

2016/10/4 Tue.

問題解決技法入門

1. 統計・シミュレーションと予測

～サイコロをうまく使おう～

堀田 敬介

問題



文教太郎君はマークシート形式のテストを受ける予定だ。全部で20問あり、各問題の選択肢は4つ(A,B,C,D)である。

ところが、いざ受けてみたら、まずいことにさっぱり分らない。どうしよう？ 困ったな…。 そうだ！ こんな時は秘伝の「鉛筆転がし」を使おう！ 幸いにも、太郎君の鉛筆の断面は正方形だったので、各面にA, B, C, Dと書き、転がした…。

さて、60点以上で合格だが、彼は単位を貰えるだろうか？

問1. 彼が5問以上誤答する確率はどれくらいあると思うか 予測しなさい

問2. 彼が単位をとれる可能性はどれくらいか 予測しなさい



わかんないやサイコロを振ろう

理屈(確率統計)はいろいろあるサ！

でも、確率は示されているのだから、四の五の言わずに何千回何万回とトライ(試行)してみればいいさ～

人間の偉大な発明の1つはサイコロである

サイコロによって人は神に一步近づく(エッ？)

<注意事項>

✓ 自分で振る場合→ 理論通りの出目 (cf. 正重心サイコロ, 重心がずれた賽の確率計算)

✓ コンピュータに振らせる場合→ 疑似乱数生成 (cf. 線形合同法, Mersenne twister, etc.)

... der Alte nicht würfelt.
(神はサイコロを振らない)
Albert Einstein

でも、人間ですからサイコロ使っちゃいますゴメンね！

※アインシュタインの言葉として有名なため、言葉が一歩きすることが多いようです
ここでも、本来の発言の趣旨と異なる形で引用しているので注意

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1						問数	20		名前	文部太郎			
2						正解数	023		1問あたりの正解率	Isr11000			
3									日付	2015/4/24			
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													

問数	正解数	正解率
0	1	1.75%
1	0	0.00%
2	5	8.77%
3	8	14.04%
4	7	12.28%
5	9	15.79%
6	11	18.30%
7	7	12.28%
8	4	7.02%
9	4	7.02%
10	1	1.75%
11	1	1.75%
12	0	0.00%
13	0	0.00%
14	0	0.00%
15	0	0.00%
16	0	0.00%
17	0	0.00%
18	0	0.00%
19	0	0.00%
20	0	0.00%
21	0	0.00%
22	0	0.00%
23	0	0.00%
24	0	0.00%
25	0	0.00%

太郎君の思惑は…！？

■ 割合 ● 理論

◎Q1: 2人とも女の子である確率は？

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}$$

[上の子] [下の子]

 —
 x
 x
 O
 標本空間

$$\frac{3}{5} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}$$

世の中で役に立つ確率統計1

Q3: 1人が女の子で名前がAliceの時, 2人とも女の子である確率は?

$$\frac{3}{5} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}$$

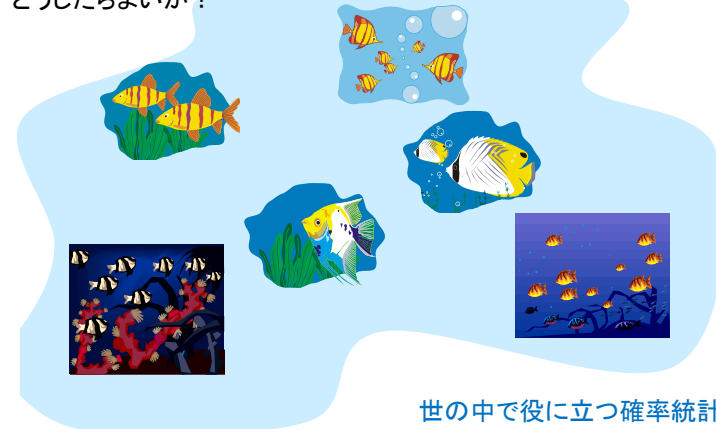
上の子 下の子

標本空間

注) 2人ともという名前であ
許さないなら、
合はない

注) 2人ともにAliceという名前であることを許さないなら、この場合はない

湖の中にいる、特定の魚の数を推定したい
どうしたらよいか？



世の中で役に立つ確率統計2

Coffee Break!

