意思決定科学
DEA（包絡分析法）

堀田敬介

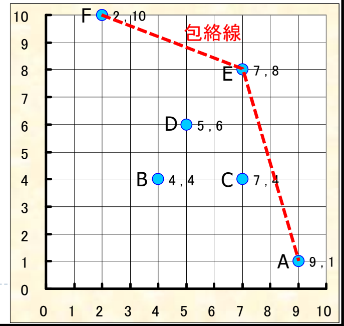
2017年1月17日（火）

考えよう

- あなたは6つの店舗をもつ社長だ．今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし，次年度も切磋琢磨させたい．さて，あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10

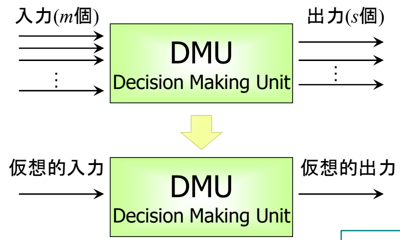


Contents

DEAとは？

- DEA (Data Envelopment Analysis)

envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒



最も変換効率の良いDMUを基準として，他のDMUの非効率性を算出し，比較する．ただし，変換効率はDMU毎に最も有利になるように計算．

比率尺度を効率性と見なして相対比較

$$\text{DMUの変換効率} = \frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$$

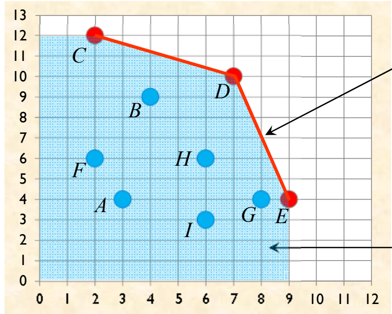
DEAとは？

- **2入力・1出力**
  - 例）店舗売上

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1	従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2	売場面積	3	4	1	2.1	9	2	6	6	8
出力	売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24

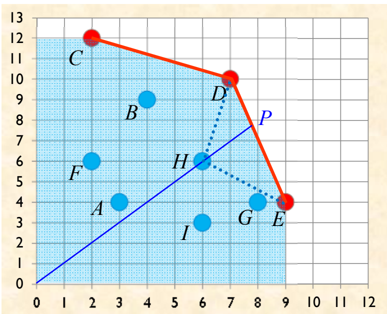
DEAとは？

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
出力/入力1	売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2	売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3



DEAとは？

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
出力/入力1	売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2	売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

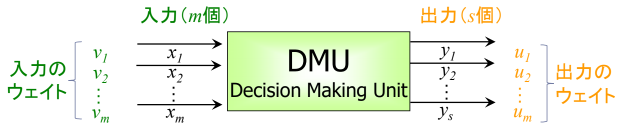


効率的DMU *C,D,E* の効率値は ***1.0***

非効率的DMU *H* の非効率値は *OH/OP* であり *H* の有位(参照)集合は *D* と *E*

DEA：CCRモデル

- **多入力・多出力**



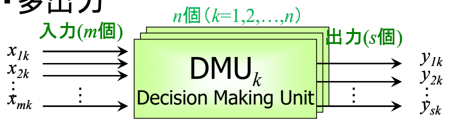
仮想的入力 $:= v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m$
仮想的出力 $:= u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s$

効率性（生産性）$:= \dfrac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m}$

入力・出力のウェイトは可変 ⇔ 固定ウェイト

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力



入力データ行列　　出力データ行列

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{DMU数}(n\text{個})} \left.\right\} \text{入力数}(m) \qquad Y = \underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}}_{\text{DMU数}(n\text{個})} \left.\right\} \text{出力数}(s)$$

入力データ用ウェイトベクトル　$\boldsymbol{v} = (v_1 \quad \cdots \quad v_m)^T$

出力データ用ウェイトベクトル　$\boldsymbol{u} = (u_1 \quad \cdots \quad u_s)^T$

DMU$_k$の仮想入力　$q_k := \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} \quad (k = 1, \cdots, n)$

DMU$_k$の仮想出力　$r_k := \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} \quad (k = 1, \cdots, n)$

