意思決定科学

階層化意思決定法
Analytic Hierarchy Process

堀田敬介

2017年1月10日,Tue.

Contents

- はじめに
- AHPの基礎
  - 意思決定問題の特徴
  - 階層構造
  - 一対比較
- 実施における補足
  - 一対比較の見直し
  - グループAHP
  - 不完全一対比較
  - 評価基準の独立性
- AHPからANPへ

はじめに

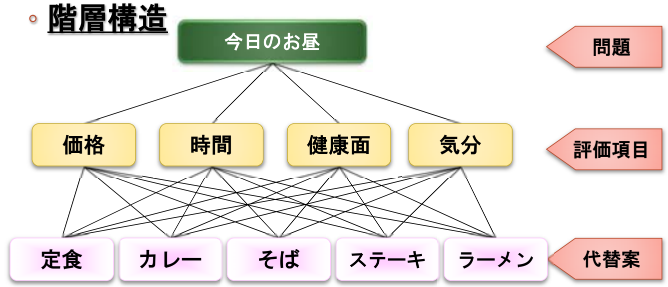
- 複数の代替案を比較検討したい
  - 例）今日のお昼ご飯どうしよう
    - 代替案1：定食
    - 代替案2：カレーライス
    - 代替案3：そば
    - 代替案4：ステーキ
    - 代替案5：ラーメン
  - 評価基準

意思決定問題の特徴
- 複数の代替案から1つ選択
- 意思決定者は独自の評価基準に基づいて決定を下す
- あらゆる評価基準に対してベストの代替案があることは稀
- 評価基準は通常複数あり，互いに利害が相反する面を持つ
- 複数の項目を同時に考慮・判定せねばならない

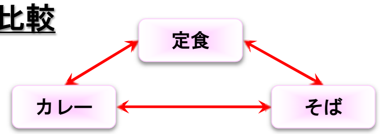
難しい！

AHPの基礎

- AHPのポイント
  - 階層構造



  - 一対比較



AHPの基礎

- 一対比較

9	Aの方がBより極めて重要	absolute importance
7	Aの方がBよりかなり重要	strong importance
5	Aの方がBより重要	importance
3	Aの方がBよりやや重要	weak importance
1	AとBは同じぐらい重要	equal importance
1/3	Aの方がBよりやや重要でない	not ...
1/5	Aの方がBより重要でない	not ...
1/7	Aの方がBよりかなり重要でない	not ...
1/9	Aの方がBより極めて重要でない	not ...

例）価格に関する定食とカレーの一対比較

安い方がよい（重要）とする

価格

定食 ― カレー

極めて重要　かなり重要　重要　やや重要　同じ　やや重要　重要　かなり重要　極めて重要

意志決定者に決めて貰う所

定食に$1/7$点
カレーに7点

	定食	カレー
定食	1	1/7
カレー	7	1

AHP分析者が数値化

AHPの基礎

- 一対比較

9	Aの方がBより極めて重要	absolute importance
7	Aの方がBよりかなり重要	strong importance
5	Aの方がBより重要	importance
3	Aの方がBよりやや重要	weak importance
1	AとBは同じぐらい重要	equal importance
1/3	Aの方がBよりやや重要でない	not ...
1/5	Aの方がBより重要でない	not ...
1/7	Aの方がBよりかなり重要でない	not ...
1/9	Aの方がBより極めて重要でない	not ...

価格	定食	カレー	そば	ステーキ	ラーメン
定食	1	1/3	1/5	1/9	1/7
カレー	3	1	3	5	1/3
そば	5	1/3	1	9	5
ステーキ	9	1/5	1/9	1	1/5
ラーメン	7	3	1/5	5	1

一対比較行列 paired comparison matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n\times n} \quad \text{ただし} \begin{cases} a_{ij} > 0 \ (\forall i,j) & \text{〔要素は全て正〕} \\ a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}} \ (\forall i,j) & \text{〔対称要素は逆数〕} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ (\forall j) & \text{〔列和は１〕} \end{cases}$$

AHPの基礎

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 一対比較行列から重み$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$計算
  - 主固有ベクトル法
    - 固有方程式 $A\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{w}$ $(\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0})$ を解いて重要度 $\boldsymbol{w}$ を計算
    - λは主固有値
  - 幾何平均法
    - 幾何平均 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ を計算して重要度 $\boldsymbol{w}$ を計算
    - $g_i := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} = \sqrt[n]{a_{i1}\times\cdots\times a_{in}}$ ⇒ $w_i := \dfrac{g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} \quad (i=1,\cdots,n)$
  - 調和平均法
    - 調和平均 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ を計算して重要度 $\boldsymbol{w}$ を計算
    - $h_i := \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_{ij}}}$ ⇒ $w_i := \dfrac{h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \quad (i=1,\cdots,n)$

