

2016/10/25 Tue.

問題解決技法入門

最短経路探索

堀田 敬介

ルート探索

今、円町の交差点にいる 河原町の交差点まで、車で大通りのみを選んで通り、目的地までたどり着きたい どの経路(ルート)を通るのがよいか？

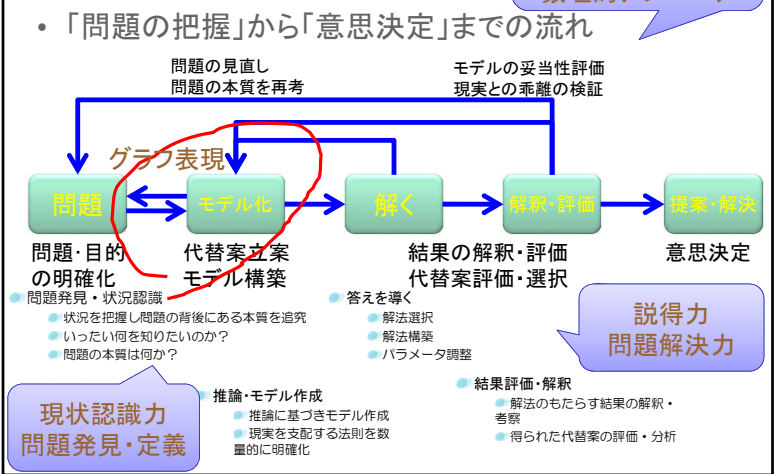


map: Yahoo!Japan地図 京都周辺

意思決定

論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



現状認識力
問題発見・定義

推論・モデル作成

結果評価・解釈

説得力
問題解決力

参考: ナビゲーション・システム

航海, 航海術

ナビゲーション・システムの2大機能

情報表示

ルート探索

ex) カー・ナビゲーション・システム
automotive navigation system

PND・GPS携帯・
スマホなど多様化

どうやってるの？

解く: どうやって解くか?

youtube
[erato お姉さん]で検索

全ての経路を調べ、
その中から最も短い経路を選べば良い!
[素朴で素直な方法=全列挙, しらみつぶし]

何通りあるか
お姉さんに聞いてみよう!

難しいなら易くすればいいのさ!

OR的問題解決のヒント

問題を簡単にする!

問題の一部だけを考える
条件を付加して易くする

問題の全体

制限した問題

ここだけで考えて上手いけば、
全体に広げられるかも!

全てのネットワーク上の最短路問題

制限した問題

- 格子状のネットワーク
- 出発地: 左上点, 目的地: 右下点
- 移動は右・下方向へのみ

難しいなら易くすればいいのさ!

制限した問題

- 格子状のネットワーク
- 出発地: 左上点, 目的地: 右下点
- 移動は右・下方向へのみ

難しいなら易くすればいいのさ!

$3+1+7+1+3 = 15$

$2+4+9+7+5 = 27$

さて、経路は全部で幾つあるのか？

Point: どんな経路も、順番を無視すれば、R=3回、D=2回使う
緑の経路=DRRRD
赤の経路=RDDRR
i.e., (R+D)の椅子へのDの座らせ方を決めれば良い→ ${}_{R+D}C_D$
例では ${}_{3+2}C_2=10$ 通り

演習：やってみよう！全列挙

• Q: スタート(左上)からゴール(右下)へと至る最短経路を求めなさい。そしてそれが最短だと示しなさい

① DRRRR: 2+1+10+1+3=17
② DRDRR: 2+4+7+1+3=17
③ DRRDR: 2+4+9+1+3=19
④ DRRRD: 2+4+9+7+5=27
⑤ RDRRR: 3+1+7+1+3=15
⑥ RDRDR: 3+1+9+1+3=17
⑦ RDRRD: 3+1+9+7+5=25
⑧ RRDDR: 3+4+2+1+3=13
⑨ RRDRD: 3+4+2+7+5=21
⑩ RRRDD: 3+4+5+6+5=23

• A: 全列挙したよ ①～⑩
の10通り計算し⑧が最短だ！

経路は全部で幾つ？

R=6, D=4なので、 ${}_{6+4}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ 通り

意思決定

論理的思考力
データ分析、統計学
数理的アプローチ

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

問題・目的の明確化
問題発見・状況認識
状況把握し問題の背後にある本質を追究
いったい何を知らたいのか？
問題の本質は何か？

代替案立案
モデル構築
答えを導く
解法選択
解法構築
パラメータ調整

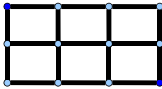
結果の評価・選択
結果の解釈・評価
代替案評価・選択
結果評価・解釈
解法のもたらす結果の解釈・考察
得られた代替案の評価・分析

意思決定
説得力
問題解決力

現状認識力
問題発見・定義
推論・モデル作成
推論に基づきモデル作成
現実を支配する法則を数量的に明確化

経路は全部で幾つ？【全列挙】

R(横)	D(縦)	全経路
3	2	10
6	4	210
10	5	3,003
20	10	30,045,015
50	50	1.0×10^{29}
100	100	9.1×10^{58}
500	500	2.7×10^{299}
1000	1000	#NUM!



【格子道路の街】
cf. 京都市, 札幌市
R, D幾つぐらい？

経路は全部で幾つ？【全列挙】

経路がとてまたくさんあるとは言っても、今のコンピュータはかなりの速さで計算できるんでしょ？ だから大丈夫だよな！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
 - Intel Core i7(3.2GHz) : 51.2GFLOPS ...1秒間に約512億回
 - PS3 : 218GFLOPS ...1秒間に約2180億回
 - PS4 : 1.84TFLOPS ...1秒間に約1兆8400億回
 - 京 : 10.51PFLOPS ...1秒間に約1京510兆回

(※2011年6月, 11月世界最速！ by Top500.org)
(※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)

※FLOPS = Floating-point Operations Per Second

1つの経路を見つけ、その総コストを計算するのに、たどる経路枝数の浮動小数点演算できると仮定しよう

例えば、R=10, D=5の経路なら、10+5回の演算で計算可と仮定するということ

[Wikipedia「FLOPS」より] 2013/5/1の情報

K(キロ) $\approx \times 10^3$ = 千倍
M(メガ) $\approx \times 10^6$ = 百万倍
G(ギガ) $\approx \times 10^9$ = 10億倍
T(テラ) $\approx \times 10^{12}$ = 1兆倍
P(ペタ) $\approx \times 10^{15}$ = 千兆倍
E(エクサ) $\approx \times 10^{18}$ = 百京倍

経路は全部で幾つ？【全列挙】

R(横)	D(縦)	全経路	1.84TFLOPS	10.51PFLOPS
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000000 秒
6	4	210	0.000000001 秒	0.000000000 秒
10	5	3,003	0.000000024 秒	0.000000000 秒
20	10	30,045,015	0.000489864 秒	0.0000000086 秒
25	25	1.3×10^{14}	57 分	0.601382523 秒
30	30	1.2×10^{17}	45 日	11 分
40	40	1.1×10^{23}	148,219 年	26 年
50	50	1.0×10^{29}	1.7×10^{11} 年	30,439,996 年
100	100	9.1×10^{58}	2.3×10^{31} 宙齡	4.0×10^{27} 宙齡
500	500	2.7×10^{299}	3.4×10^{272} 宙齡	5.9×10^{268} 宙齡

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、全列挙(しらみつぶし)では答えを求めることが出来ない！

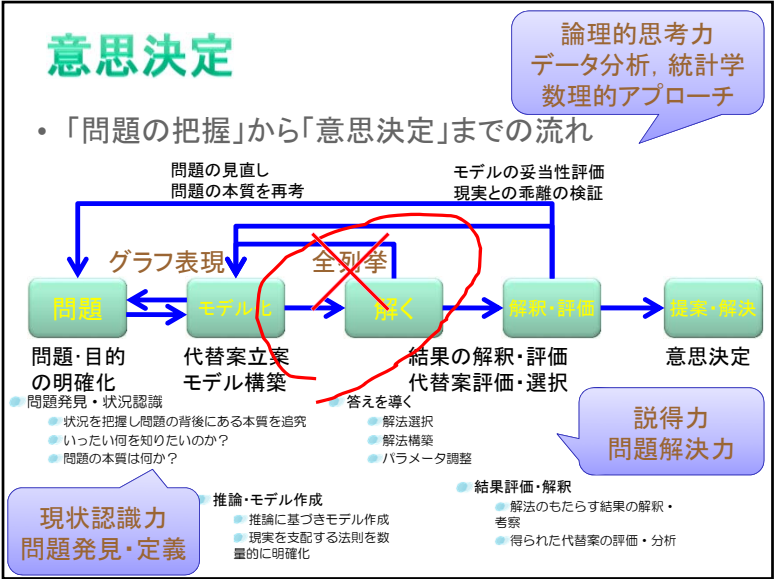
1宙齡 = 138億年



参考: 大きい数を表す接頭辞

- 万(まん) $\times 10^4$
- 億(おく) $\times 10^8$
- 兆(ちょう) $\times 10^{12}$
- 京(けい) $\times 10^{16}$
- 垓(がい) $\times 10^{20}$
- 杼(じょ) $\times 10^{24}$
- 穰(じょう) $\times 10^{28}$
- 溝(こう) $\times 10^{32}$
- 澗(かん) $\times 10^{36}$
- 正(せい) $\times 10^{40}$
- 載(さい) $\times 10^{44}$
- 極(ごく) $\times 10^{48}$
- 恒河沙(ごうがしゃ) $\times 10^{52}$
- 阿僧祇(あそうぎ) $\times 10^{56}$
- 那由他(なゆた) $\times 10^{60}$
- 不可思議(ふかしぎ) $\times 10^{64}$
- 無量大数(むりょうたいすう) $\times 10^{68}$