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - 測定対象DMU$_o$$(o=1,\dots,n)$のウェイトを計算する

<FP_o>　分数計画問題

$$\max.\theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}}$$

$$s.t.\quad \frac{u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk}} \le 1 \quad (k = 1, \cdots, n)$$

$$v_1, \cdots, v_m \ge 0$$
$$u_1, \cdots, u_s \ge 0$$

対象のDMUの効率性を最大化

全てのDMUの効率性は1以下

入出力用可変ウェイトの変数は非負

同値([1])

<LP_o>　線形計画問題

$$\max.\theta_o = u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}$$
$$s.t.\quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1$$
$$u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \cdots, n)$$
$$v_1, \cdots, v_m \ge 0$$
$$u_1, \cdots, u_s \ge 0$$

<FP_o>の目的関数について分母を1にし，分子を最大化

<FP_o>の制約の分母を払う

注）全部でn個のLPを解く！

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - 効率性について

<LP_o>

$$\max.\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}$$
$$s.t.\quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1$$
$$u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \cdots, n)$$
$$v_1, \cdots, v_m \ge 0$$
$$u_1, \cdots, u_s \ge 0$$

Def：　DMU$_o$ がD効率的　$\Leftrightarrow \quad \theta_o^* = 1$
　　　DMU$_o$ がD非効率的　$\Leftrightarrow \quad \theta_o^* < 1$

注）D効率的だからといって効率的とは言えない

Lem：DMU$_o$がD非効率的，即ち $\theta_o^* < 1$ なら
$\exists k \in \{1, \cdots, n\},\ u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk}$

E$_o$に属するDMUはD効率的

この等号を満たすkの集合をDMU$_o$の優位集合（or 参照集合)という

Def：　DMU$_o$ の優位集合（or 参照集合）
$$E_o := \left\{ k \in \{1, \cdots, n\} \middle| u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk} \right\}$$

効率的フロンティアの一部を形成

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - <LP_o>の双対問題と最適解について

CCRモデル

<LP_o>

$$\max.\theta_o = u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}$$
$$s.t.\quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1$$
$$u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \cdots, n)$$
$$v_1, \cdots, v_m \ge 0$$
$$u_1, \cdots, u_s \ge 0$$

<D_o>　双対問題

$$\min.\theta$$
$$s.t.\quad \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \ge 0 \quad (i = 1, \cdots, m)$$
$$(y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, s)$$
$$\lambda_1, \quad \cdots, \quad \lambda_n \ge 0$$

DMU$_o$の入力i　　入力i の重み和　　出力j の重み和　　DMU$_o$の出力j

$$\begin{cases} d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \quad (i = 1, \cdots, m) \\ d_j^y := (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} \quad (j = 1, \cdots, s) \end{cases}$$

入力の余剰

出力の不足

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - 入力の余剰と出力の不足を求める

入力の余剰の和　出力の不足の和

$$\begin{aligned}
&\max.\ \underbrace{(d_1^x+\cdots+d_m^x)}_{\text{入力の余剰の和}}+\underbrace{(d_1^y+\cdots+d_s^y)}_{\text{出力の不足の和}}\\
&s.t.\quad d_i^x=\theta^* x_{io}-(x_{i1}\lambda_1+\cdots+x_{in}\lambda_n)\quad (i=1,\cdots,m)\\
&\qquad\ d_j^y=(y_{j1}\lambda_1+\cdots+y_{jn}\lambda_n)-y_{io}\quad (j=1,\cdots,s)\\
&\qquad\qquad \lambda_1,\cdots,\lambda_n\ge 0\\
&\qquad\qquad d_1^x,\cdots,d_m^x\ge 0\\
&\qquad\qquad d_1^y,\cdots,d_s^y\ge 0
\end{aligned}$$

θ^*: <LP_o>の最適値

DEAの実行手順

<D_o>を解いて最適解 $(\theta^*,\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*)$ を得た後,
このLPを解いて最適解 $(d_1^{x*},\cdots,d_m^{x*},d_1^{y*},\cdots,d_s^{y*})$ を得る.

