

2016/5/13 Fri.

問題解決技法入門

最短経路探索

堀田 敬介

ルート探索

今、円町の交差点にいる 河原町の交差点まで、車で大通りのみを選んで通り、目的地までたどり着きたい どの経路(ルート)を通るのがよいか？

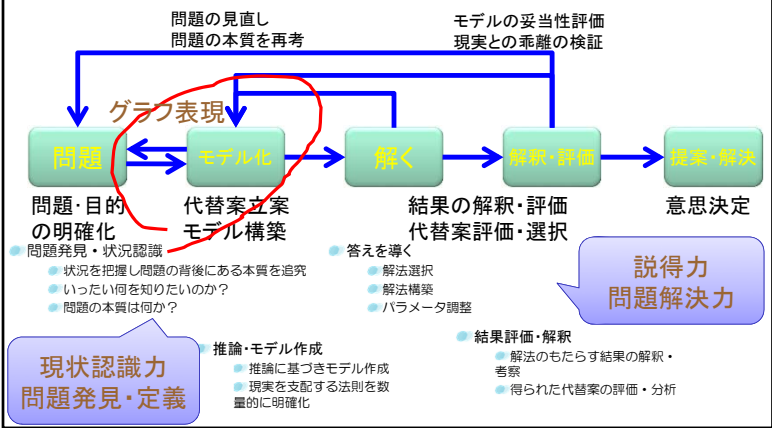


map: Yahoo!Japan地図 京都周辺

意思決定

論理的思考力
データ分析, 統計学
数理的アプローチ

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



現状認識力
問題発見・定義

説得力
問題解決力

参考: ナビゲーション・システム

航海, 航海術

ナビゲーション・システムの2大機能

情報表示

現在地や渋滞情報, 周辺情報などを地図に重ねて表示

ルート探索

目的地を指定すると現在地からの(最短)経路を表示

ex) カー・ナビゲーション・システム
automotive navigation system

PND・GPS携帯・
スマホなど多様化

どうやってるの？

解く: どうやって解くか?

youtube
[erato お姉さん]で検索

全ての経路を調べ、
その中から最も短い経路を選べば良い!
[素朴で素直な方法=全列挙, しらみつぶし]

何通りあるか
お姉さんに聞いてみよう!

難しいなら易くすればいいのさ!

OR的問題解決のヒント

問題を簡単にする!

問題の一部だけを考える
条件を付加して易くする

問題の全体

制限した問題

ここだけで考えて上手くいけば、
全体に広げられるかも!

全てのネットワーク上の最短路問題

制限した問題

- 格子状のネットワーク
- 出発地: 左上点, 目的地: 右下点
- 移動は右・下方向へのみ

難しいなら易くすればいいのさ!

制限した問題

- 格子状のネットワーク
- 出発地: 左上点, 目的地: 右下点
- 移動は右・下方向へのみ

難しいなら易くすればいいのさ!

$3+1+7+1+3 = 15$

$2+4+9+7+5 = 27$

さて、経路は全部で幾つあるのか？

Point: どんな経路も、順番を無視すれば、R=3回、D=2回使う
緑の経路=DRRRD
赤の経路=RDDRR
i.e., (R+D)の椅子へのDの座らせ方を決めれば良い→ ${}_{R+D}C_D$
例では ${}_{3+2}C_2 = 10$ 通り

演習：やってみよう！全列挙

• Q: スタート(左上)からゴール(右下)へと至る最短経路を求めなさい。そしてそれが最短だと示しなさい

① DRRRR: 2+1+10+1+3=17
② DRDRR: 2+4+7+1+3=17
③ DRRDR: 2+4+9+1+3=19
④ DRRRD: 2+4+9+7+5=27
⑤ RDDRR: 3+1+7+1+3=15
⑥ RDRDR: 3+1+9+1+3=17
⑦ RDRRD: 3+1+9+7+5=25
⑧ RRDDR: 3+4+2+1+3=13
⑨ RRDRD: 3+4+2+7+5=21
⑩ RRRDD: 3+4+5+6+5=23

