity Problem**

$$\begin{cases} u_i := 1-\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} q_j \quad (i=1,\cdots,m) \\ w_j := 1-\sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij} p_i \quad (j=1,\cdots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \ge 0 \quad (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j \ge 0 \quad (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

を満たす解 $\begin{cases} u_i, p_i (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j (j=1,\cdots,n) \end{cases}$

$\begin{cases} p_i^* := p_i \Big/ \sum_i p_i \\ q_j^* := q_j \Big/ \sum_j q_j \end{cases}$ **がNash均衡点**

⇕

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Mx} + \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = 0, \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$$

ただし，

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

B=-AだとLP ⇔ 零和ゲーム

Lemke法（**M≧0**）
内点法（**M**：**PSD,P₀**,…）

戦略形ゲームの応用（岡田章『ゲーム理論』p.49-59等）

- 応用例1：クールノー複占市場
  - 2企業（i=1,2）が同質な財を生産し，同一市場に供給している
  - 企業iの供給量q_i（≧0）→ 財の価格 $p=\max\{a-b(q_1+q_2), 0\}$, (a,b>0)
  - 企業iの費用関数 $C_i(q_i)= c_i q_i$, $(0<c_i<a)$ 限界費用
  - 企業iの利潤関数$\pi_i(q_1, q_2)=pq_i - c_i q_i$

各企業は利潤最大化したい！

クールノー・ナッシュ均衡 Cournot-Nash equilibrium

$$(q_1^*, q_2^*): C.N.eq. \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1 \ge 0} \pi_1(q_1, q_2^*) \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_2 \ge 0} \pi_2(q_1^*, q_2) \end{cases}$$

- 企業i(=1,2)の企業j(≠i)に対する最適応答対応

$$\pi_i(q_1, q_2) = \begin{cases} (a-c_i-b(q_1+q_2))q_i & \text{if } 0 \le q_i < a/b - q_j \quad \text{p>0} \\ -c_i q_i & \text{if } a/b - q_j \le q_i \quad \text{p=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_i^* = \begin{cases} \frac{a-c_i}{2b} - \frac{q_j}{2} & \text{if } 0 \le q_i \le \frac{a-c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \frac{a-c_i}{b} < q_i \end{cases} \quad \left[\because \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0 \quad (i=1,2) \right]$$

戦略形ゲームの応用

- 応用例1：クールノー複占市場

$$\begin{cases} \frac{a-c_i}{2b} - \frac{q_j}{2} & \text{if } 0 \le q_i \le \frac{a-c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \frac{a-c_i}{b} < q_i \end{cases}$$

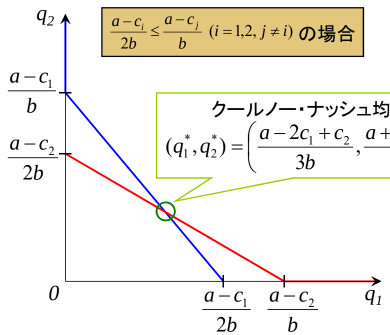
$\frac{a-c_i}{2b} \le \frac{a-c_j}{b}$ $(i=1,2, j \ne i)$ の場合

財の価格

$$p^* = \frac{a+c_1+c_2}{3}$$

各企業の利潤

$$\begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_1^*) = \frac{(a-2c_1+c_2)^2}{9b} \\ \pi_2(q_1^*, q_1^*) = \frac{(a+c_1-2c_2)^2}{9b} \end{cases}$$



クールノー・ナッシュ均衡点

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}, \frac{a+c_1-2c_2}{3b} \right)$$

パレート最適ではない

例：$c_1=c_2$の時，$q_1=q_2=(a-c)/4b$ とした方が，どちらの企業もより多くの利潤が得られる

戦略形ゲームの応用

寄付はいくら集まるだろう？

- 応用例2：寄付金ゲーム
  - ある町で，公共事業のため，住人（ n人）に寄付を募る
  - 住人は好きな額を寄付（範囲：0〜1000円で100円単位）
  - 事業の結果，寄付総額の2倍を住人全員が貰える
  - 住人i (=1,…,n) の戦略（寄付額）: x_i （0≦x_i≦1000）
  - 住人i (=1,…,n) の利得関数： $u_i(x_1,\cdots,x_n) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k - x_i$