【注】「杼」は正しくは「のぎへん」(らしい)
【注】「無量大数」は「無限大 ∞ 」とは違う



ではどうする？

素朴で素直な方法〔列挙法〕

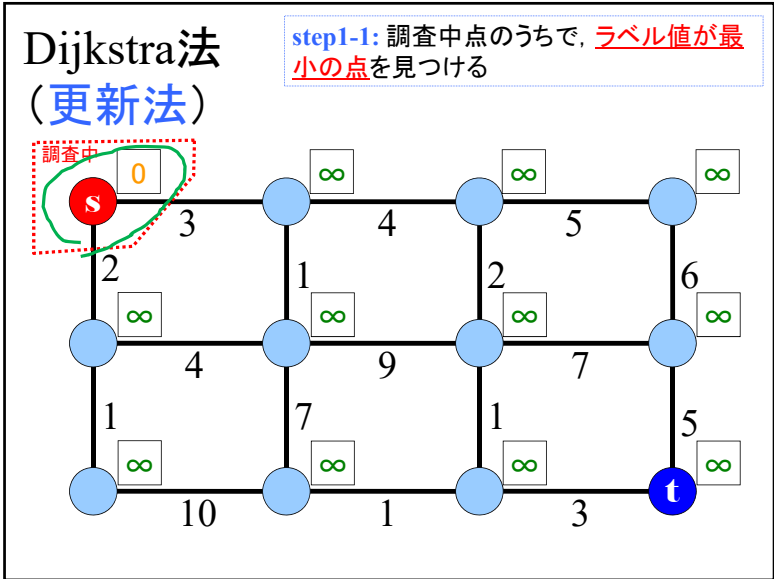
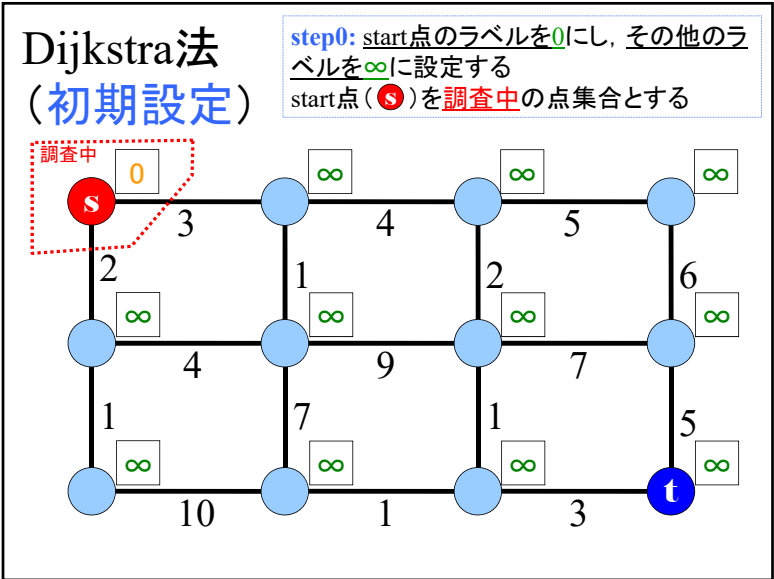
- 全経路をしらみつぶしに調べて、最も短い経路を見つける方法

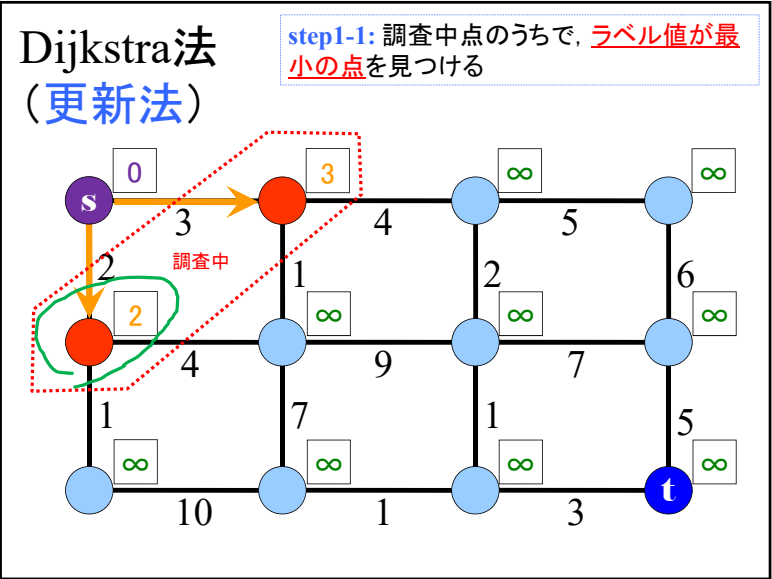
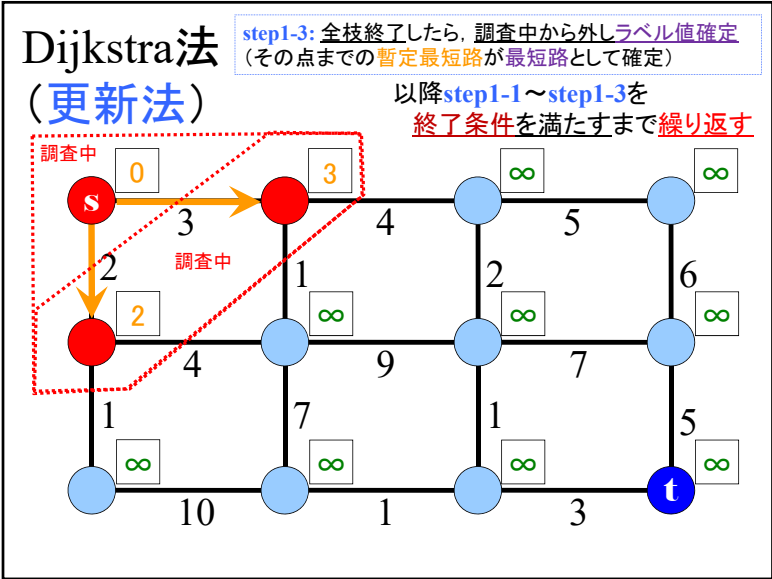
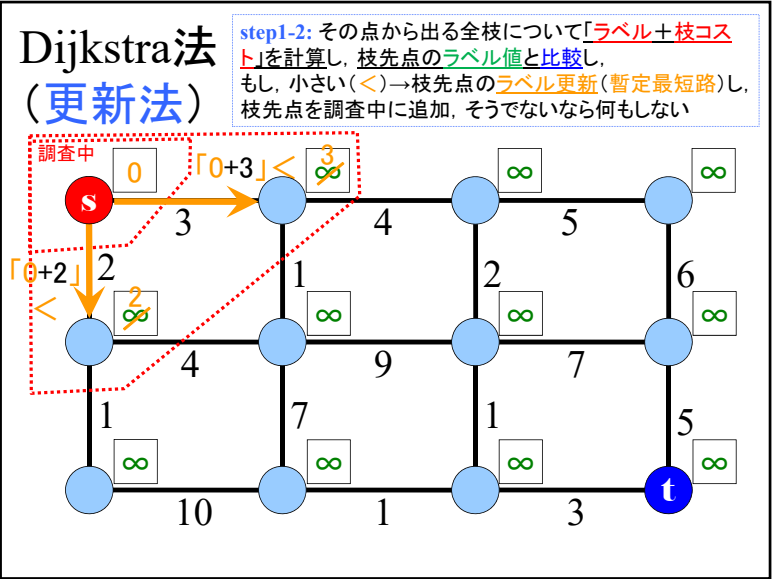
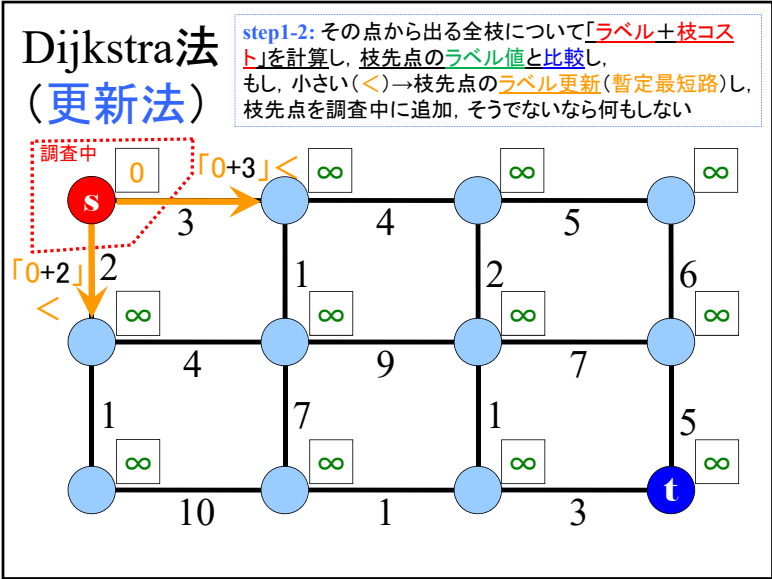
時間が掛かり過ぎる！

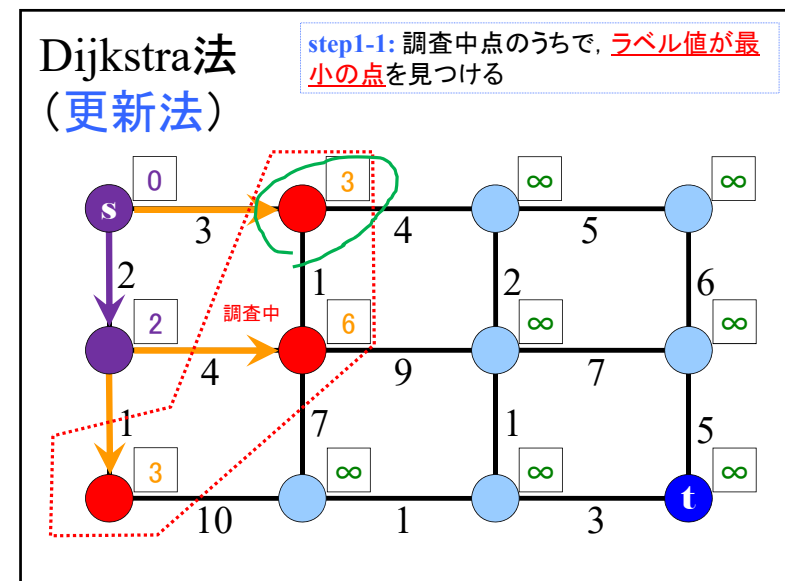
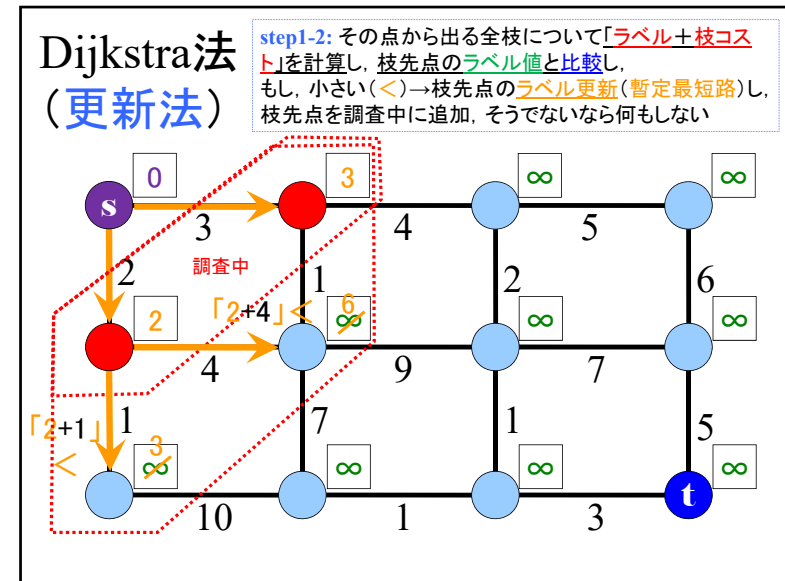
全経路をしらみつぶしに調べずに、最も短い経路を、現実的時間で見つける方法があるか？