Def: DEA効率性の定義

$\theta^*=1,(d_1^{x*},\cdots,d_m^{x*},d_1^{y*},\cdots,d_s^{y*})=\boldsymbol{0}$ となるDMUはDEA効率的

それ以外のDMUはDEA非効率的

DEA：CCRモデル

- 例題
  - 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

入力(3個)　出力(2個)

入力のウェイト v_1, v_2, v_3 → x_1, x_2, x_3 → DMU(学生) → y_1, y_2 → u_1, u_2 出力のウェイト

$$効率性(生産性):=\frac{u_1\times y_1+u_2\times y_2}{v_1\times x_1+v_2\times x_2+v_3\times x_3}$$

DEA：CCRモデル

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

- 学生A(DMU$_A$)の効率性を求める

分数計画問題 <FP_A>

$$\begin{aligned}
&\max.\ \theta:=\frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3}\\
&s.t.\ \frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3}\le 1\\
&\quad \frac{60u_1+90u_2}{20v_1+0.2v_2+0.9v_3}\le 1\\
&\quad \frac{30u_1+55u_2}{15v_1+v_2+0.8v_3}\le 1\\
&\quad \frac{20u_1+70u_2}{30v_1+0.5v_2+0.9v_3}\le 1\\
&\quad \frac{70u_1+24u_2}{20v_1+0.9v_2+v_3}\le 1\\
&\quad \frac{50u_1+60u_2}{16v_1+v_2+v_3}\le 1\\
&\quad v_1,v_2,v_3\ge 0,u_1,u_2\ge 0
\end{aligned}$$

線形計画問題 <LP_A>

(P)主問題

$$\begin{aligned}
&\max.\ 40u_1+30u_2\\
&s.t.\quad 40v_1+0.8v_2+v_3=1\\
&\quad 40u_1+30u_2\le 40v_1+0.8v_2+v_3\\
&\quad 60u_1+90u_2\le 20v_1+0.2v_2+0.9v_3\\
&\quad 30u_1+55u_2\le 15v_1+v_2+0.8v_3\\
&\quad 20u_1+70u_2\le 30v_1+0.5v_2+0.9v_3\\
&\quad 70u_1+24u_2\le 20v_1+0.9v_2+v_3\\
&\quad 50u_1+60u_2\le 16v_1+v_2+v_3\\
&\quad v_1,v_2,v_3\ge 0,u_1,u_2\ge 0
\end{aligned}$$

(D)双対問題

$$\begin{aligned}
&\min.\ \theta\\
&s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\ge 0\\
&\quad 0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\ge 0\\
&\quad \theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\ge 0\\
&\quad (40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\ge 0\\
&\quad (30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\ge 0\\
&\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0
\end{aligned}$$

DEA：CCRモデル

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

- 学生A(DMU$_A$)の効率性を求める

線形計画問題 <LP_A>

$$\begin{aligned}
&\min.\ \theta\\
&s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\ge 0\\
&\quad 0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\ge 0\\
&\quad \theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\ge 0\\
&\quad (40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\ge 0\\
&\quad (30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\ge 0\\
&\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0
\end{aligned}$$

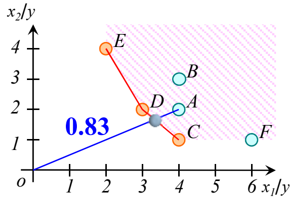
<LP_A>の最適値
$\theta^*=1$なら
次のLPも解く

$$\begin{aligned}
&\max.\ (d_1^x+d_2^x+d_3^x)+(d_1^y+d_2^y)\\
&s.t.\ d_1^x=40\cdot\theta^*-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\\
&\quad d_2^x=0.8\cdot\theta^*-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\\
&\quad d_3^x=\theta^*-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\\
&\quad d_1^y=(40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\\
&\quad d_2^y=(30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\\
&\quad d_1^x,d_2^x,d_3^x,d_1^y,d_2^y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0
\end{aligned}$$

DEA：CCRモデル

- 例題2（[3] p.15）

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1



DMU *A* についての問題

$$\begin{aligned}
&\min.\theta\\
&s.t.\ \ 4\theta-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\ \geq 0\\
&\qquad 2\theta-(2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+4\lambda_5+\lambda_6)\ \geq 0\\
&\qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1\geq 0\\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}$$