「捕獲再捕獲法 capture-recapture method」

•湖の中の魚の個体数(N匹)を推定したい

•Step1(ランダムに)魚を捕獲(M匹)、印○をつけて放す

•Step2:しばらくおいて、(ランダムに)魚を再捕獲(n匹)し、印の付いている魚を数える(x匹)

未知の推定したい数値

個体総数=N匹
全○M匹、全●N-M匹

再捕獲=n匹
●x匹、●n-x匹

既知の観測数値

➡推定値: $\hat{N} = \frac{Mn}{x}$

例) M=300, n=500, x=5なら
 $\hat{N} = \frac{300 \cdot 500}{5} = 30000$

Step1: 捕獲後、印○を付けた魚(M匹)

Step2: 再捕獲(n匹)

再捕獲魚のうち印の付いた魚(x匹)

演習

問 文教太郎君の受けた試験が、1問10点の全10問で、すべて3択だった場合、彼が 秘伝・鉛筆転がし で単位をとれる(60点以上とる)可能性を予測しなさい

シミュレーション回数(試行回数)は、x回とする(つまり、太郎君が同じ試験をx回受けたこととする)

ただし、「x = 30 + あなたの学籍番号下1桁」とする

<ヒント>

3択なので、6面体サイコロを振った時、1か2の目が出たら正解!とすればよい

試験は全10問なので、1回のシミュレーションで10個サイコロをふり、1と2の目が何回出たかを観察する。それをx回行う

結果が出たら、60点以上で単位取得なので、該当する部分から確率(予測値)を計算

問題

問 円周率πはいくつか?

モンテカルロ法(モンテカルロ・シミュレーション)

一辺1の正方形と内接する半径1の¼円を描く(右図)

右の正方形の領域に「雨が降る」としよう。雨は、正方形領域のどこに降るだろう? もちろん、¼円の内部か外部のどちらかだよ

そして、全雨粒の内、円の内部に降る雨粒の数は、正方形の面積(1)に対する¼円の面積(π/4)の比に近い値になりそうだね

だから、全雨粒の数をT、円内に降る雨粒数をRとすると
正方形面積 : ¼円面積 = 1 : π/4 = T : R
となる。即ち、 $\pi/4 = R/T \Leftrightarrow \pi = 4 \times R \div T$

この式は何を意味するのか? RとTが分かればπを計算できるってこと!

さあ、雨粒をたくさん降らせ(T=10,000粒としよう)、Rの数を数えよう!

これが、モンテカルロ法による、円周率πの近似法(の1つ)だよ

問題

問 円周率πはいくつか?

モンテカルロ法(モンテカルロ・シミュレーション)

$\pi = 4 \times R \div T$

T=降らせる雨粒の数(例:T=10,000粒)

R=円内に降った雨粒の数(数える/計算させる)

原点中心半径rの円の式は $x^2 + y^2 = r^2$ 半径1なので、 $x^2 + y^2 = 1$

ある点(x,y)(=1つの雨粒)が、円の内部にある(降る)とは、 $x^2 + y^2 < 1$

を満たすということ

つまり、ある点(x,y)(=1つの雨粒)が円内に降ったかどうかは、 $x^2 + y^2$ を計算した結果がより小さいかどうかを見れば良い

●: 円内にある点(雨粒)

●: 円外にある点(雨粒)

●: 円上にある点(雨粒)

Confidential

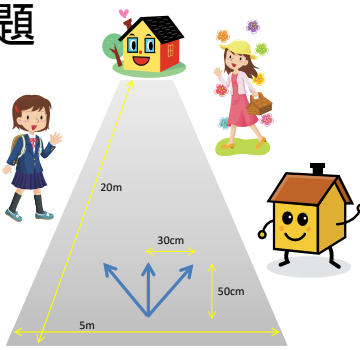
2

問題

問 酔っ払いが道を歩いている
あっちにふらふら、こっちにふら
ふら、…あぶなっかしい
無事に家までたどり着けるだ
ろうか？

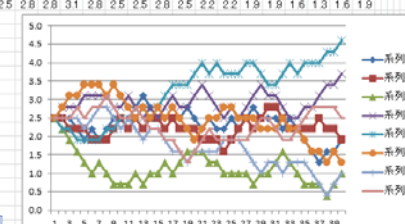
ランダム・ウォーク(酔歩)

彼の歩みは
1/3の確率で右にふらふら
1/3の確率で左にふらふら
1/3の確率でまっすぐ
としよう。ただし、いつも1歩(50cm)は前進す
るとし、左右へふらつく距離は30cmとする
道幅を5m
現在位置(初期位置)は道路の真ん中
とし、家まで20mとする
この設定でシミュレーションをするよ