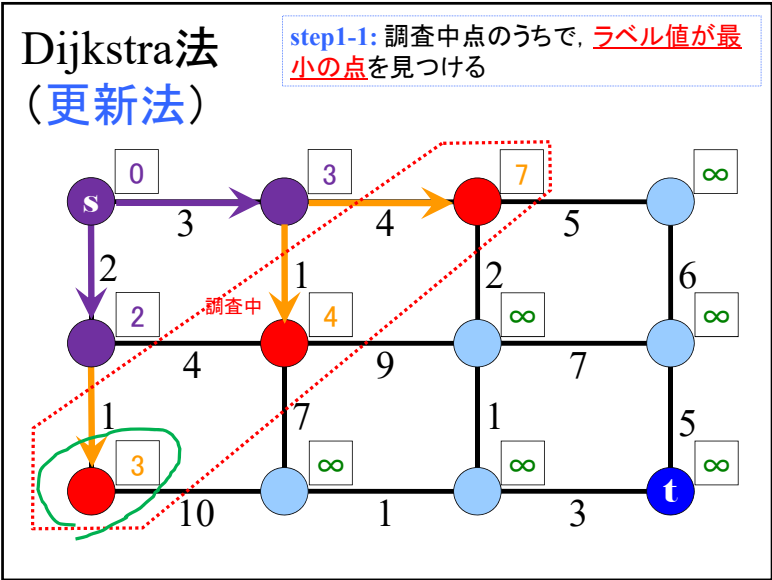
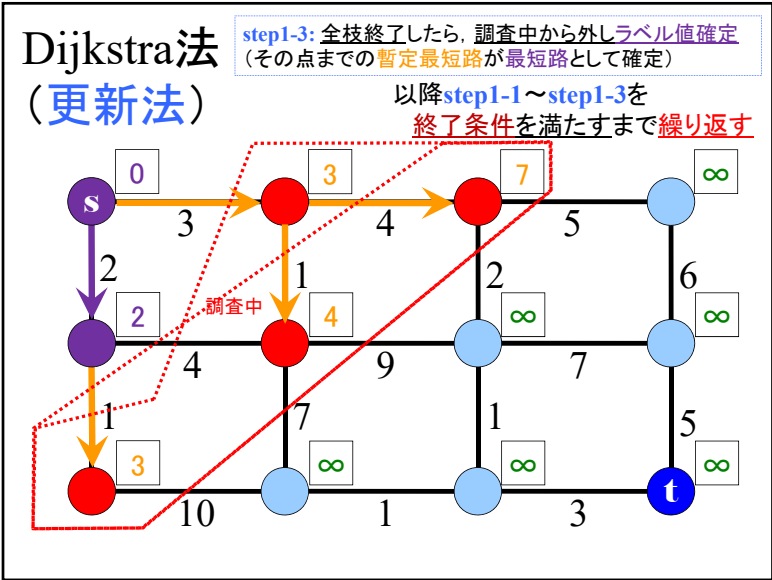
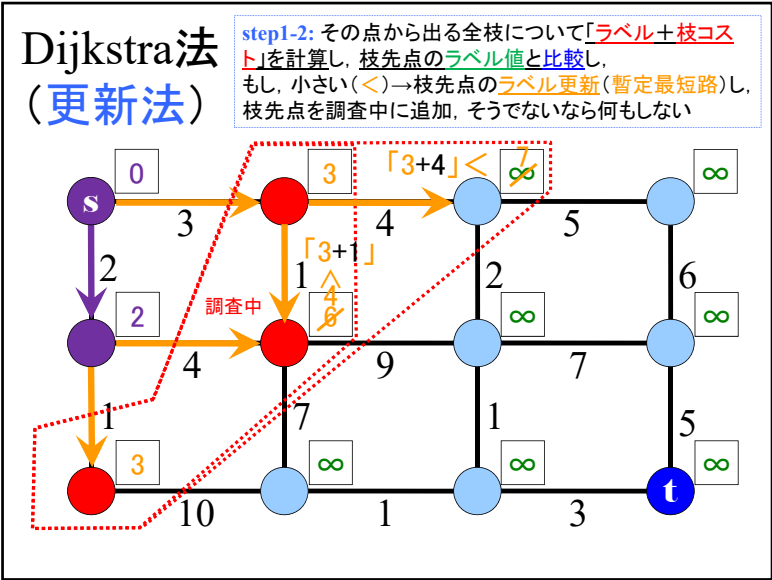
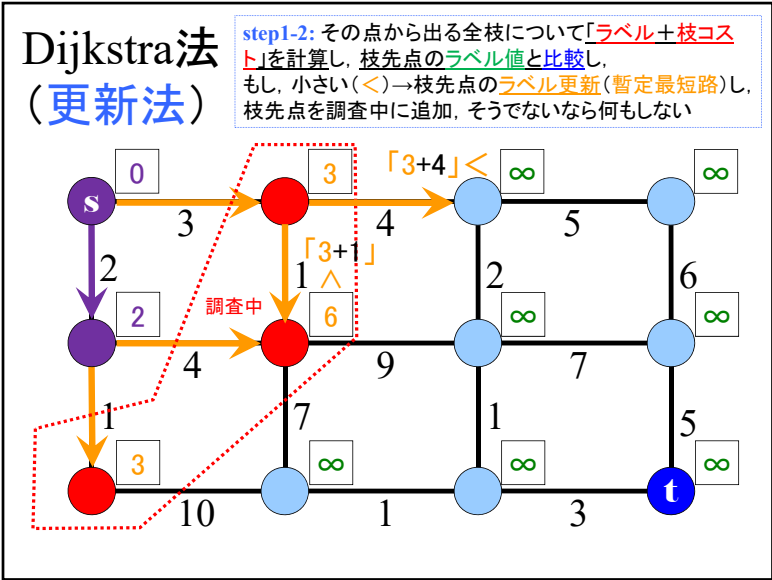
Dijkstra法 (ダイクストラ法)

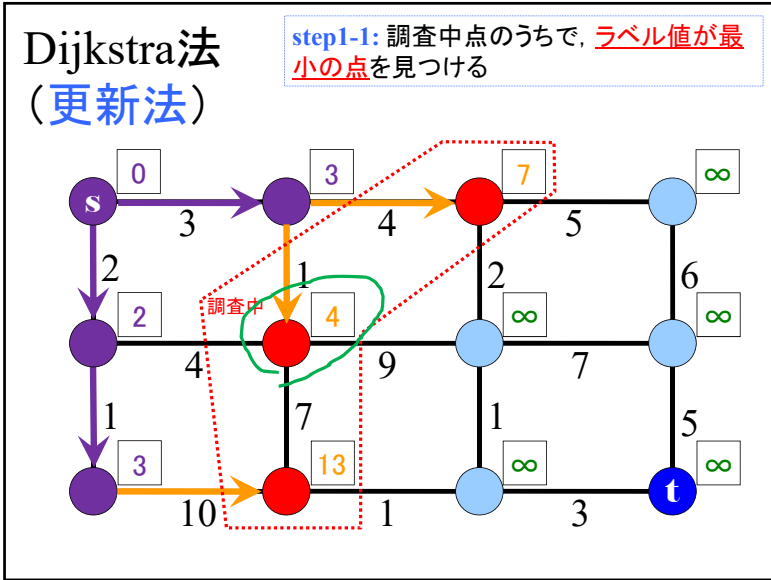
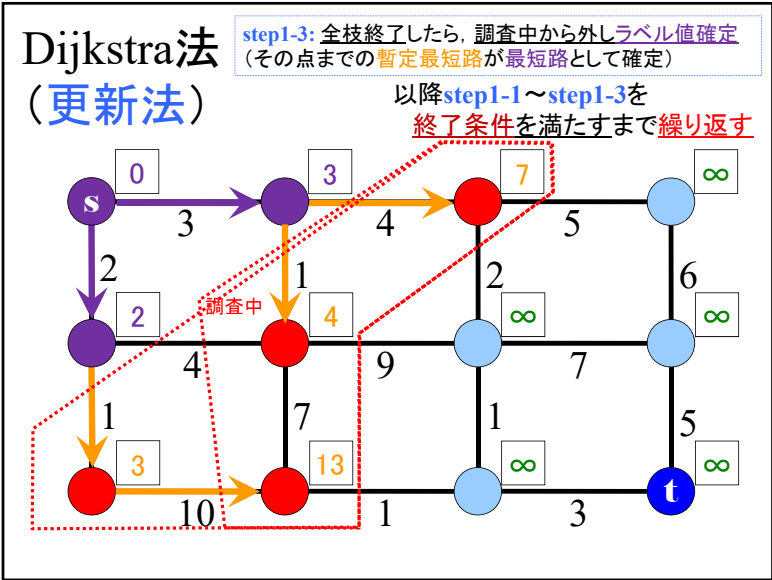
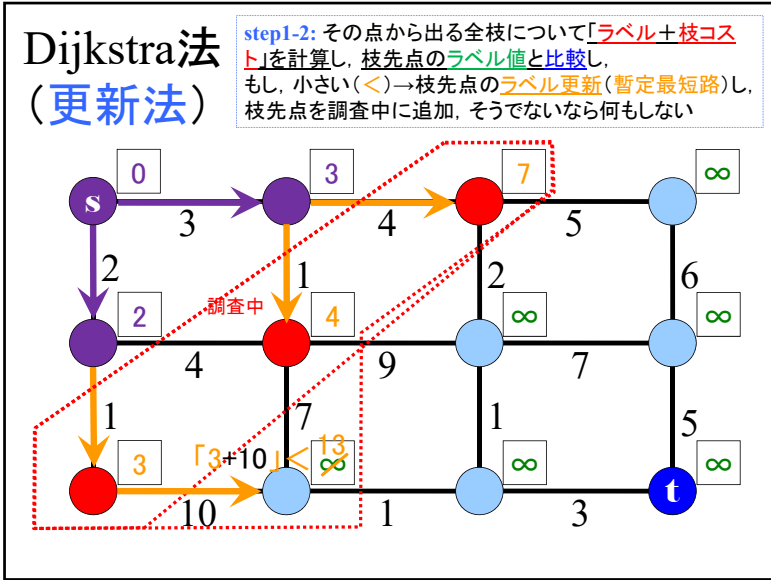
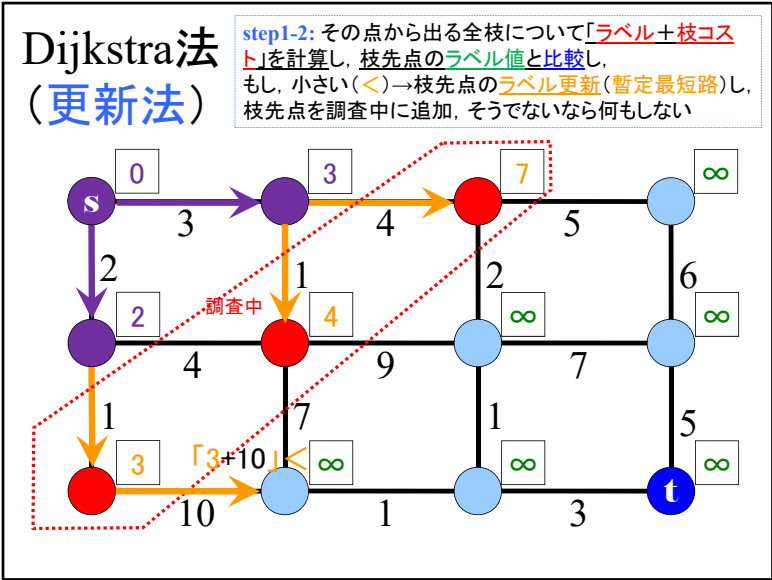
人間の創造的な仕事！