最適解：$\theta^*=0.83$, $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,0.33,0.67,0,0)$

$$\begin{cases}\text{入力)}\ 0.83\times A=0.33\times C+0.67\times D\\ \text{出力)}\ \quad A=0.33\times C+0.67\times D\end{cases}$$

$$\begin{cases}input)\ 0.83\times\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=0.33\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+0.67\times\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\\ output)\quad (1)=0.33\times(1)+0.67\times(1)\end{cases}$$

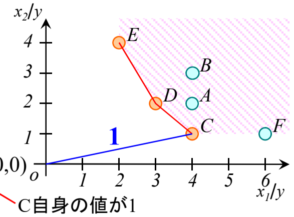
DMU A はDEA非効率的で，優位集合は C と D

DEA：CCRモデル

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

- 例題2 DMU *C* についての問題

$$\begin{aligned}
&\min.\theta\\
&s.t.\ \ 4\theta-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\ \geq 0\\
&\qquad \theta-(2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+4\lambda_5+\lambda_6)\ \geq 0\\
&\qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1\geq 0\\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}$$



最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1,0,0,0)$

C自身の値が1

DMU *C* の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned}
&\max.(d_1^x+d_2^x)+(d_1^y)\\
&s.t.\ \ d_1^x=1\cdot 4-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\\
&\qquad d_2^x=1\cdot 1-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\\
&\qquad d_1^y=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1\\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0,\ \ d_1^x,d_2^x\geq 0,\ \ d_1^y\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\text{入力)}\ 1\times C=1\times C\\ \text{出力)}\quad C=1\times C\end{cases}$$

最適解：$(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*})=(0, 0, 0)$

$$\begin{cases}input)\ 1\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ output)\quad (1)=1\times(1)+(0)\end{cases}$$

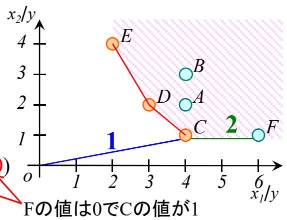
入力余剰・出力不足なし→*C*はDEA効率的

DEA：CCRモデル

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

- 例題2 DMU *F* についての問題

$$\begin{aligned}
&\min.\theta\\
&s.t.\ \ 6\theta-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\ \geq 0\\
&\qquad \theta-(2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+4\lambda_5+\lambda_6)\ \geq 0\\
&\qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1\geq 0\\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}$$



最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1,0,0,0)$

Fの値は0でCの値が1

DMU *C* の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned}
&\max.(d_1^x+d_2^x)+(d_1^y)\\
&s.t.\ \ d_1^x=1\cdot 6-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\\
&\qquad d_2^x=1\cdot 1-(4\lambda_1+4\lambda_2+4\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+6\lambda_6)\\
&\qquad d_1^y=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)-1\\
&\qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0,\ \ d_1^x,d_2^x\geq 0,\ \ d_1^y\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\text{入力)}\ 1\times F\geqq 1\times C\\ \text{出力)}\quad F\leqq 1\times C\end{cases}$$

最適解：$(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*})=(2, 0, 0)$

$$\begin{cases}input)\ 1\times\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\\ output)\quad (1)=1\times(1)+(0)\end{cases}$$

入力余剰あり→*F*はDEA非効率的

優位集合は*C*(*C*に比較して入力余剰2だけ非効率)

DEAの特徴

- 特徴（長所・短所）
  - 他と異なった特徴を持つDMUは，DEA効率的と判断されやすい
    → 他と異なることが良いことの場合は，DEAは良い指標
  - 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
  - DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

例題（DEAを用いた野球打者評価）
CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価

注：三振は少ない方がよいので入力に…

		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6
:	:	:	:	:	:	:	:	:

データ（一部加工）
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題（DEAを用いた野球打者評価）
CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価
  - 結果例：2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗（横）

    $\langle D_o \rangle$を解いた結果：$\theta=0.8007$，$\lambda_3=0.1638$，$\lambda_5=0.2670$，$\lambda_8=0.1765$，$\lambda_{37}=0.3476$