演習

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AAAAAAAAAAAAAA	AY	AZ	BA	BB									
1	start																												goal							
2	歩数(歩)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21											37	38	39	40
3	距離(m)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5											18.5	19.0	19.5	20.0
4	位置	2.5	2.5	2.5	2.2	1.9	2.2	1.9	2.2	2.5	2.5	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.2	2.2	2.2											1.3	1.6	1.6	1.9
5		2.5	2.5	2.2	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	2.2	2.5	2.2	2.5	2.2	2.5	2.2	2.5	2.2	2.5	2.2	2.2	1.9											2.5	2.2	2.2	1.9
6		2.5	2.2	1.9	1.6	1.3	1.0	1.3	1.0	0.7	0.7	0.7	1.0	0.7	1.0	1.0	1.3	1.0	1.3	1.6	1.6	1.6											0.7	0.4	0.7	1.0
7		2.5	2.8	2.8	2.8	3.1	3.1	3.1	3.1	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	2.8	2.8	3.1	3.4											3.1	3.4	3.4	3.7
8		2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	1.9	2.2	2.2	2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	3.4	3.4	3.4	3.7	4.0											4.0	4.3	4.3	4.6
9		2.5	2.8	3.1	3.1	3.4	3.4	3.4	3.1	3.4	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.2	1.9	2.2											1.6	1.3	1.6	1.3
10		2.5	2.5	2.5	2.5	2.2	2.5	2.8	2.8	2.5	2.2	2.5	2.2	1.9	2.2	2.2	1.9	1.6	1.6	1.3	1.6	1.6											0.7	0.4	0.7	1.0
11		2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.8	2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.6	1.3	1.6	1.9											2.8	2.8	2.8	2.5
12																																				
13																																				
14																																				
15																																				
16																																				
17																																				
18																																				
19																																				
20																																				
21																																				
22																																				
23																																				
24																																				
25																																				
26																																				
27																																				
28																																				



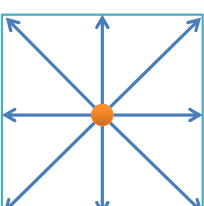
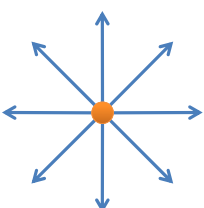
無事にたどり着けたかな？

2次元ランダムウォーク

問 酔っ払いが道を歩いている
あっちにふらふら、こっちにふら
ふら、…あぶなっかしい
無事に家までたどり着けるだ
ろうか？

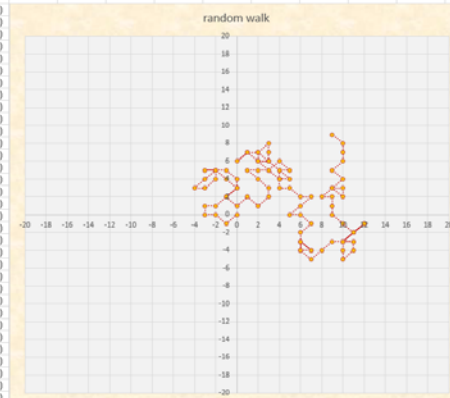
2次元ランダム・ウォーク(酔歩)

東西南北8方向にそれぞれ1/8の確率で進む
この設定でシミュレーションをするよ



演習

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V		
1	2次元ランダムウォーク(酔歩)																							
2	歩幅	1	2	3	4																			
3	次の一歩	x座標	y座標	乱数		x	y																	
4	1	東	1	0	2	4	南西	(-1	-1)															
5	2	南東	1	-1	3	6	北西	(-2	0)															
6	3	南	0	-1	4	5	西	(-3	0)															
7	4	南西	-1	-1	5	7	北	(-3	1)															
8	5	西	-1	0	6	1	東	(-2	1)															
9	6	北西	-1	1	7	8	北東	(-1	2)															
10	7	北	0	1	8	6	北東	(0	3)															
11	8	北東	1	1	9	7	北	(0	4)															
12					10	6	北西	(-1	5)															
13					11	5	西	(-2	5)															
14					12	3	南	(-2	4)															
15					13	4	南西	(-3	3)															
16					14	5	西	(-4	3)															
17					15	8	北東	(-3	4)															
18					16	8	北東	(-2	5)															
19					17	5	西	(-3	5)															
20					18	1	東	(-2	5)															
21					19	2	南東	(-1	4)															
22					20	2	南東	(0	3)															
23					21	4	南西	(-1	2)															
24					22	2	南東	(0	1)															
25					23	8	北東	(1	2)															
26					24	2	南東	(2	1)															
27					25	8	北東	(3	2)															
28					26	7	北	(3	3)															
29					27	6	北西	(2	4)															
30					28	6	北西	(1	5)															
31					29	1	東	(2	5)															
32					30	1	東	(3	5)															
33					31	6	北西	(2	6)															
34					32	1	東	(3	6)															
35					33	5	西	(2	6)															



Confidential

Coffee Break!

Monty-Hole Dilemma
確率的直感

3枚の扉の向こうに
・百万ドル(当たり)
・山羊(はずれ)
・山羊(はずれ)
が隠されているよ。
あなたは扉を1つだけ選んでいいよ。

ところで、あなたが選ばなかった2つの扉のうち、山羊の扉を開くから、それを見た後で、開く扉を変えてもいいよ。
さあ、どうする？

Coffee Break!