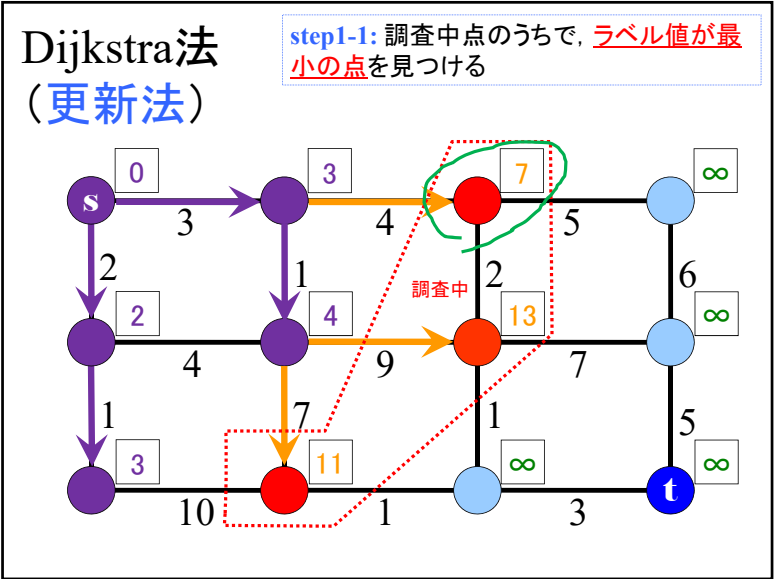
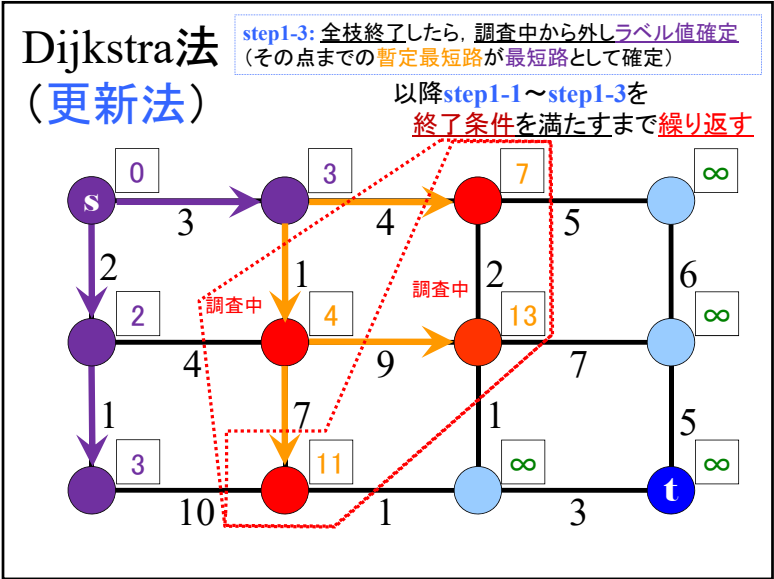
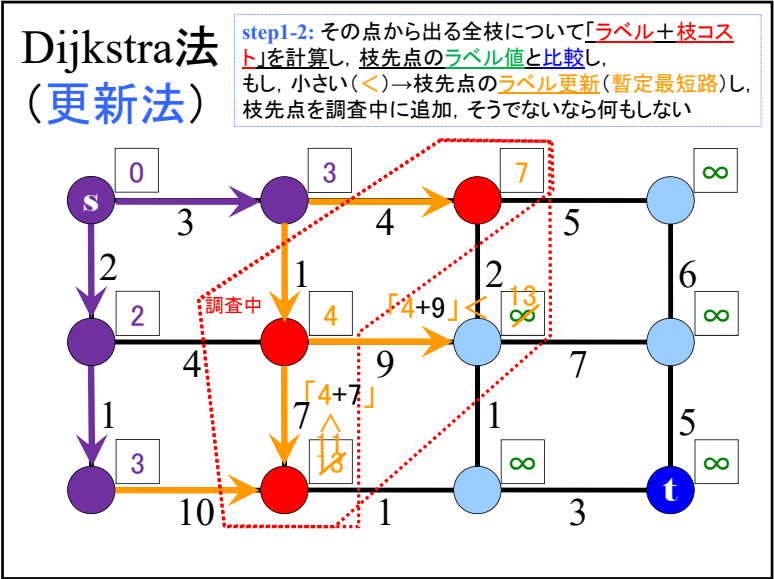
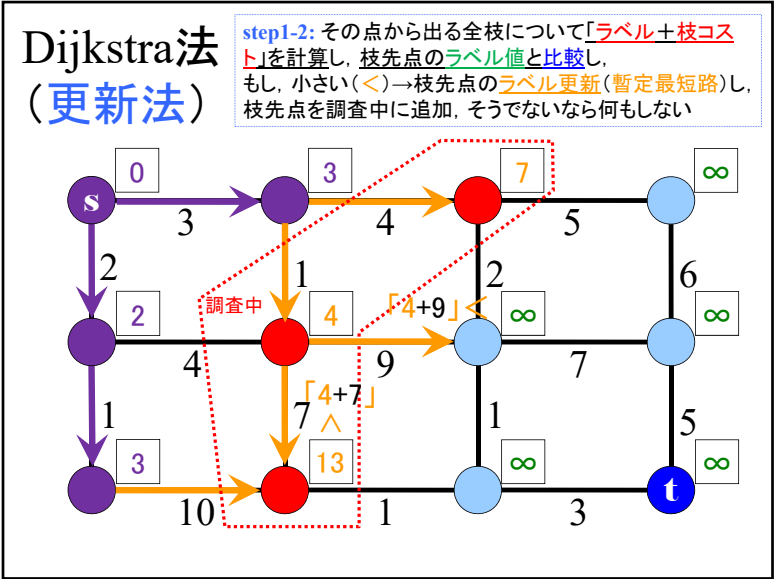