AHPの基礎

- 一対比較行列から重み$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$計算
  - 主固有ベクトル法
    - 固有方程式 $A\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{w}$ $(\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0})$ を解いて重要度 $\boldsymbol{w}$ を計算
    - λは主固有値

価格	定	カ	そ	ス	ラ
定食	1	1/3	1/5	1/9	1/7
カレー	3	1	3	5	1/3
そば	5	1/3	1	9	5
ステーキ	9	1/5	1/9	1	1/5
ラーメン	7	3	1/5	5	1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 1/9 & 1/7 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 1/3 \\ 5 & 1/3 & 1 & 9 & 5 \\ 9 & 1/5 & 1/9 & 1 & 1/5 \\ 7 & 3 & 1/5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

⇒ 主固有値：λ=7.039,
主固有ベクトル：$\boldsymbol{w}$=[0.066, 0.520, 0.691, 0.143, 0.476]

⇒ 重要度：$\boldsymbol{w}$=[0.035, 0.275, 0.364, 0.076, 0.251]

AHPの基礎

- 一対比較行列から重み$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$計算
  - **幾何平均法**
    - 幾何平均 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ を計算して重要度 $\boldsymbol{w}$ を計算
    - $g_i := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} = \sqrt[n]{a_{i1}\times\cdots\times a_{in}} \Rightarrow w_i := \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} \quad (i=1,\cdots,n)$

価格	定	カ	そ	ス	ラ	G.M.	Weight
定食	1	1/3	1/5	1/9	1/7	0.254	0.038
カレー	3	1	3	5	1/3	1.719	0.256
そば	5	1/3	1	9	5	2.371	0.354
ステーキ	9	1/5	1/9	1	1/5	0.525	0.078
ラーメン	7	3	1/5	5	1	1.838	0.274
						6.708	1.000

AHPの基礎

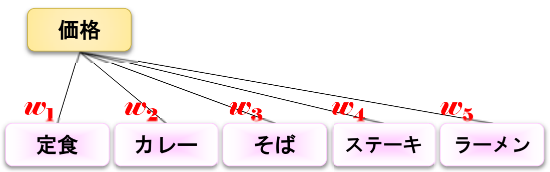
- 一対比較行列から重み$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$計算
  - **調和平均法**
    - 調和平均 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ を計算して重要度 $\boldsymbol{w}$ を計算
    - $h_i := \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_{ij}}} \Rightarrow w_i := \frac{h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \quad (i=1,\cdots,n)$

価格	定	カ	そ	ス	ラ	H.M.	Weight
定食	1	1/3	1/5	1/9	1/7	0.200	0.060
カレー	3	1	3	5	1/3	1.027	0.308
そば	5	1/3	1	9	5	1.108	0.333
ステーキ	9	1/5	1/9	1	1/5	0.249	0.075
ラーメン	7	3	1/5	5	1	0.749	0.225
						3.333	1.000

AHPの基礎

- 一対比較行列から重み$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$計算

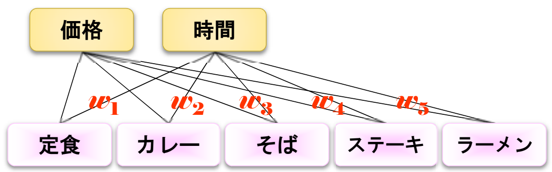
価格	定	カ	そ	ス	ラ	Weight
定食	1	1/3	1/5	1/9	1/7	w_1
カレー	3	1	3	5	1/3	w_2
そば	5	1/3	1	9	5	w_3
ステーキ	9	1/5	1/9	1	1/5	w_4
ラーメン	7	3	1/5	5	1	w_5



AHPの基礎

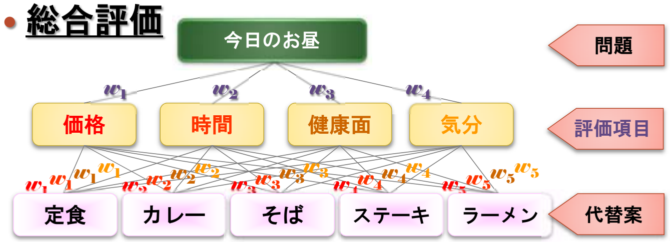
- 一対比較行列から重み$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$計算