• A: 全列挙したよ ①～⑩
の10通り計算し⑧が最短だ！

経路は全部で幾つ？

R=6, D=4なので、 ${}_{6+4}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ 通り

意思決定

論理的思考力
データ分析、統計学
数理的アプローチ

• 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

問題・目的の明確化
問題発見・状況認識
状況把握し問題の背後にある本質を追究
いったい何を知らたいのか？
問題の本質は何か？

代替案立案
モデル構築
答えを導く
解法選択
解法構築
パラメータ調整

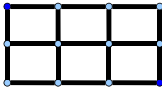
結果の解釈・評価
代替案評価・選択
結果評価・解釈
解法のもたらす結果の解釈・考察
得られた代替案の評価・分析

意思決定
説得力
問題解決力

現状認識力
問題発見・定義
推論・モデル作成
推論に基づきモデル作成
現実を支配する法則を数量的に明確化

経路は全部で幾つ？【全列举】

R(横)	D(縦)	全経路
3	2	10
6	4	210
10	5	3,003
20	10	30,045,015
50	50	1.0×10^{29}
100	100	9.1×10^{58}
500	500	2.7×10^{299}
1000	1000	#NUM!



【格子道路の街】
cf. 京都市, 札幌市
R, D幾つぐらい？

経路は全部で幾つ？【全列举】

経路がとてまたくさんあるとは言っても、今のコンピュータはかなりの速さで計算できるんでしょ？ だから大丈夫だね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
 - Intel Core i7(3.2GHz) : 51.2GFLOPS ...1秒間に約512億回
 - PS3 : 218GFLOPS ...1秒間に約2180億回
 - PS4 : 1.84TFLOPS ...1秒間に約1兆8400億回
 - 京 : 10.51PFLOPS ...1秒間に約1京510兆回

(※2011年6月, 11月世界最速！ by Top500.org)
(※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)

※FLOPS = Floating-point Operations Per Second

[Wikipedia「FLOPS」より]
2013/5/1の情報

1つの経路を見つけ、その総コストを計算するのに、たどる経路枝数の浮動小数点演算でできると仮定しよう

例えば、R=10, D=5の経路なら、10+5回の演算で計算可と仮定するということ

K(キロ) $\approx \times 10^3$ = 千倍
M(メガ) $\approx \times 10^6$ = 百万倍
G(ギガ) $\approx \times 10^9$ = 10億倍
T(テラ) $\approx \times 10^{12}$ = 1兆倍
P(ペタ) $\approx \times 10^{15}$ = 千兆倍
E(エクサ) $\approx \times 10^{18}$ = 百京倍

経路は全部で幾つ？【全列举】

1.84TFLOPS 10.51PFLOPS

R(横)	D(縦)	全経路	PS4	京
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000000 秒
6	4	210	0.000000001 秒	0.000000000 秒
10	5	3,003	0.000000024 秒	0.000000000 秒
20	10	30,045,015	0.000489864 秒	0.000000086 秒
25	25	1.3×10^{14}	57 分	0.601382523 秒
30	30	1.2×10^{17}	45 日	11 分
40	40	1.1×10^{23}	148,219 年	26 年
50	50	1.0×10^{29}	1.7×10^{11} 年	30,439,996 年
100	100	9.1×10^{58}	2.3×10^{31} 宙齡	4.0×10^{27} 宙齡
500	500	2.7×10^{299}	3.4×10^{272} 宙齡	5.9×10^{268} 宙齡

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、全列举(しらみつぶし)では答えを求めることが出来ない！