    各入力） 0.8007×石井琢朗 ≧ 0.1638×金本知憲（阪）+ 0.2670×井端弘和（中）+ 0.1765×赤星憲広（阪）+ 0.3476×城島健司（ソ）

    各出力） 石井琢朗 ≦ 0.1638×金本知憲（阪）+ 0.2670×井端弘和（中）+ 0.1765×赤星憲広（阪）+ 0.3476×城島健司（ソ）
  - 結果例：2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏（巨）

    $\langle D_o \rangle$を解いた結果：$\theta=0.9053$，$\lambda_1=0.3890$，$\lambda_3=0.1581$，$\lambda_4=0.0225$，$\lambda_7=0.2917$

    各入力） 0.9053×二岡智宏 ≧ 0.3890×青木宣親（ヤ）+ 0.1581×金本知憲（阪）+ 0.0225×金城龍彦（横）+ 0.2917×前田智徳（広）

    各出力） 二岡智宏 ≦ 0.3890×青木宣親（ヤ）+ 0.1581×金本知憲（阪）+ 0.0225×金城龍彦（横）+ 0.2917×前田智徳（広）

注：$\langle D_o \rangle$のモデル化，解は cplex9.0 による

生産可能集合とモデル

- 生産可能集合 P からモデルを考察する

$x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk}$ → DMU → $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{sk}$

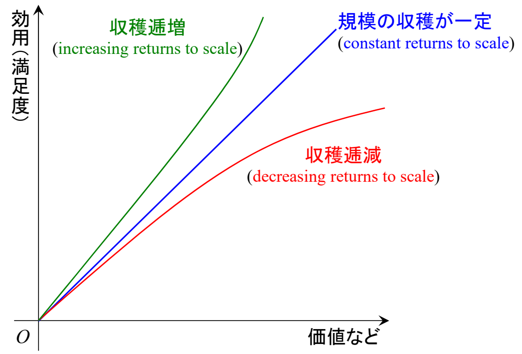
入力データ行列 $X=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$　　$Y=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$ 出力データ行列

$x=\begin{pmatrix} x_{1\bullet} \\ \vdots \\ x_{m\bullet} \end{pmatrix}$　$y=\begin{pmatrix} y_{1\bullet} \\ \vdots \\ y_{s\bullet} \end{pmatrix}$　$\begin{cases} (x, y)：活動（＝入力と出力の対） \\ P=\{(x, y)\}：生産可能集合（＝活動の集合） \end{cases}$

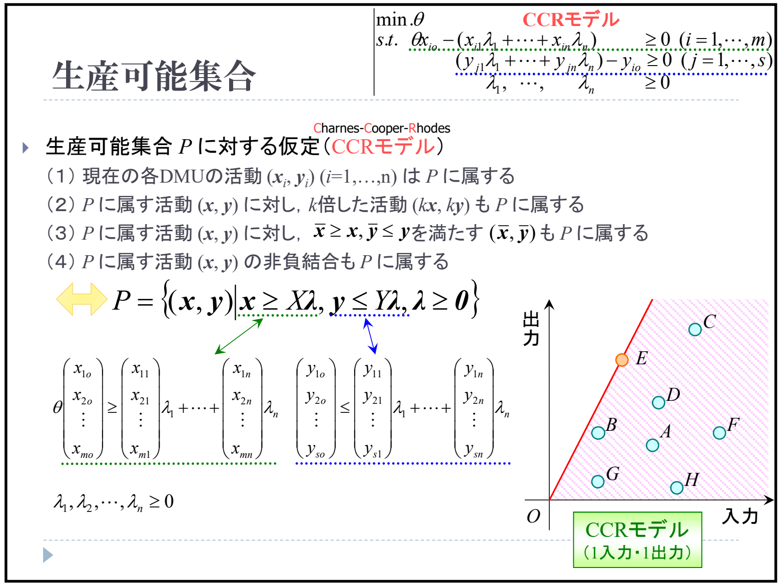
- 生産可能集合 P に対する仮定（**CCRモデル**）　規模の収穫が一定 (constant returns to scale)
  （1）現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する
  （2）P に属す活動 (x, y) に対し，k倍した活動 (kx, ky) も P に属する
  （3）P に属す活動 (x, y) に対し，$\bar{x} \ge x, \bar{y} \le y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
  （4）P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