【自分+3人のプレイヤー（n=4）の場合】

自分＼他	0×3	100×3	…	900×3	1000×3
0	0, 0	600, 500	…	5400, 4500	6000, 5000
100	100, 200	700, 700	…	5500, 4700	6100, 5200
…	…	…	…	…	…
900	900, 1800	1500, 2300	…	6300, 6300	6900, 6800
1000	1000, 2000	1600, 2500	…	6400, 6500	7000, 7000

x^*=(1000,…,1000) が 唯一の均衡点 かつ Pareto最適

利得が皆に等しく還元され享受できるなら，皆喜んで寄付をする（1000円が支配戦略）

戦略形ゲームの応用

寄付はいくら集まるだろう？

- 応用例2：寄付金ゲーム（その2）
  - ある町で，公共事業のため，住人（n人）に寄付を募る
  - 住人は好きな額を寄付（範囲：0～1000円で100円単位）
  - 事業の結果，寄付総額の2倍を住人全員（n人）で等分配
  - 住人i (=1,…,n) の戦略（寄付額）：x_i （$0 \leqq x_i \leqq 1000$）
  - 住人i (=1,…,n) の利得関数：$u_i(x_1,\cdots,x_n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x_i$

【自分＋3人のプレイヤー（n=4）の場合】

自分＼他	0×3	100×3	…	900×3	1000×3
0	0, 0	150, 50	…	1350, 450	1500, 500
100	-50, 50	100, 100	…	1300, 500	1450, 550
…	…	…	…	…	…
900	-450, 450	-300, 500	…	900, 900	1050, 950
1000	-500, 500	-350, 550	…	850, 950	1000, 1000

$x^*=(0,\ldots,0)$ が 唯一の均衡点 かつ Pareto最適でない

誰も寄付しない（0円が支配戦略）
明らかに全員が1000円寄付する方が良いが，その場合，全員が裏切る動機を持つ

ただ乗りfree-riding：他人の貢献を利用して個人的利益を得る行為

戦略形ゲームの応用

- 応用例3：電力消費ゲーム
  - ある都市で，n人の住人がクーラーを所持．暑い日の出来事
  - 各住人i (=1,…,n)の戦略と，その費用，及び効用は，
    - 戦略：低温設定(x_i=α)，電力消費1000W，効用U
    - 戦略：中温設定(x_i=β)，電力消費500W，効用u　(U>u>0)
  - この都市の停電確率は，総電力量をQとしたとき， 停電臨界点

$$P(Q) = \begin{cases} 0 & (\text{if } 0 \le Q \le c) \\ 1 & (\text{if } c < Q) \end{cases} \quad \text{where } 500n < c < 1000n$$

  - 節電する住人の数をs ($0 \leqq s \leqq n$)とすると，総電力消費量は
    - $Q(s) := 500s + 1000(n-s) = 1000n - 500s$
  - 住人i の効用は
    - $u_i(x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases} 0 & (\text{if } c < Q(s)) \\ U & (\text{if } Q(s) \le c, x_i = \alpha) \\ u & (\text{if } Q(s) \le c, x_i = \beta) \end{cases}$

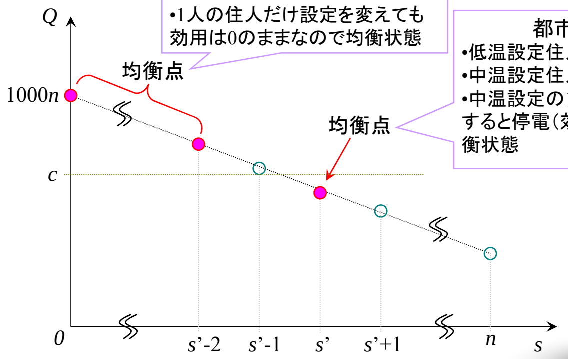
→ 減少関数$Q(s)$について，$Q(s') \leqq c \leqq Q(s'-1)$ を満たすs'が唯一定まり，$0 \leqq s^* \leqq s'-2$, $s^*=s'$を満たす全てのsが均衡点

戦略形ゲームの応用

- 応用例3：電力消費ゲーム

都市停電！
•全住人の効用は0.
•1人の住人だけ設定を変えても効用は0のままなので均衡状態

都市停電せず
•低温設定住人の効用U
•中温設定住人の効用u
•中温設定の1人でも低温に変更すると停電（効用がu→0)より均衡状態



戦略形ゲーム

2人のプレイヤーが互いに相手と異なる戦略を交互に取る，即ち，(C,D)→(D,C)→(C,D)→…とするときの期待利得が，協調行動(C,C)の利得より小さい状況

- 囚人のジレンマ型ゲーム

A＼B	C	D
C	(S_1, S_2)	(W_1, B_2)
D	(B_1, W_2)	(T_1, T_2)