1宙齡 = 138億年

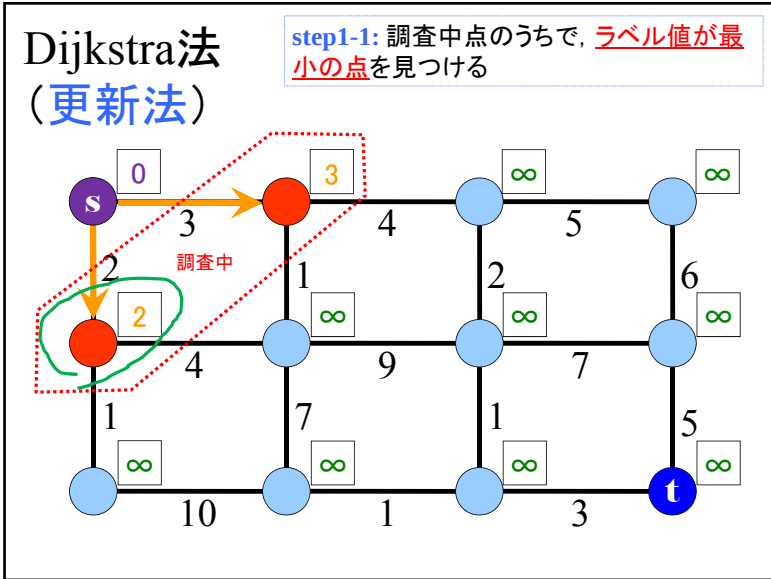
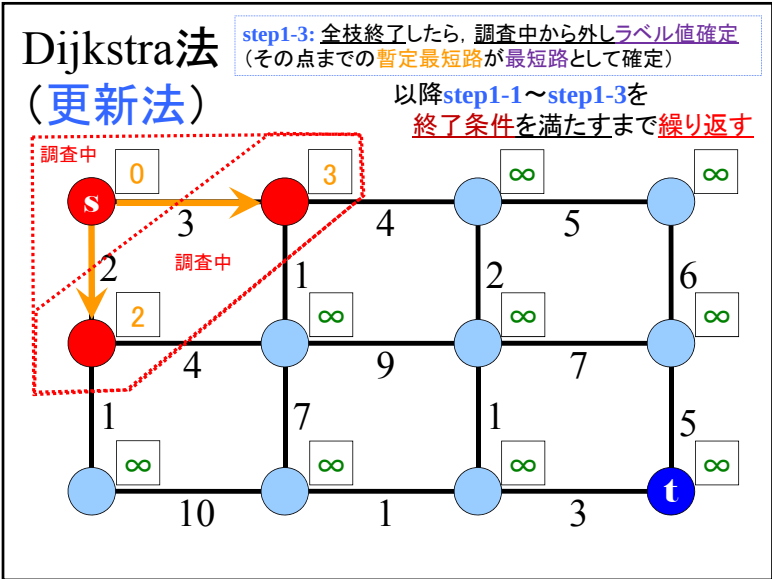
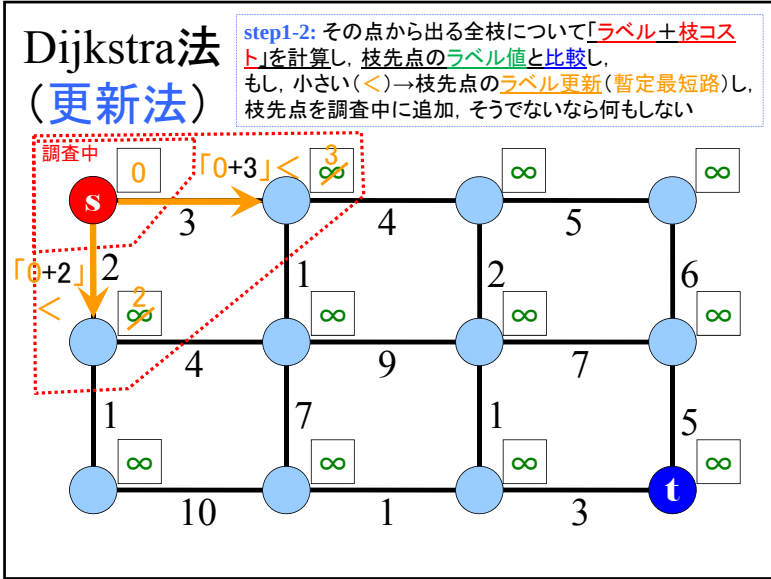
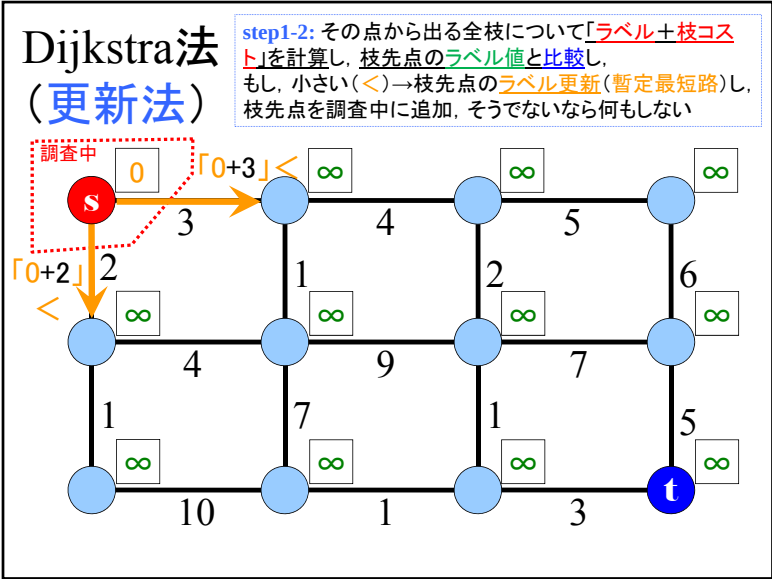