時間	定	カ	そ	ス	ラ	Weight
定食	1	1/3	5	1/9	5	w_1
カレー	3	1	3	1/5	1/3	w_2
そば	1/5	1/3	1	1	5	w_3
ステーキ	9	5	1	1	1/7	w_4
ラーメン	1/5	3	1/5	7	1	w_5



AHPの基礎

- **総合評価**



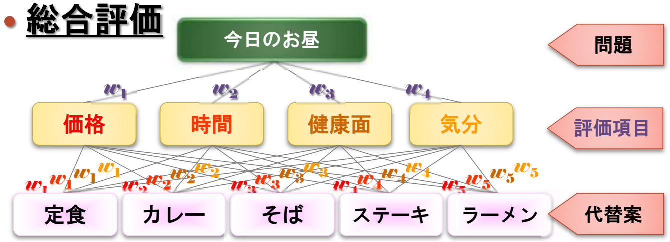
	価格	時間	健康	気分	Total
評価基準	w_1	w_2	w_3	w_4	
定食	w_1	w_1	w_1	w_1	t_1
カレー	w_2	w_2	w_2	w_2	t_2
そば	w_3	w_3	w_3	w_3	t_3
ステーキ	w_4	w_4	w_4	w_4	t_4
ラーメン	w_5	w_5	w_5	w_5	t_5

定食の得点

$$t_1 = w_1 \times w_1 + w_2 \times w_1 + w_3 \times w_1 + w_4 \times w_1$$

AHPの基礎

- **総合評価**



	価格	時間	健康	気分	Total
評価基準	0.098	0.569	0.114	0.220	
定食	0.038	0.242	0.287	0.182	0.214
カレー	0.256	0.302	0.358	0.283	0.300
そば	0.354	0.242	0.219	0.132	0.226
ステーキ	0.078	0.028	0.030	0.352	0.105
ラーメン	0.274	0.185	0.106	0.050	0.155

注）各重要度は幾何平均法による

演習

一対比較をしてみよう！

〔1〕 三角形の面積比
- 三角形を5つ，定規などで適当に描き，その面積比を目で見て一対比較し，重みを計算せよ
- 実際に面積を測り，比較せよ

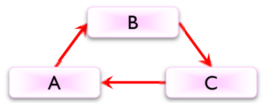
〔2〕 国土面積の比較
- 北海道・本州・四国・九州の面積を一対比較せよ
- 実際の面積と比較せよ

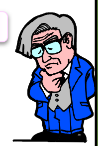
〔3〕 AHP実践
- 身近な問題を階層構造で表現し，AHPを適用して代替案の比較をせよ

〔地図出展：「its-mo Navi PC」から〕

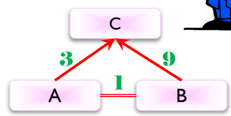
実施における補足

- 一対比較の見直し（整合性の検証）
  - 推移律の検証：$A \succ B, B \succ C \Rightarrow A \succ C$
    - 不成立の例
      - AよりBが重要
      - BよりCが重要
      - CよりAが重要





  - その他整合性の検証
    - 整合性の取れていない例
      - AとBが同程度に重要（1）
      - AよりCがやや重要（3）
      - BよりCが極めて重要（9）



➡ 整合性を測る指標があると嬉しい！

実施における補足

C.I. = Consistency Index
C.R. = Consistency Ratio

- 一対比較行列の**整合度C.I.**
  - **主固有ベクトル法**
    - $C.I. := \dfrac{\lambda - n}{n-1}$ （λ：Aの最大固有値）

C.I. ≦0.1 → OK
C.I. >0.1 → 整合性なし

  - **幾何平均法・調和平均法**
    - $C.I. := \dfrac{\tau - n}{n-1}$ $\left(\tau := \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{w_j}{w_i} \right)$

注）0.1という基準は目安
経験的に0.1～0.15程度

C.R. ≦0.1 → OK
C.R. >0.1 → 整合性なし

- 一対比較行列の**整合比C.R.**
  - $C.R. := \dfrac{C.I.}{R.I.}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R.I	0.0	0.0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

※）一対比較行列をランダムに作ったときの整合度の平均値

実施における補足

- 整合度C.I.：例 価格
  - **主固有ベクトル法**
    - $C.I. := \dfrac{\lambda - n}{n-1}$

主固有値：λ=7.039
→ C.I. = (7.039-5)/(5-1) = 0.5097 > 0.1

整合性なし

  - **幾何平均法**
    - $C.I. := \dfrac{\tau - n}{n-1}$ $\left(\tau := \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{w_j}{w_i} \right)$