ただし，B_i (best) > S_i (second) > T_i (third) > W_i (worst)

さらに $S_i = \frac{B_i + W_i}{2}$ $(i=1,2)$ も満たすならば，『標準的な囚人のジレンマ型ゲーム』とよばれる

$$\begin{cases} \bar{r} = S_1 - B_1(<0),\ \hat{r} = T_1 - W_1(>0),\ \tilde{r} = B_1 - T_1(>0) \\ \bar{c} = S_2 - W_2(>0),\ \hat{c} = T_2 - B_2(<0),\ \tilde{c} = W_2 - T_2(<0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\bar{r}+\hat{r}| \le |\hat{r}| \\ |\bar{c}+\hat{c}| = |(S_2 - W_2) + (T_2 - B_2)| \\ \qquad\quad = |(S_2 - B_2) - (W_2 - T_2)| \le |W_2 - T_2| = |\tilde{c}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\bar{r}+\hat{r})q_1 - \hat{r} < 0 \\ (\bar{c}+\hat{c})p_1 + \tilde{c} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1^* = 0 \\ q_1^* = 0 \end{cases} \quad \to \textbf{Nash}\text{均衡は} (D,D)$$

$$\begin{cases} f_1(q_2) := (\bar{r}+\hat{r})q_1 - \hat{r} \\ f_2(p_1) := (\bar{c}+\hat{c})p_1 + \tilde{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(q_2) > 0 \to p_1 = 1 \\ f_1(q_2) = 0 \to p_1 \in [0,1], \\ f_1(q_2) < 0 \to p_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(p_1) > 0 \to q_2 = 1 \\ f_2(p_1) = 0 \to q_2 \in [0,1] \\ f_2(p_1) < 0 \to q_2 = 0 \end{cases}$$

オークション

- 例：ファーストプライス・オークション
  - 参加者は1回だけ入札し，入札額は互いにわからない
  - 最高額入札者が落札
    - 最高額が同額の場合はくじ引きで
  - 参加者は各々入札対象の評価額をもっている
    - 参加者の戦略は大きく3つ：評価額で入札，低い額で入札，高い額で入札
  - プレイヤーの利得＝評価額－落札額
  - 例）2人の場合：
    - Aさん　評価額20,000円
    - Bさん　評価額30,000円

✓ ×…落札できず
✓ 背景黄色…期待値
✓ 「×=0」とする

A＼B	10	20	30	40
10				
20				
30				

オークション

- 例：セカンドプライス・オークション
  - 参加者は1回だけ入札し，入札額は互いにわからない
  - 最高額入札者が2番目入札額（セカンドプライス）で落札
    - 最高額が同額の場合はくじ引きで，その額で落札
  - 参加者は各々入札対象の評価額をもっている
    - 参加者の戦略は大きく3つ：評価額で入札，低い額で入札，高い額で入札
  - プレイヤーの利得＝評価額－落札額
  - 例）2人の場合：
    - Aさん　評価額20,000円
    - Bさん　評価額30,000円

✓ ×…落札できず
✓ 背景黄色…期待値
✓ 「×=0」とする

A＼B	10	20	30	40
10	(5, 10)	(×, 20)	(×, 20)	(×, 20)
20	(10, ×)	(0, 5)	(×, 10)	(×, 10)
30	(10, ×)	(0, ×)	(-5, 0)	(×, 0)

オークション

- 例：セカンドプライス・オークション
  - 例）n人の場合：
    - player A　評価額 x円，　Aの戦略→ L円で入札，x円で入札，H円で入札　（$L \leqq x \leqq H$）
    - player A 以外の最高入札playerの入札額を y円とする

A＼o.w.H	*if* $y<L$	$y=L$	$L<y<x$	$y=x$	$x<y<H$	$y=H$	$y>H$
L	$x-y$	$(x-y)/2$	×	×	×	×	×
x	$x-y$	$x-y$	$x-y$	0	×	×	×
H	$x-y$	$x-y$	$x-y$	0	$x-y$	$(x-y)/2$	×

→戦略xが，戦略L, H を弱支配
→評価額と同額を入札するのがよい
→全playerが同様
→全playerが，各自の評価額で入札する
↑
メカニカル・デザイン＝ルールやシステムによりプレイヤーを誘導

✓ ×…落札できず
✓ 背景黄色…期待値
✓ 赤字…マイナス

参考文献

- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981, 2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2008）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- R. Axelrod, 松田裕之訳「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）
- ……