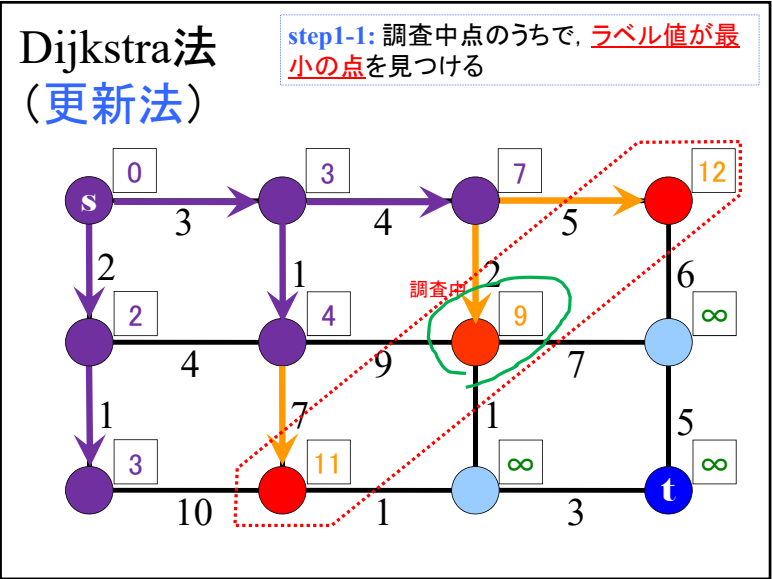
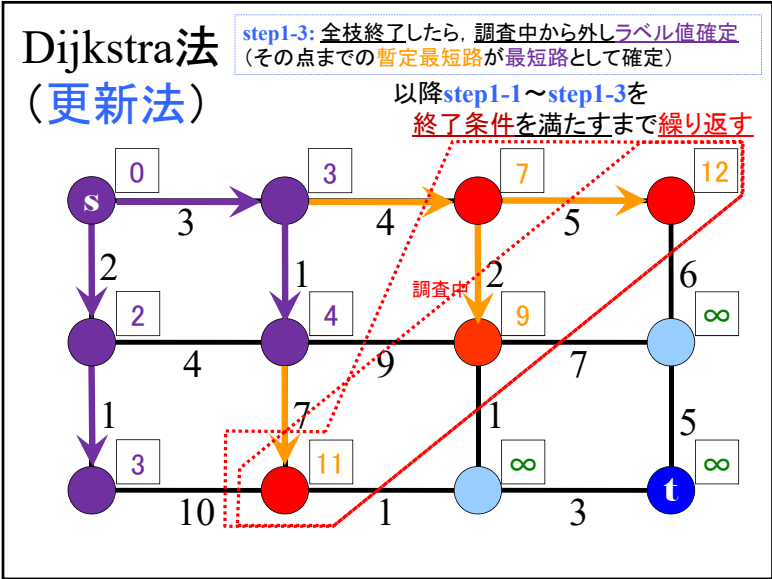
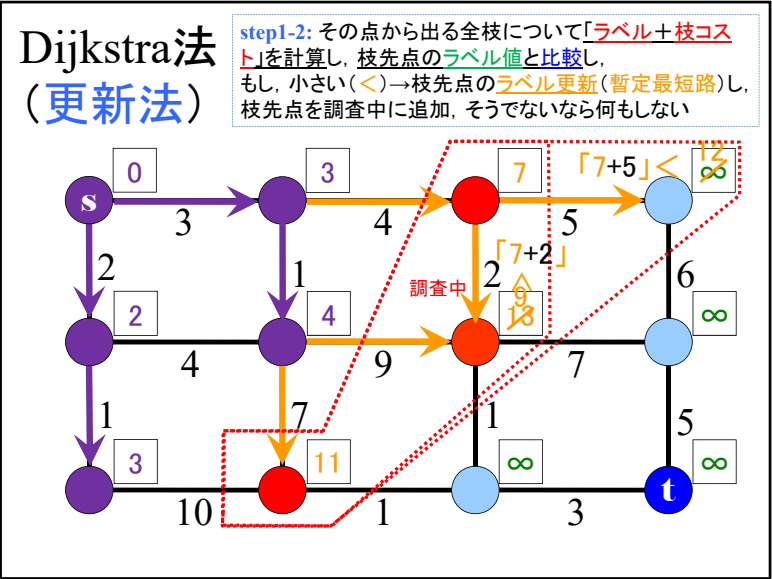
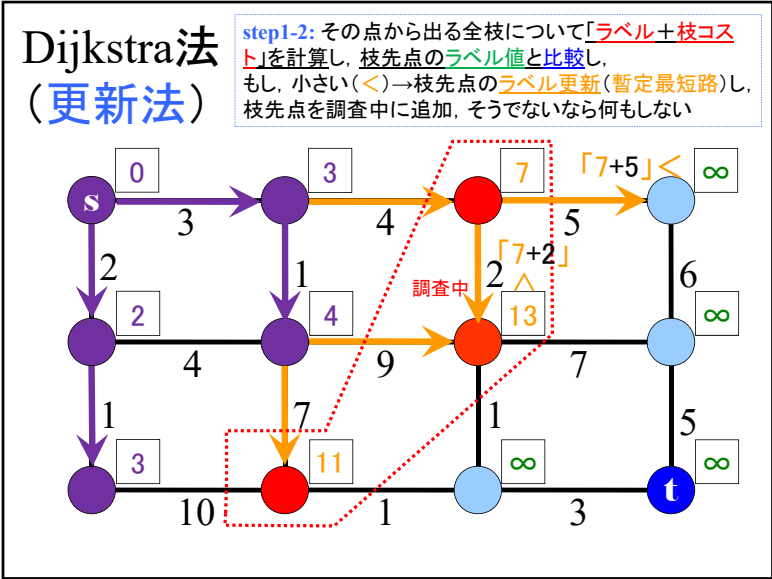






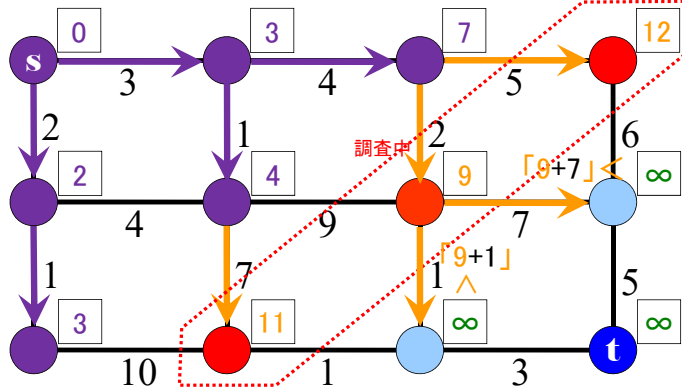






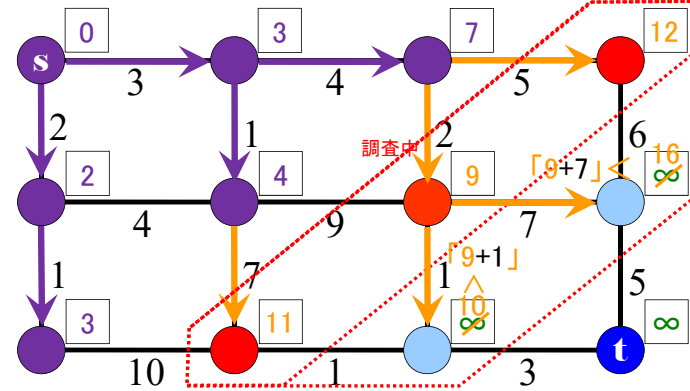
Dijkstra法 (更新法)

step1-2: その点から出る全枝について「ラベル+枝コスト」を計算し、枝先点のラベル値と比較し、もし、小さい(<)→枝先点のラベル更新(暫定最短路)し、枝先点を調査中に追加、そうでないなら何もしない



Dijkstra法 (更新法)

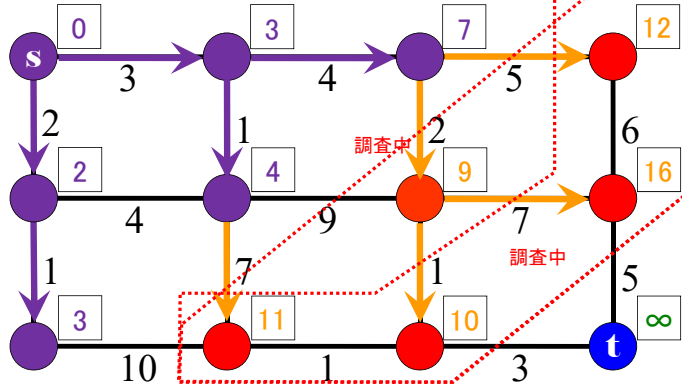
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル+枝コスト」を計算し、枝先点のラベル値と比較し、もし、小さい(<)→枝先点のラベル更新(暫定最短路)し、枝先点を調査中に追加、そうでないなら何もしない



Dijkstra法 (更新法)

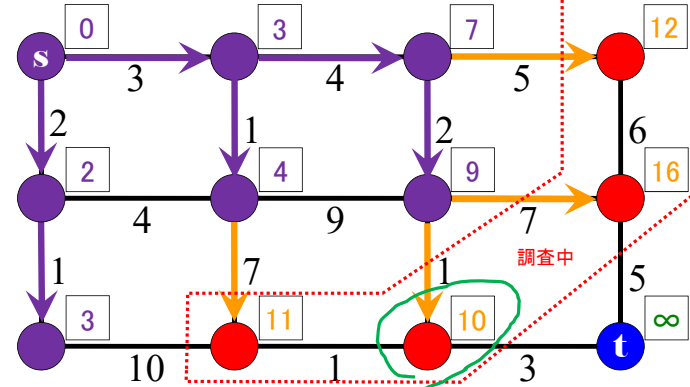
step1-3: 全枝終了したら、調査中から外しラベル値確定
(その点までの暫定最短路が最短路として確定)

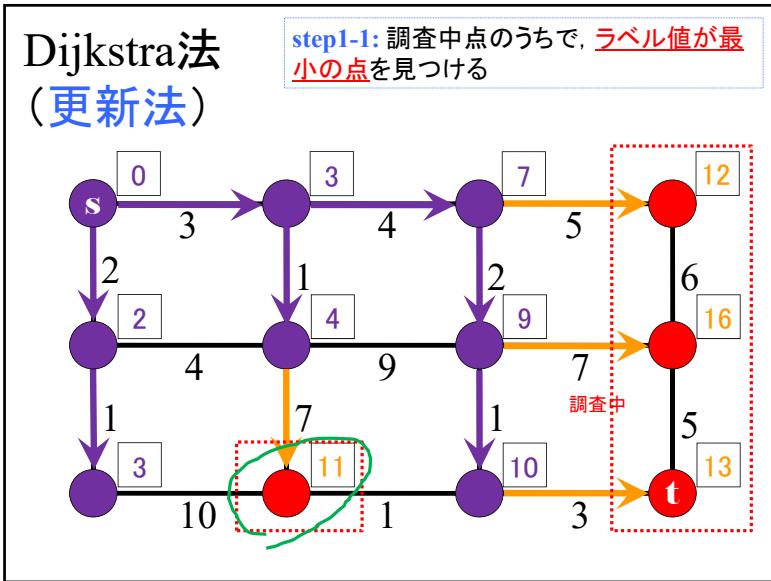
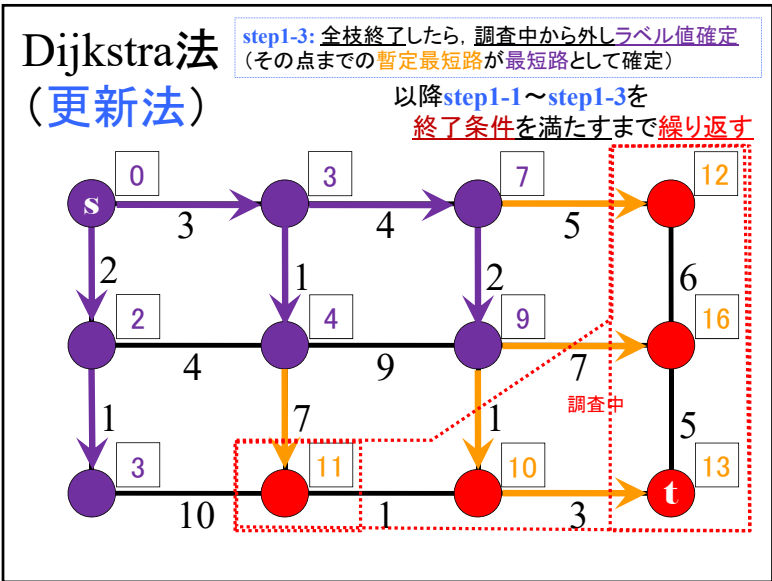
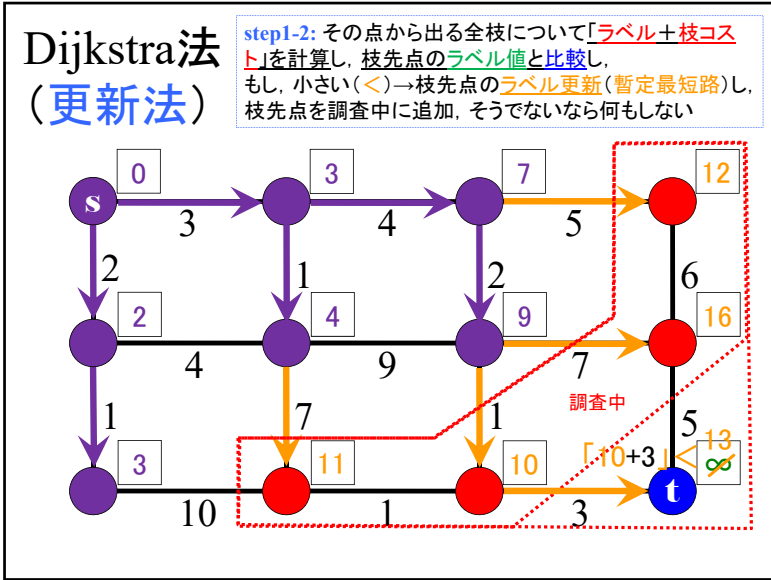
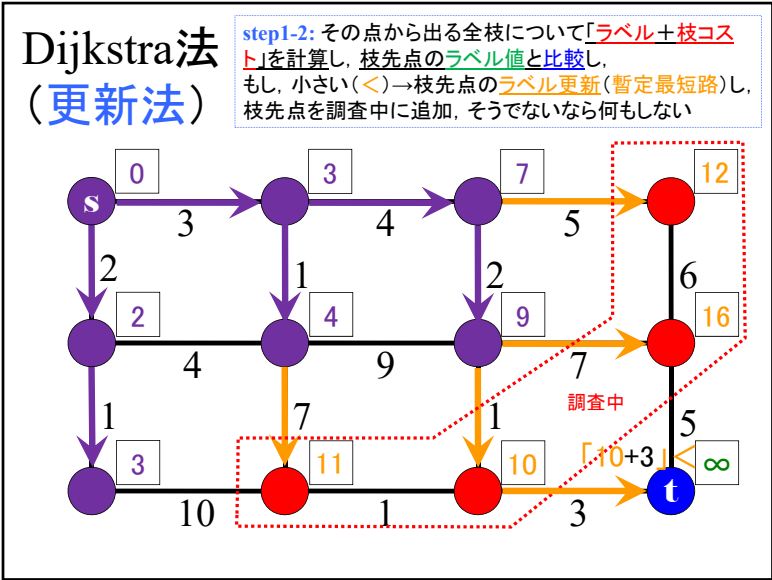
以降step1-1～step1-3を
終了条件を満たすまで繰り返す