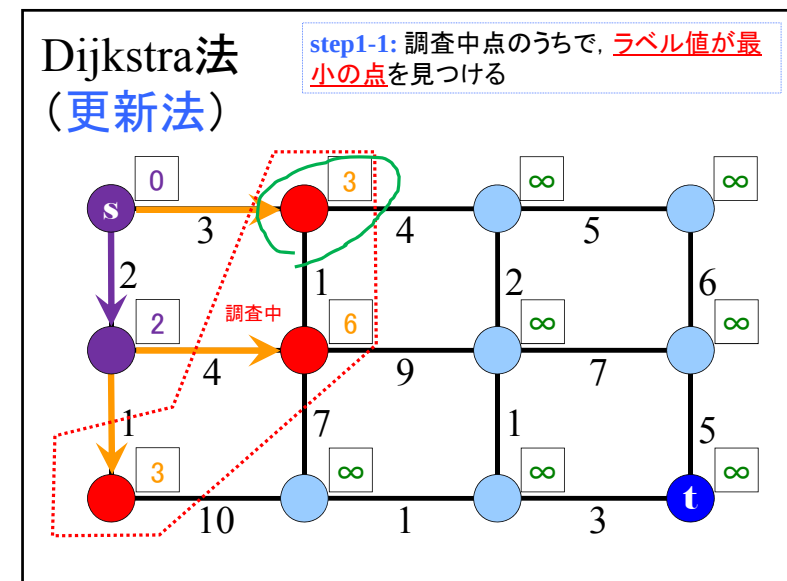
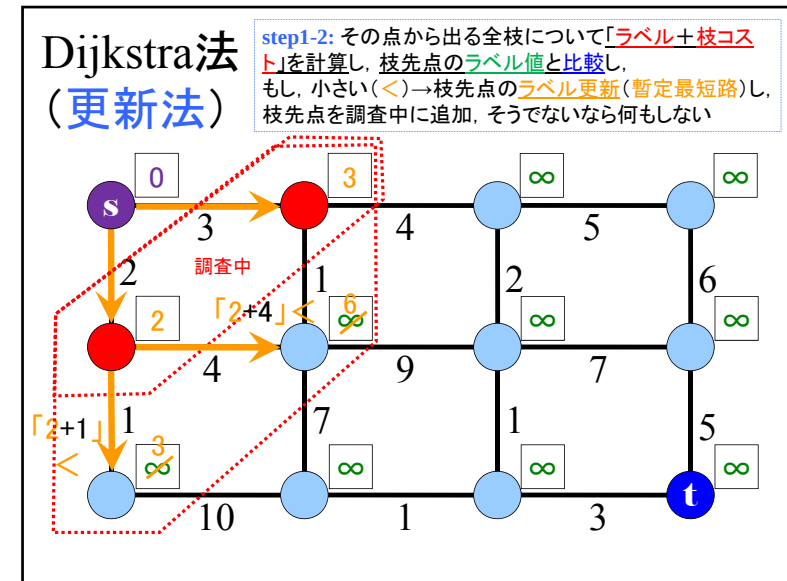
参考: 大きい数を表す接頭辞