一対比較行列 a_{ij}

価格	定	カ	そ	ス	ラ
定食	1.000	0.333	0.200	0.111	0.143
カレー	3.000	1.000	3.000	5.000	0.333
そば	5.000	0.333	1.000	9.000	5.000
ステーキ	9.000	0.200	0.111	1.000	0.200
ラーメン	7.000	3.000	0.200	5.000	1.000

重要度比較行列 w_i / w_j

価格	0.038	0.256	0.354	0.078	0.274
0.038	1.000	0.148	0.107	0.484	0.138
0.256	6.766	1.000	0.725	3.272	0.935
0.354	9.335	1.380	1.000	4.514	1.290
0.078	2.068	0.306	0.222	1.000	0.286
0.274	7.237	1.070	0.775	3.500	1.000

→ τ = 7.033 → C.I. = (7.033-5)/(5-1) = 0.5084 > 0.1

整合性なし

- 整合比C.R.：例 価格
  - $C.R. := \dfrac{C.I.}{R.I.}$

n	5
R.I	1.12

主固有ベクトル法：C.R. = 0.5097 / 1.12 = 0.455 > 0.1
幾何平均法：C.R. = 0.5084 / 1.12 = 0.454 > 0.1

整合性なし

実施における補足

- 整合性がない場合の修正箇所の発見
  - 一対比較行列と重要度比較行列を比べて数値の著しく違う箇所を探す
  - その箇所，及び関連箇所の一対比較を見直す

一対比較行列 a_{ij}

価格	定	カ	そ	ス	ラ
定食	1.000	0.333	0.200	0.111	0.143
カレ	3.000	1.000	3.000	5.000	0.333
そば	5.000	0.333	1.000	9.000	5.000
ステ	9.000	0.200	0.111	1.000	0.200
ラー	7.000	3.000	0.200	5.000	1.000

重要度比較行列 w_i / w_j

価格	0.038	0.256	0.354	0.078	0.274
0.038	1.000	0.148	0.107	0.484	0.138
0.256	6.766	1.000	0.725	3.272	0.935
0.354	9.335	1.380	1.000	4.514	1.290
0.078	2.068	0.306	0.222	1.000	0.286
0.274	7.237	1.070	0.775	3.500	1.000

見直す箇所の候補例

実施における補足

- **AHPの長所**
  - 主観的価値基準によって最も高い評価の代替案を選択できる
  - 主観的価値基準による代替案の優先順位がわかる
  - 評価基準が複数あり，互いに共通の尺度がない問題を解決できる
  - 主観的価値基準によって比較（一対比較）を行える
  - 部分的な比較・検討の繰返しにより全体の評価ができる
  - 意思決定者の主観的基準を結果に容易に反映できる
- **AHPの短所**
  - 階層構造をどう作るかが重要であり，結果がそれに左右される．
  - 一対比較が大変で意思決定者の負担になる→比較回数は$O(n^2)$
  - 部分ごとにしか比較を行わないので全体的な結果が納得のいかないものになる可能性がある→階層構造をどう作るかに依存
  - 一対比較の評価尺度が「順序尺度→間隔尺度（比率尺度）」に機械的に置き換えられてしまう（やや重要⇔重要，重要⇔かなり重要の差などがいずれも2？　重要は同等の5倍，極めて重要は同等の9倍重要？）

実施における補足

- 重み計算について
  - なぜ固有値？（cf. [2] 第7章）
    - ペロンの定理：一対比較行列（対角成分が1の正逆数行列）に対し，（スカラー倍に関して）一意で正の主固有ベクトルの存在を保証．
    - ペロン・フロベニウスの定理：非負既約行列に対し，同様のことを保証．→AHP, ANPでの重要度が計算可能．
      「既約＝隣接行列と見なしたとき，グラフが強連結」
    - 一対比較重要度における自己評価と外部評価のずれのばらつきを最小化する，即ち，過剰評価率を最小化する問題を考えると，固有値法はこの問題を解いていることに相当する．
- 整合度の計算について

完全に整合性がある一対比較行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix}$$

実施における補足

- 不完全一対比較行列の取り扱い
  - Harker法

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 5 & ? \\ ? & 1 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & ? \\ ? & 1/7 & ? & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 2 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  - TS法（Two-Stage Method）