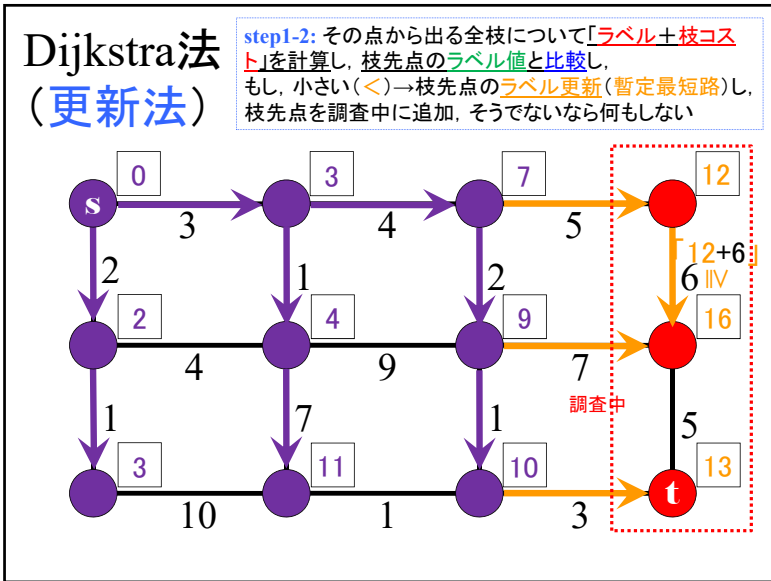
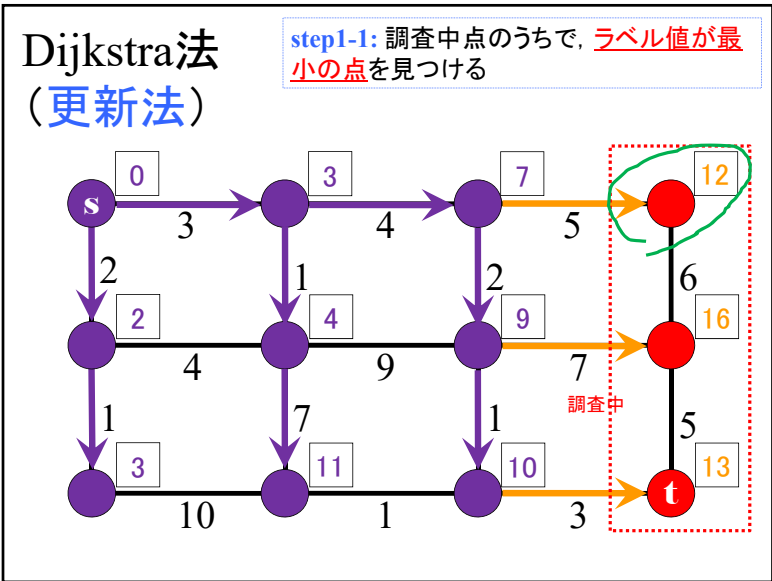
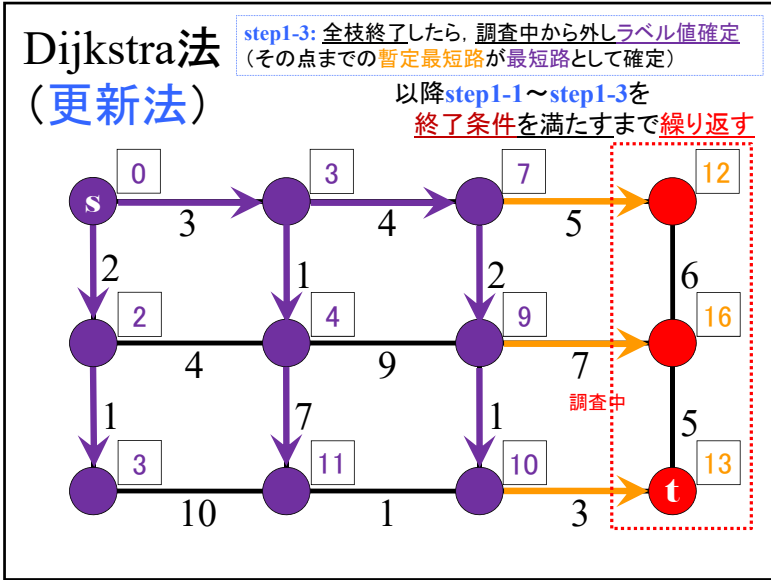
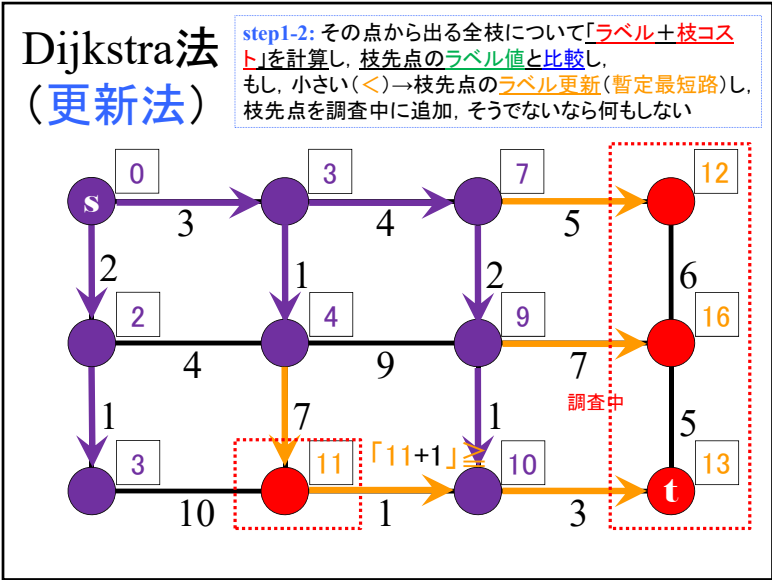