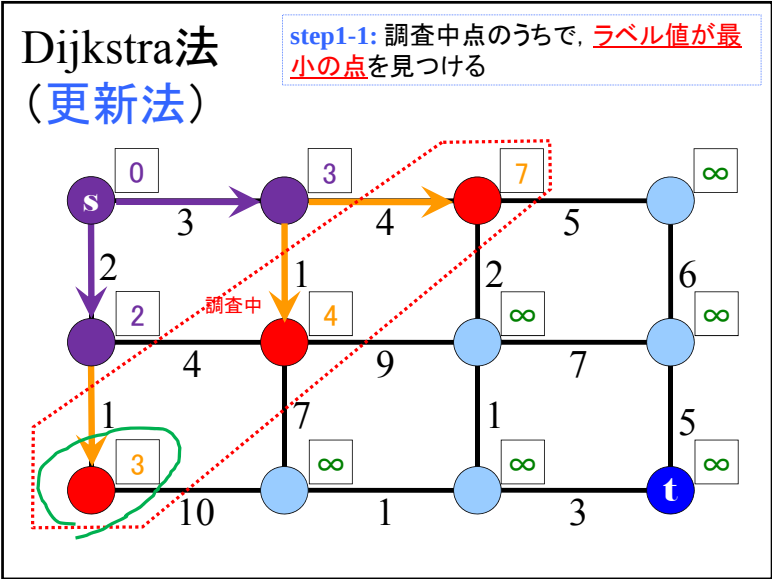
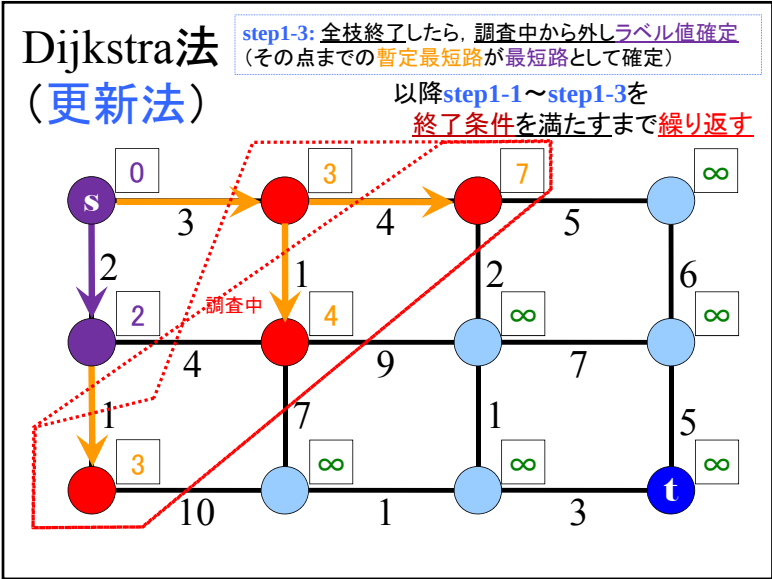
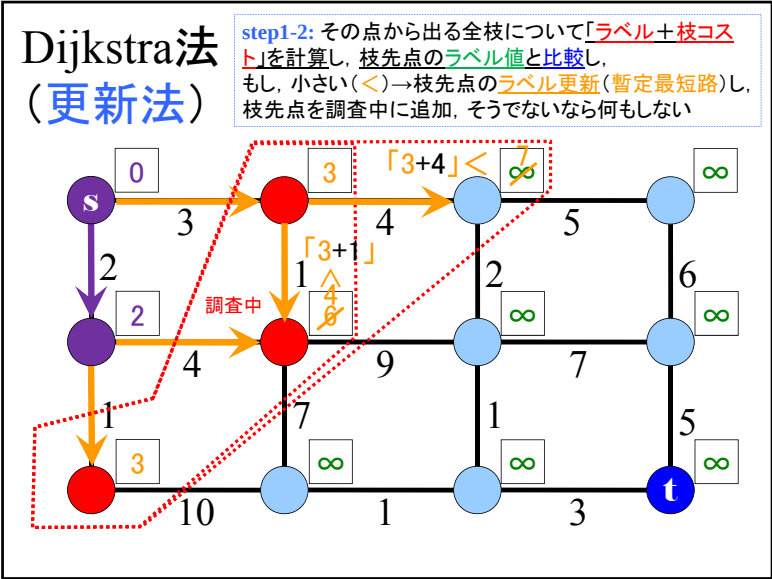
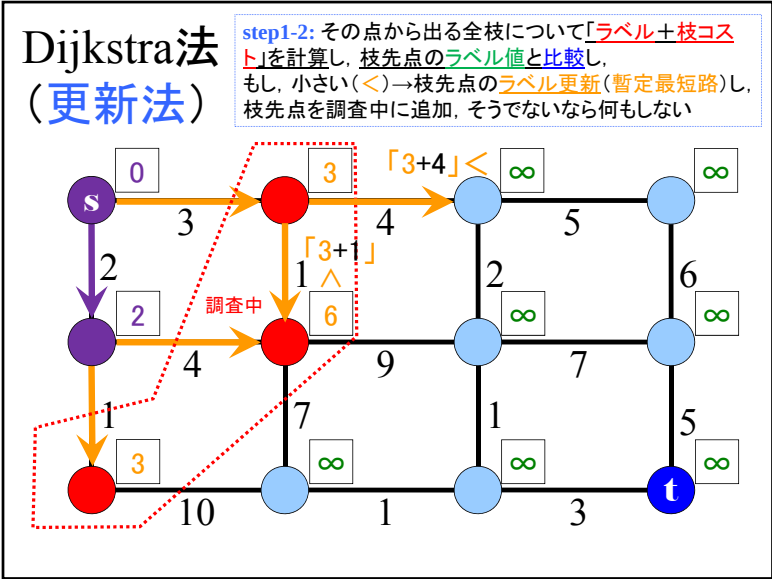
- 万(まん) $\times 10^4$
- 億(おく) $\times 10^8$
- 兆(ちょう) $\times 10^{12}$
- 京(けい) $\times 10^{16}$
- 垓(がい) $\times 10^{20}$
- 杼(じょ) $\times 10^{24}$
- 穰(じょう) $\times 10^{28}$
- 溝(こう) $\times 10^{32}$
- 澗(かん) $\times 10^{36}$
- 正(せい) $\times 10^{40}$
- 載(さい) $\times 10^{44}$
- 極(ごく) $\times 10^{48}$