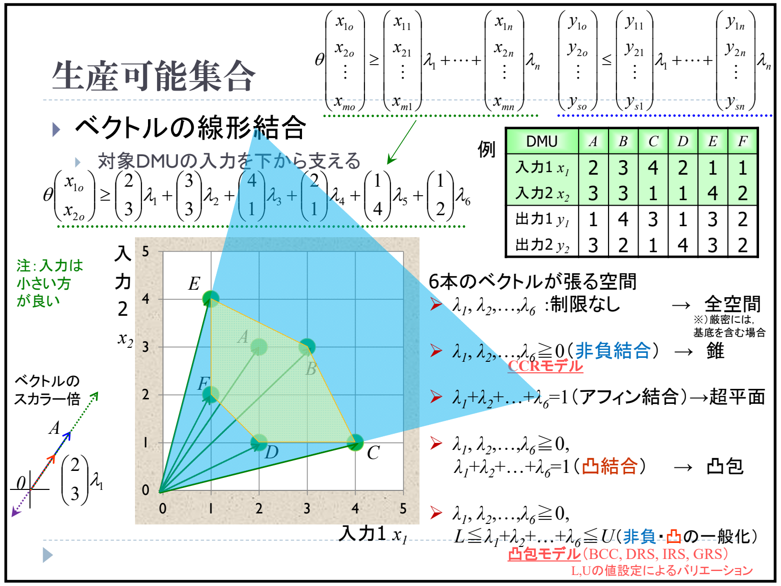
生産可能集合とモデル

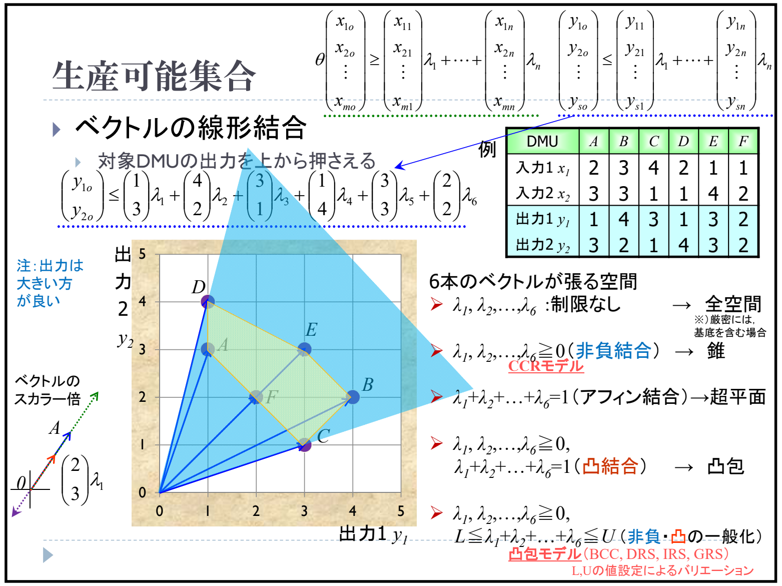
- 「規模の収穫が一定」とは？

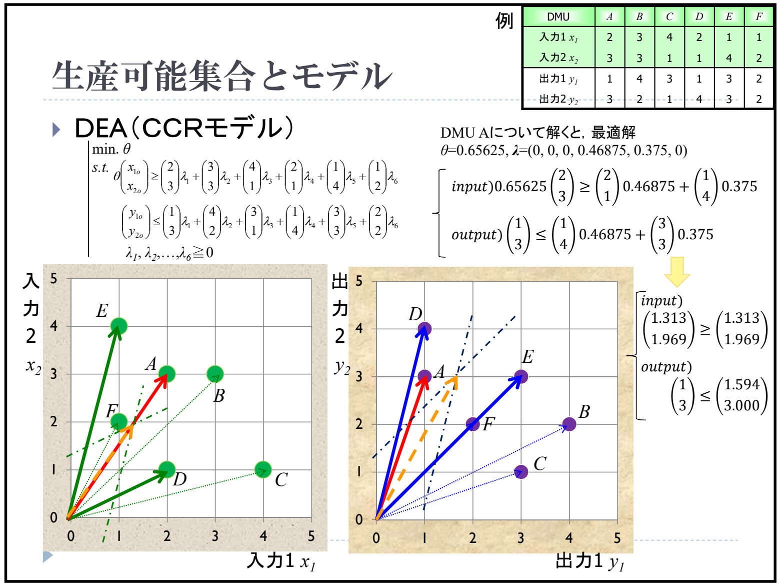


注：一般には価値が大きくなるほど，効用の増加量は減る場合が多い．


生産可能集合
min. θ
CCRモデル
s.t. θx_io − (x_i1λ_1 + ⋯ + x_inλ_n) ≥ 0 (i = 1,⋯,m)
(y_j1λ_1 + ⋯ + y_jnλ_n) − y_jo ≥ 0 (j = 1,⋯,s)
λ_1, ⋯, λ_n ≥ 0
Charnes-Cooper-Rhodes
生産可能集合 P に対する仮定（CCRモデル）
（1）現在の各DMUの活動 (x_j, y_j) (j=1,…,n) は P に属する
（2）P に属する活動 (x, y) に対し，k倍した活動 (kx, ky) も P に属する
（3）P に属する活動 (x, y) に対し，x̄ ≥ x, ȳ ≤ y を満たす (x̄, ȳ) も P に属する
（4）P に属する活動 (x, y) の非負結合も P に属する
P = {(x, y) | x ≥ Xλ, y ≤ Yλ, λ ≥ 0}
λ_1, λ_2, ⋯, λ_n ≥ 0
出力
入力
O
CCRモデル
（1入力・1出力）


生産可能集合
ベクトルの線形結合
対象DMUの入力を下から支える
例
DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2
注：入力は小さい方が良い
ベクトルのスカラー倍
入力2 x_2
入力1 x_1
6本のベクトルが張る空間
λ_1, λ_2,…,λ_6 :制限なし → 全空間
※）厳密には，基底を含む場合
λ_1, λ_2,…,λ_6 ≧ 0（非負結合） → 錐
CCRモデル
λ_1+λ_2+…+λ_6=1（アフィン結合）→超平面