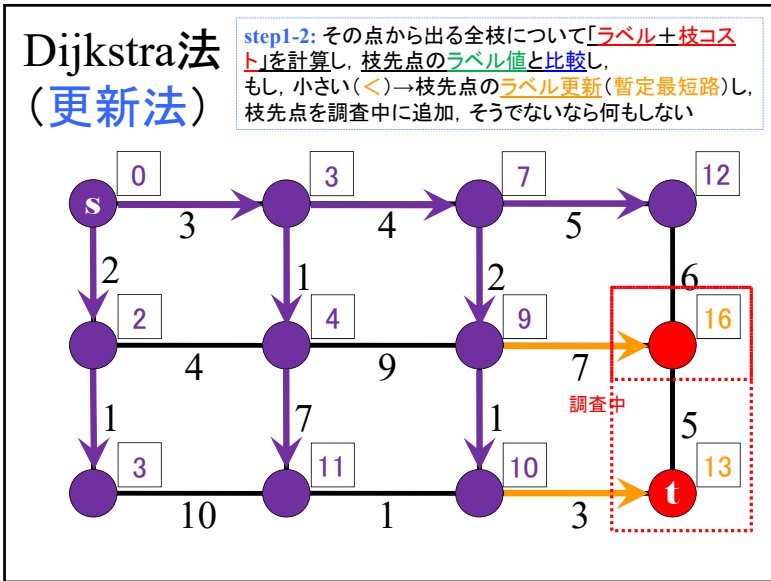
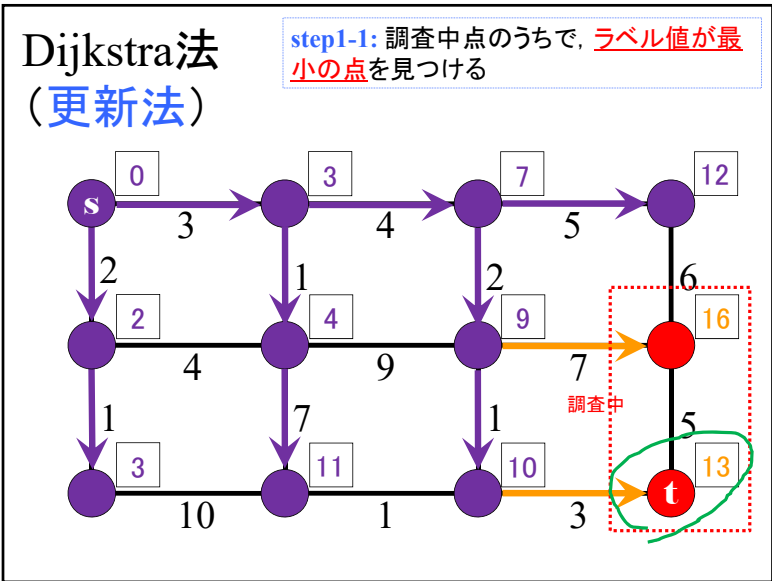
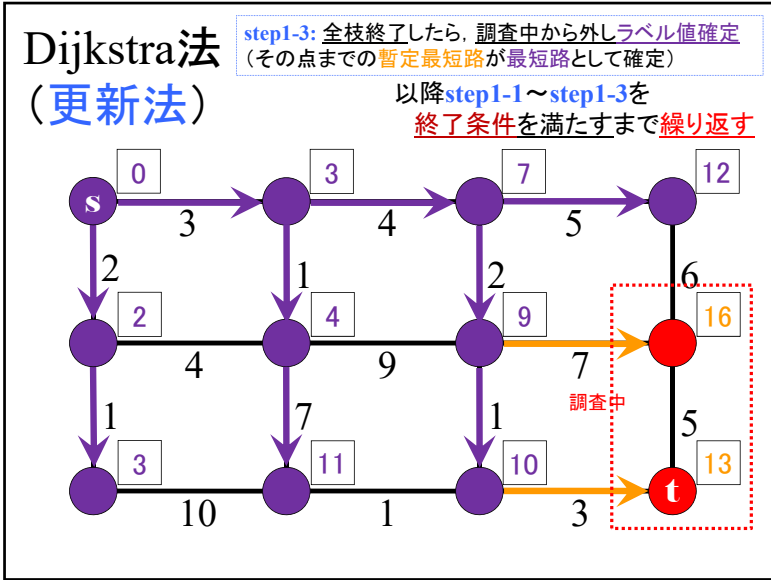
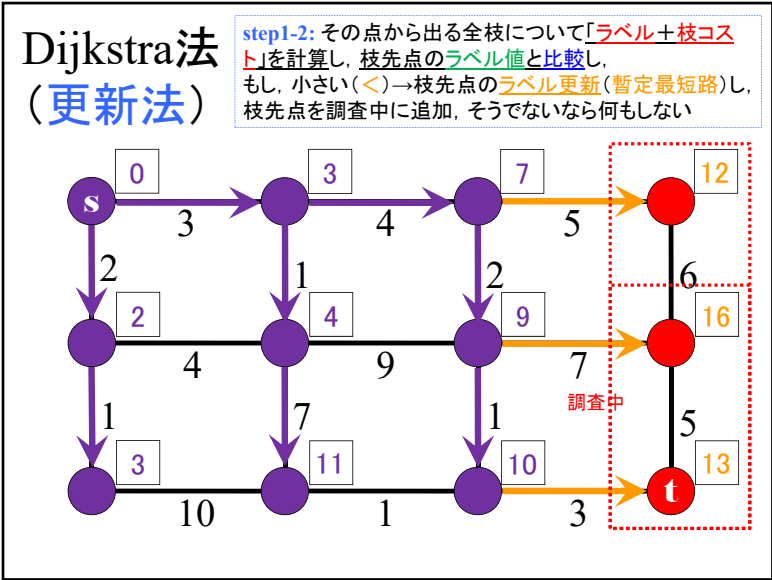
Dijkstra法 (更新法)

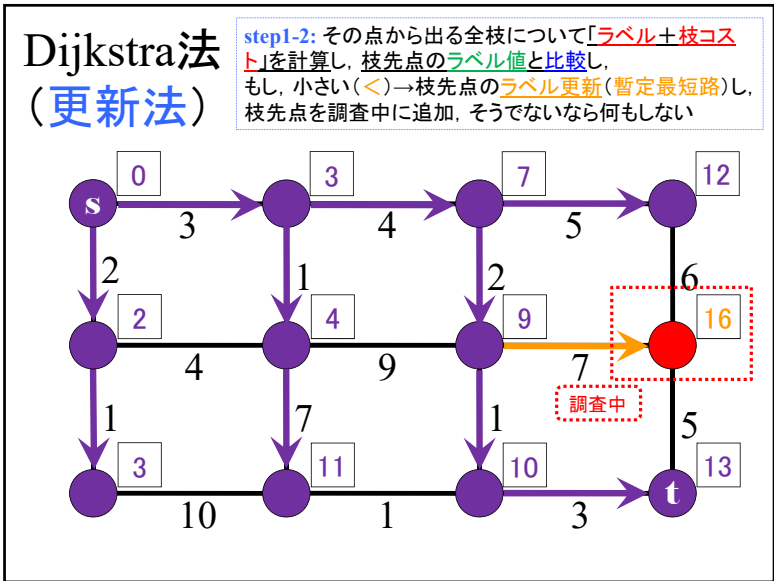
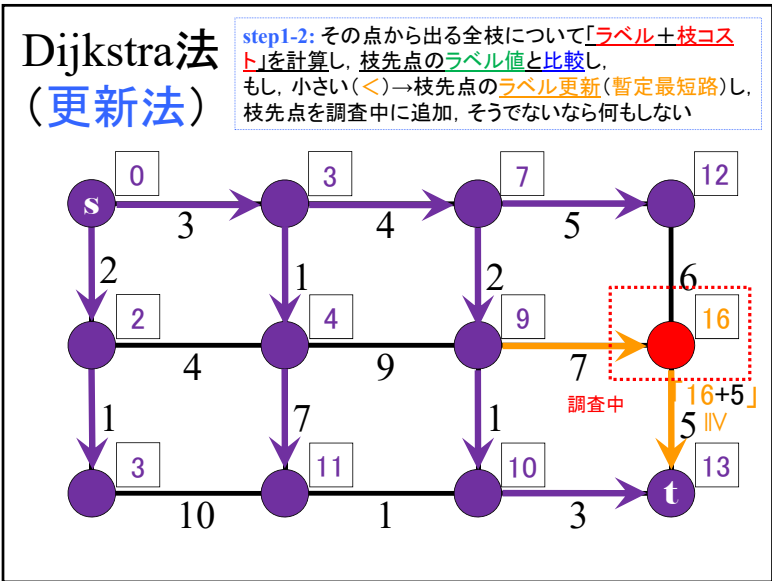
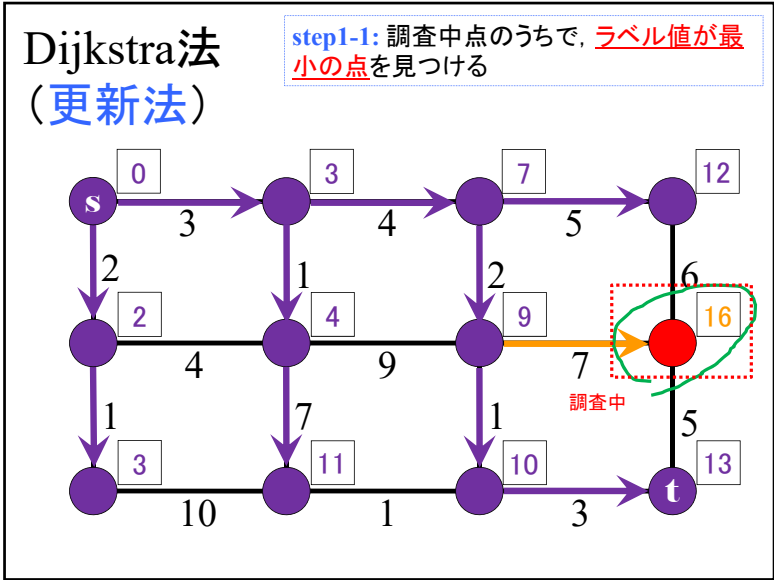
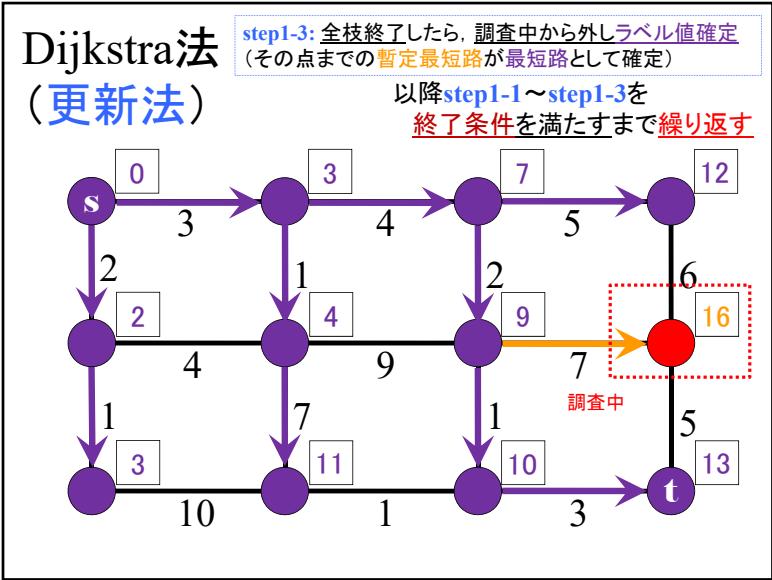
step1-1: 調査中点のうちで、ラベル値が最小の点を見つける