- 恒河沙(ごうがしゃ) $\times 10^{52}$
- 阿僧祇(あそうぎ) $\times 10^{56}$
- 那由他(なゆた) $\times 10^{60}$
- 不可思議(ふかしぎ) $\times 10^{64}$
- 無量大数(むりょうたいすう) $\times 10^{68}$

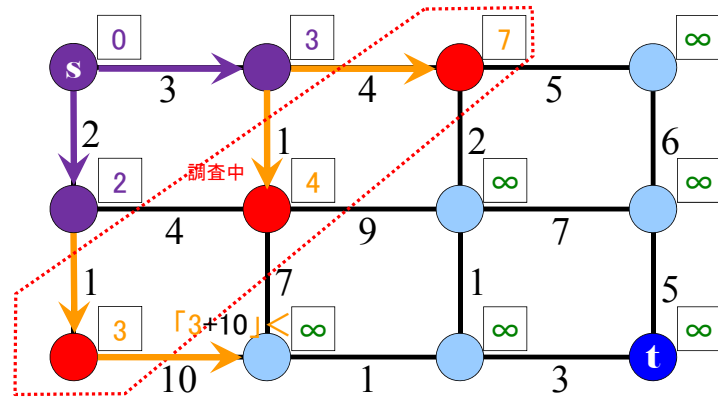
【注】「杼」は正しくは「のぎへん」(らしい)
【注】「無量大数」は「無限大 ∞ 」とは違う