λ_1, λ_2,…,λ_6≧0, λ_1+λ_2+…+λ_6=1（凸結合） → 凸包
λ_1, λ_2,…,λ_6≧0, L≦λ_1+λ_2+…+λ_6≦U（非負・凸の一般化）
凸包モデル（BCC, DRS, IRS, GRS）
L,Uの値設定によるバリエーション


生産可能集合
ベクトルの線形結合
対象DMUの出力を上から押さえる
例
DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2
注：出力は大きい方が良い
ベクトルのスカラー倍
出力2 y_2
出力1 y_1
6本のベクトルが張る空間
λ_1, λ_2,…,λ_6 :制限なし → 全空間
※）厳密には，基底を含む場合
λ_1, λ_2,…,λ_6≧0（非負結合） → 錐
CCRモデル
λ_1+λ_2+…+λ_6=1（アフィン結合）→超平面
λ_1, λ_2,…,λ_6≧0, λ_1+λ_2+…+λ_6=1（凸結合） → 凸包
λ_1, λ_2,…,λ_6≧0, L≦λ_1+λ_2+…+λ_6≦U（非負・凸の一般化）
凸包モデル（BCC, DRS, IRS, GRS）
L,Uの値設定によるバリエーション


生産可能集合とモデル
例
DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2
DEA（CCRモデル）
DMU Aについて解くと，最適解
θ=0.65625, λ=(0, 0, 0, 0.46875, 0.375, 0)
min. θ
s.t.
λ_1, λ_2,…,λ_6≧0
input) 0.65625 (2, 3) ≥ (2, 1) 0.46875 + (1, 4) 0.375
output) (1, 3) ≤ (1, 4) 0.46875 + (3, 3) 0.375
input) (1.313, 1.969) ≥ (1.313, 1.969)
output) (1, 3) ≤ (1.594, 3.000)
入力2 x_2
入力1 x_1
出力2 y_2
出力1 y_1