Monty-Hole Dilemma

どうしても納得いかない人のため、扉の数を増やしてみよう！
最初に選ぶ扉が100個あったらどうかしら？

100個の扉からあなたが1つを選んだ後で、残り99の扉のうち山羊(はずれ)の98の扉を開いて見せます。さあ、開く扉を変えてもいいよ。それともやっぱり、あなたは開く扉を変えない？
あなたの最初の選択は神懸かり的な幸運に恵まれているのかしら？

Coffee Break!

クイズ・ミリオネアとお助けルール50-50

問題: × × × × ...
A. ○ ○ ○ ○ B. △ △ △ △
C. □ □ □ □ D. ◇ ◇ ◇ ◇

世の中で役に立つ確率統計3

さっぱり分からないよ(泣)

ならば、考えずにサイコロを振って選びなさい

さいころの教え

A. ○ ○ ○ ○ B. △ △ △ △
C. □ □ □ □ D. ◇ ◇ ◇ ◇

A. ○ ○ ○ ○ B. ~~△ △ △ △~~
C. ~~□ □ □ □~~ D. ◇ ◇ ◇ ◇ 50-50で2つ消してもらおう

A. ○ ○ ○ ○ B. ~~△ △ △ △~~
C. ~~□ □ □ □~~ D. ◇ ◇ ◇ ◇ 選択を変更してファイナルアンサー！(当たる確率3/4)

Coffee Break!

答えづらい質問に答えて欲しいけど...

問: 思春期の男女90人に、恋人がいるかどうか調査したい

時間が無いので、「恋人はいるか」という質問に、『Yes』ならその場で手をあげてもらおうことにしよう。手を上げなかった人は『No』ということだね。

自分の答えが**みんなにばれてしまう**ので、
いないのに見栄を張って『YES』と答える人がいるかも...
いるのに、隠しておきたくて『NO』と答える人もいるよね...

正確な調査(正直な答え)を期待できるかな？ どうしたらいい？

世の中で役に立つ確率統計4

Coffee Break!

実現例: ランダム回答法

90人全員にサイコロを振って貰う。出た目は誰にも知らせないこと

- ◆ 1,2が出た人『恋人はいるよね?』に回答...「いる=Yes」「いない=No」
- ◆ 3-6が出た人『恋人はいないよね?』に回答...「いる=No」「いない=Yes」

Yesの人全員に手を上げて貰う(数えたら47人だった)。おわり。

本人以外は、どちらの質問に答えているのかわからない
= プライバシーの保護が確保される
= 正直な答えを期待できる(わざわざ嘘をつく理由がない)
そして、恋人がいる人数をある程度正確に推定できる!

集計後の計算: 真の値(恋人がいる人の数)を x 人とする。よって、いない人の数は $90-x$ 人

- 恋人がいる x 人のうち、上の質問に答える人は全体の1/3いて、Yesと答える
- 恋人がいない $90-x$ 人のうち、下の質問に答える人は全体の2/3いて、Yesと答える

Yesと答えたのは全部で47人だったから...

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}(90 - x) = 47 \quad \therefore x = 39$$

演習

問 原点を左下とする一辺1の正方形領域において、与えられた関数の下側にくる面積を求めなさい

与えられた関数
 $y = (3x - 2)(5x - 2)(7x - 1)$
 $= 105x^3 - 148x^2 + 61x - 6$

求めたい面積(青斜線部)

演習(ヒント)

問 原点を左下とする一辺1の正方形領域において、与えられた関数の下側にくる面積を求めなさい

与えられた関数
 $y = (3x - 2)(5x - 2)(7x - 1)$
 $= 105x^3 - 148x^2 + 61x - 6$

- : 関数の下側にある点
- : 関数の上側にある点
- : 関数上にある点

ある点 (x, y) が関数の下側にあるとは
 $y < (3x - 2)(5x - 2)(7x - 1)$
を満たすということ。つまり、
 $(3x - 2)(5x - 2)(7x - 1)$
を計算した結果より y が小さければOK
(点 (x, y) が関数の下側にある)

故に、 $T=10,000$ 粒の雨(=点 (x, y))を降らせ、そのうちこれを満たす数(=R)を数えたとき、求める面積 $S=R/T$

もっと知りたい人へ

- 関連する授業
 - 「統計の見方」(1/2セメ)
 - 「統計の分析と利用」(2セメ)
 - 「データ処理Ⅱ」(2・3セメ)
 - 「データ分析」(3セメ)
 - 「統計データの扱い方」(3/4セメ)
 - 「多変量の統計データ解析」(4セメ)
 - 「シミュレーションモデル分析A」(4セメ)
 - 「シミュレーションモデル分析B」(5セメ)
 - etc...