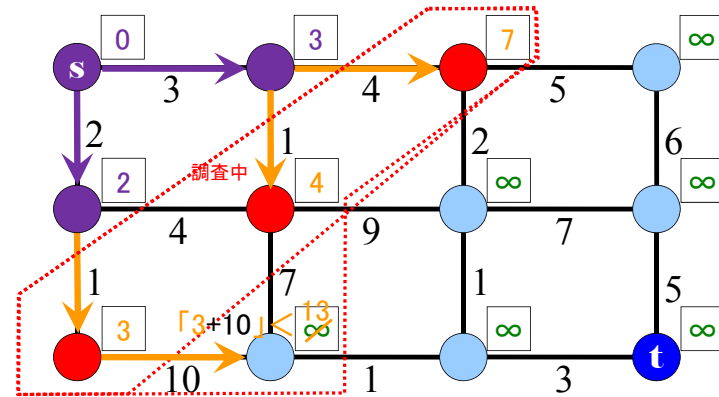




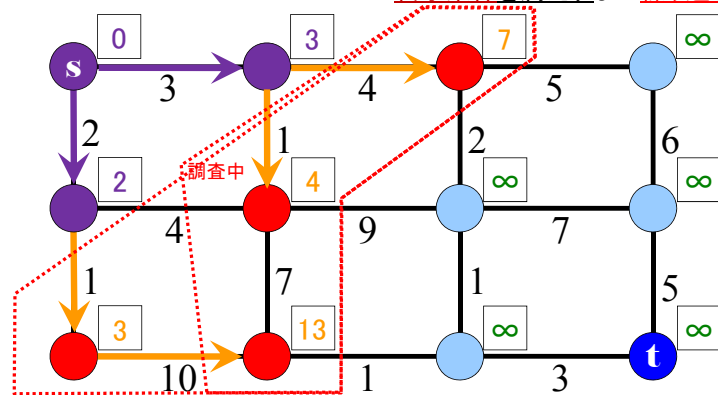
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル + 枝コスト」を計算し、枝先点のラベル値と比較し、もし、小さい(<)→枝先点のラベル更新(暫定最短路)し、枝先点を調査中に追加、そうでないなら何もしない



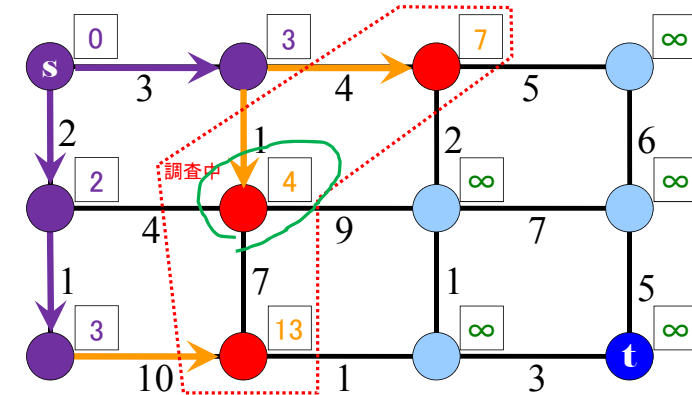
step1-2: その点から出る全枝について「**ラベル+枝コスト**」を計算し、枝先点の**ラベル値と比較**し、もし、小さい(<)→枝先点の**ラベル更新(暫定最短路)**し、枝先点を調査中に追加、そうでないなら何もしない