生産可能集合とモデル

注：凸包モデルはCCRを含む
（L=0, U=∞ → CCR）

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル）

CCRモデルの(2)を一般化する

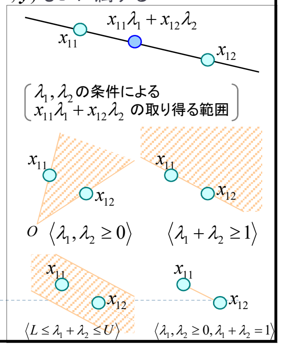
（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ (i=1,…,n) は P に属する
（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する（kを制限する）
（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \le \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \ge X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \le Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, L \le \boldsymbol{e\lambda} \le U \right\}$$

実際の問題は $\theta \boldsymbol{x}_o$ と $\boldsymbol{y}_o$ を使う

$$\begin{cases} x_1 \ge x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \ge x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \ge x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 \le y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \le y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \le y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ge 0 \qquad L \le \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \le U$$



生産可能集合とモデル

$$\begin{array}{lll} \min. \theta & & \textbf{CCRモデル} \\ s.t. & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) & \ge 0 \ (i = 1, \cdots, m) \\ & (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} & \ge 0 \ (j = 1, \cdots, s) \\ & \lambda_1, \ \cdots, \ \lambda_n & \ge 0 \end{array}$$

Charnes-Cooper-Rhodes

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル0：CCRモデル[L=0,U=∞]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ (i=1,…,n) は P に属する
（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

規模の収穫一定

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \le \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \ge X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \le Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, L \le \boldsymbol{e\lambda} \le U \right\}$$

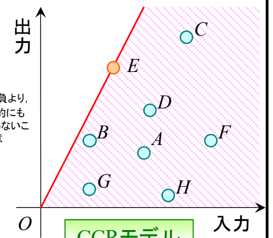
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathbf{e\lambda} \ge 0}$$

※）$\boldsymbol{\lambda}$非負より，何の制約にもなっていないことに注意

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ge 0$$



CCRモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Banker-Charnes-Cooper

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル1：BCCモデル[L=U=1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ (i=1,…,n) は P に属する
（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \le \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

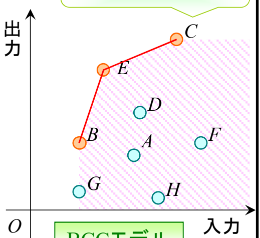
$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \ge X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \le Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, L \le \boldsymbol{e\lambda} \le U \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{e\lambda} = 1}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ge 0 \qquad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1}$$



BCCモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Increasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル2：IRSモデル[L=1,U=∞]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ (i=1,…,n) は P に属する
（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \le \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

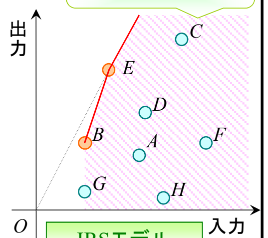
$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \ge X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \le Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, L \le \boldsymbol{e\lambda} \le U \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{e\lambda} \ge 1}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ge 0 \qquad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \ge 1}$$



IRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Decreasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル3：DRSモデル[L=0,U=1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

収穫逓減

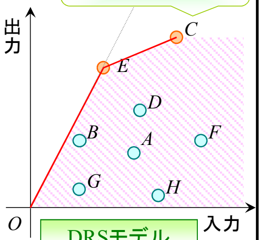
比較的規模の大きい活動の効率性を重視

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

$$\Updownarrow \quad \boldsymbol{e\lambda} \leq 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1$$



DRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

現存の活動の規模をある程度縮小拡大したものまで認める立場

General Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル4：GRSモデル[L≦1,U≧1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

収穫逓減

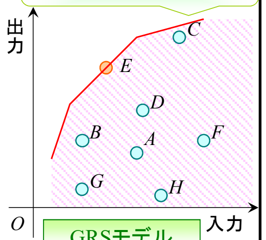
BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

$$\Updownarrow \quad ex)0.8 \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq 1.2$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad 0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1.2$$



GRSモデル
（1入力・1出力）

参考文献

[1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, *Vol.2, pp.429-444*, 1978

[2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連（1993）

[3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店（2001）

[4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店（2004）

[5] …