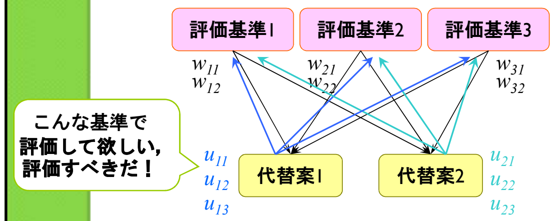
$$\begin{pmatrix} 1 & ? & 5 & ? \\ ? & 1 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & ? \\ ? & 1/7 & ? & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} k_1 := \sqrt{1\cdot 5} \\ k_2 := \sqrt[3]{1\cdot 3\cdot 7} \\ k_3 := \sqrt[3]{1/5\cdot 1/3\cdot 1} \\ k_4 := \sqrt{1/7\cdot 1} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k_1/k_2 & 5 & k_1/k_4 \\ k_2/k_1 & 1 & 3 & 7 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & k_3/k_4 \\ k_4/k_1 & 1/7 & k_4/k_3 & 1 \end{pmatrix}$$

AHPからANPへ

- ANPとは何か？

ANPでは評価基準と代替案を区別しない！



$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}$$

評価基準の代替案に対する評価行列

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{bmatrix}$$

代替案の評価基準に対する評価行列

超行列
super matrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_{11} & w_{12} \\ 0 & 0 & 0 & w_{21} & w_{22} \\ 0 & 0 & 0 & w_{31} & w_{32} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注：各列和は1にする

AHPからANPへ

- ANPの解法：超行列Sが既約な場合
  - 例

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{U} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_{11} & w_{12} \\ 0 & 0 & 0 & w_{21} & w_{22} \\ 0 & 0 & 0 & w_{31} & w_{32} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

を満たす x の各成分 x_i が対称 i の総合評価を与える

注：確率行列（各列和が1）の最大固有値は1なので，この法的式の解 x は主固有ベクトルとなる

求め方

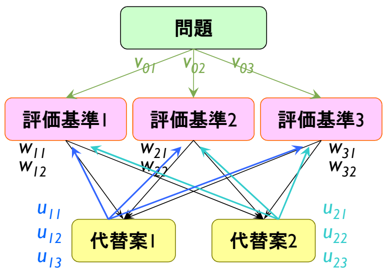
$$\begin{aligned} & S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \\ \leftrightarrow & \begin{bmatrix} 0 & W \\ U & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \\ \leftrightarrow & W\boldsymbol{v} = \boldsymbol{z}, U\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v} \\ \rightarrow & WU\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \\ \leftrightarrow & (WU - I)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

で z を求め，$Uz = v$ より v を求める．

Sが既約行列 ⇔ Sを隣接行列と見たときの対応するグラフが強連結
irreducible matrix
Sが原始行列 ⇔ Sを隣接行列と見たときの対応するグラフの原始指標が1
primitive matrix
〔原始指標：強連結グラフの全サイクルの長さの最大公約数〕

AHPからANPへ

- **ANPの解法：超行列Sが既約でない場合**
  - 例



$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \\ v_{03} \end{bmatrix}$$ 評価基準に対する評価行列

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}$$

評価基準の代替案に対する評価行列

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{bmatrix}$$

代替案の評価基準に対する評価行列

参考：解法は，グラフを強連結成分分解し，ブロック下三角行列の形にした上で，半順序の上位クラスタから逐次的に求める．

超行列 super matrix （既約でない）

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{01} & 0 & 0 & 0 & w_{11} & w_{12} \\ v_{02} & 0 & 0 & 0 & w_{21} & w_{22} \\ v_{03} & 0 & 0 & 0 & w_{31} & w_{32} \\ 0 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 & 0 \\ 0 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

参考文献

[1] P.T. Harker, ``Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process,'' *Mathematical Modeling*, *Vol.9*, *pp.353-360*, *1987*.

[2] 木下栄蔵 編著 「AHPの理論と実際」 日科技連 (2000)

[3] 竹田英二, ``不完全一対比較行列におけるAHPウェイトの計算法,'' オペレーションズ・リサーチ, *Vol.34*, *No.4*, *pp.169-172*, *1989*.

[4] 高橋磐郎, ``AHPからANPへの諸問題 I～VI,'' オペレーションズ・リサーチ, *Vol43*, *No.1-6*, *pp.36-40*, *1998*.

[5] 刀根薫 「ゲーム感覚意思決定法～AHP入門～」 日科技連 (1986)

[6] 刀根薫，真鍋龍太郎 編 「AHP事例集」 日科技連 (1990)

[7] 八巻直一，関谷和之, ``複数の評価者を想定した大規模AHPの提案と人事評価への適用,'' *J. ORSJ*, *Vol.42*, *No.4*, *pp.405-420*, *1999*.

[8] 八巻直一, et. al, ``不満関数を用いる集団区間AHP法,'' *J.ORSJ*, *Vol.45*, *No.3*, *pp.268-283*, *2002*.

[9] …