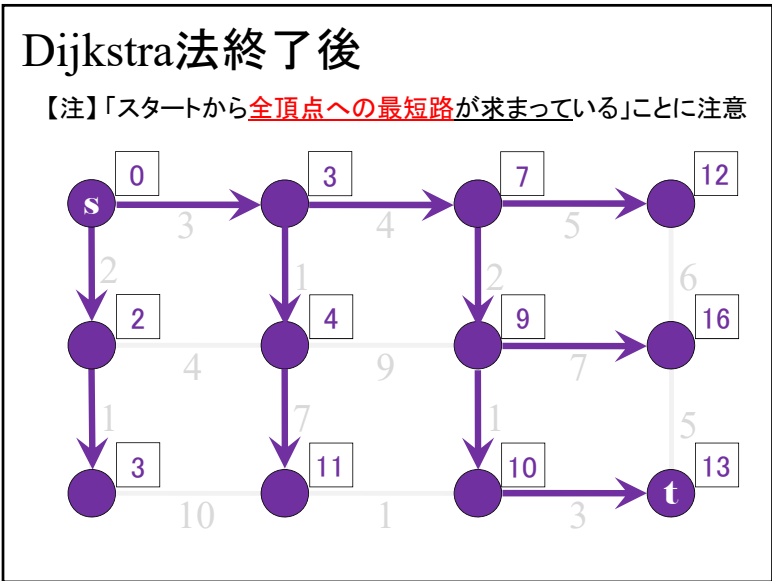
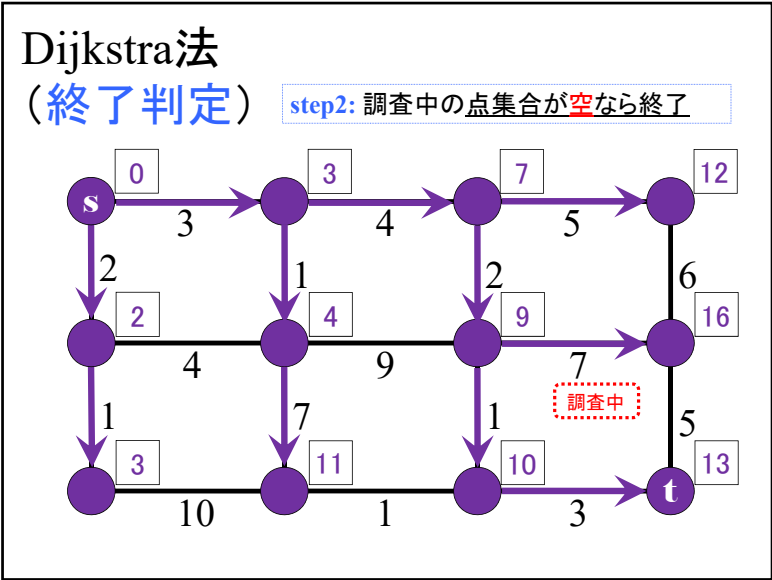
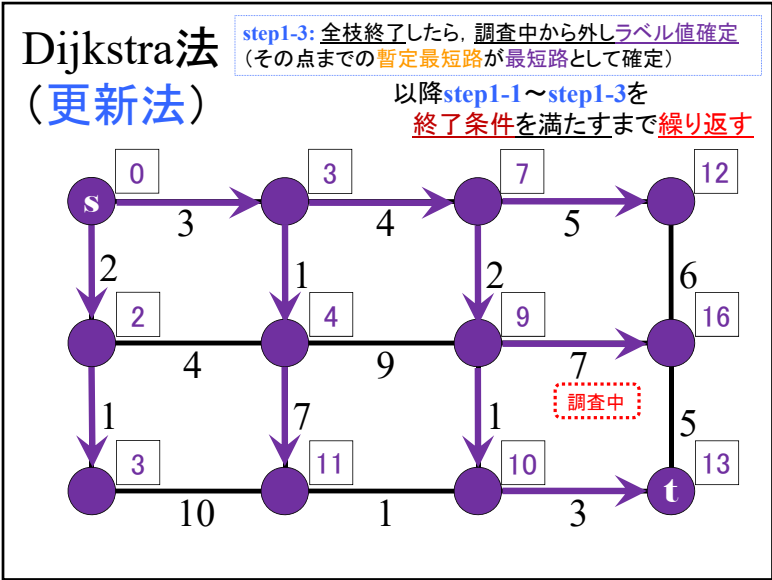


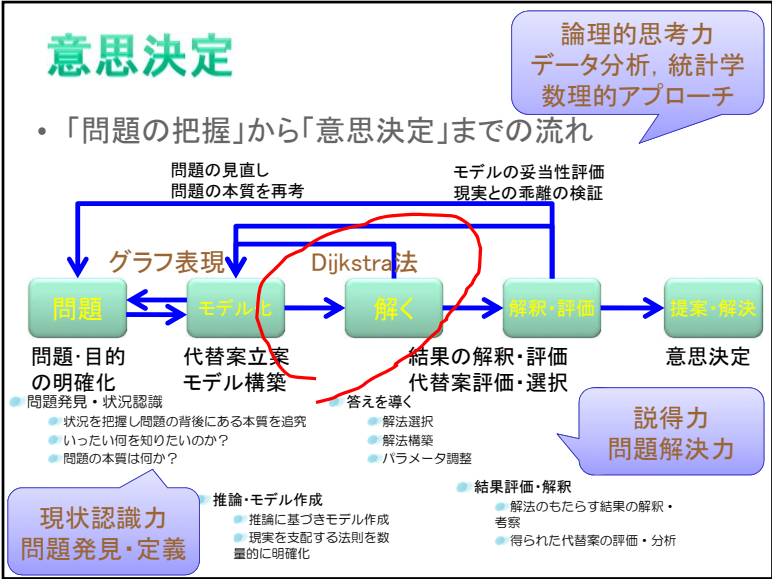












評価: Dijkstra法って速いのか?

点の数を n とすると, 大雑把な見積もりで,
 $O(n^2)$ **多項式オーダー**

点の数 n を右向枝数 R , 下向枝数 D で表すと
 $n = (R + 1) \times (D + 1)$

$n = (3 + 1) \times (2 + 1) = 12$
 $n^2 = 12^2 = 144$

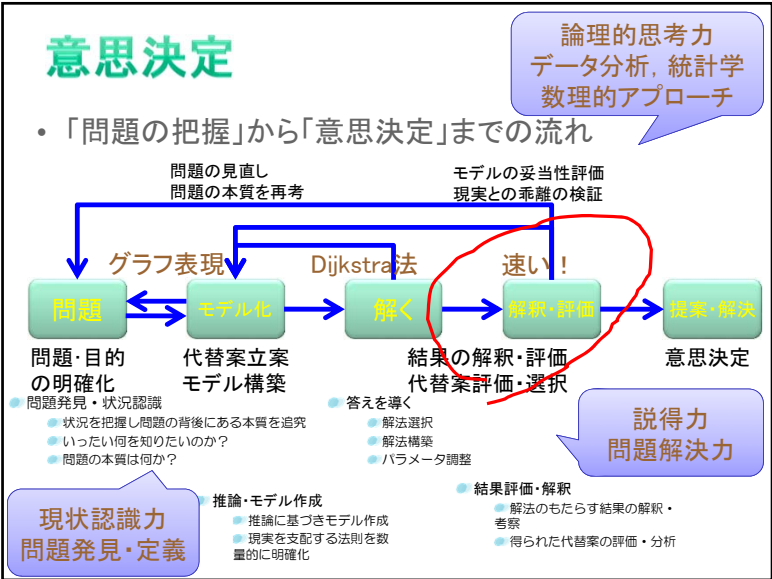
コンピュータに計算させてみよう!
簡単のため n^2 の5倍の浮動小数点演算回数で計算できると仮定.

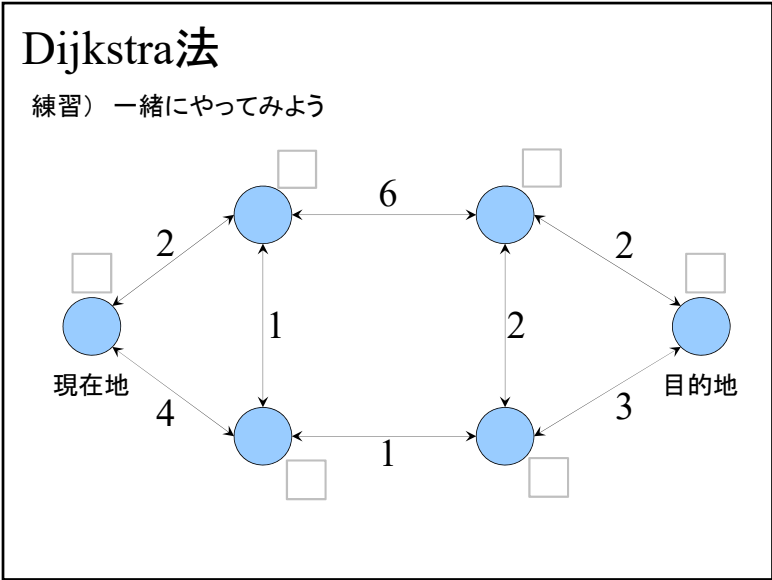
評価: Dijkstra法って速いのか?

		10.51PFLOPS		51.2GFLOPS	
R(横)	D(縦)	全経路	京 & しらみつぶし	Core i7 & Dijkstra	
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000001 秒	
6	4	210	0.000000000 秒	0.000000003 秒	
10	5	3,003	0.000000000 秒	0.000000006 秒	
20	10	30,045,015	0.000000086 秒	0.000000023 秒	
25	25	1.3×10^{14}	0.601382523 秒	0.000000066 秒	
30	30	1.2×10^{17}	11 分	0.000000094 秒	
40	40	1.1×10^{23}	26 年	0.000000164 秒	
50	50	1.0×10^{29}	30,439,996 年	0.000000254 秒	
100	100	9.1×10^{58}	4.0×10^{27} 宙齡	0.000000996 秒	
500	500	2.7×10^{299}	5.9×10^{268} 宙齡	0.000024512 秒	

世界最速SuperComp
+ 力技 (しょぼい方法)

そこらのPC
+ 人間の知恵





意思決定支援・ビジネスサポート

カーナビは存在しない

素朴な方法しかない世界

⇔

カーナビが実現

Dijkstra法が考案された世界

人間の創造的な仕事!

参考文献

コンピュータに仕事を奪われつつある人類...

[1] 新井紀子
「コンピュータが仕事を奪う」日経新聞社(2010)

[2] E. Brynjolfsson, A. McAfee, 村井章子訳
「機械との競争」日経BP社(2013)

もっと知りたい人へ

- 参考文献
 - グリツツマン, ブランデンベルク「最短経路の本」 シュプリンガー(2008)
 - W.J.クック「驚きの数学 巡回セールスマン問題」 青土社(2013)
 - 山本, 久保「巡回セールスマン問題への招待」 朝倉書店(1997)
 - 久保, 松井「組合せ最適化『短編集』」 朝倉書店(1999)
 - 松井, 根本, 宇野「入門オペレーションズ・リサーチ」東海大出版(2008)
- 関連する授業
 - 「ネットワークモデル分析」(4セメ)
 - 「最適化モデル分析」(5セメ) etc...