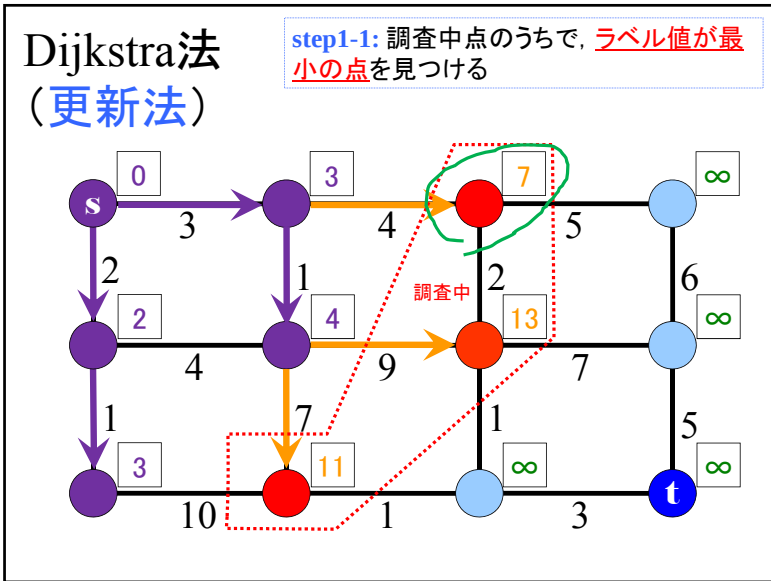
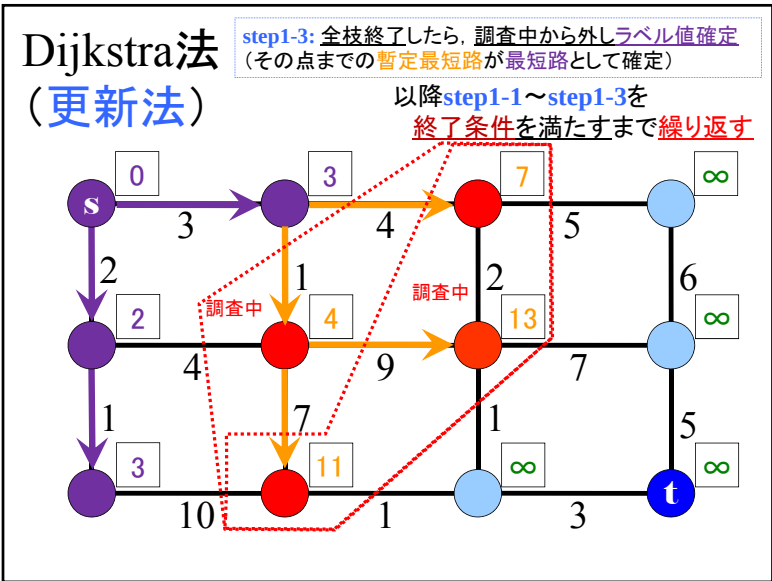
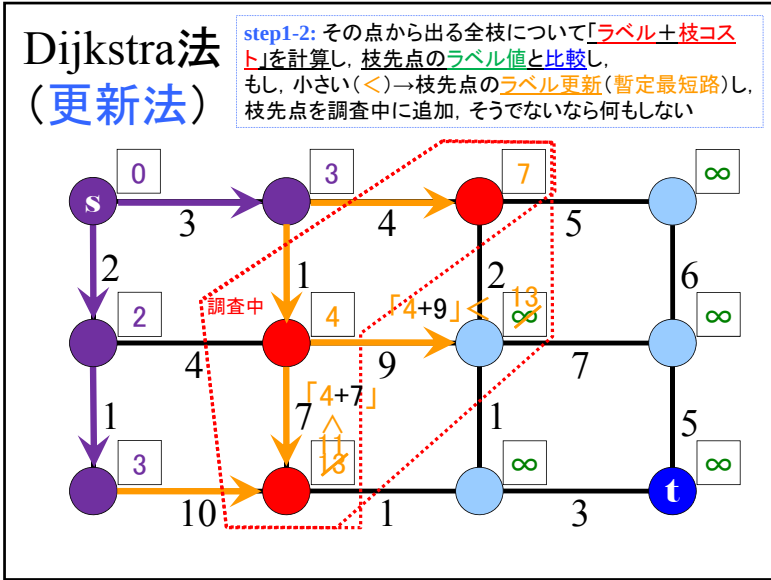
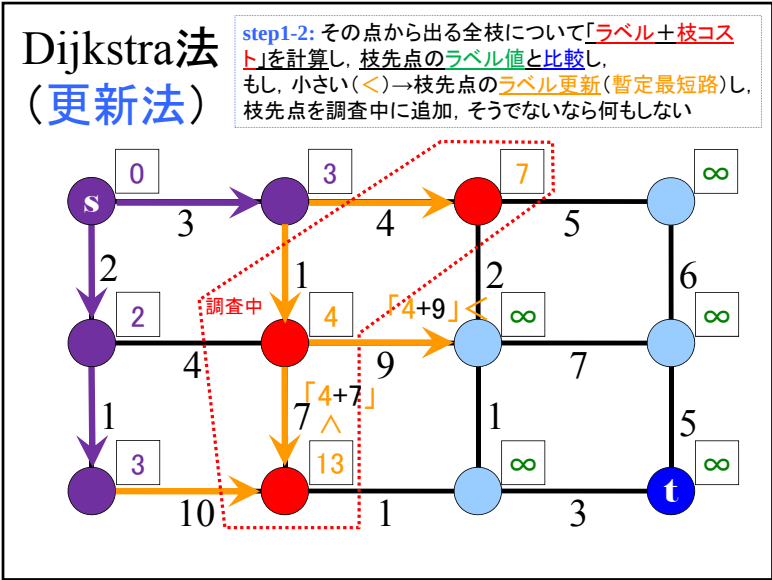


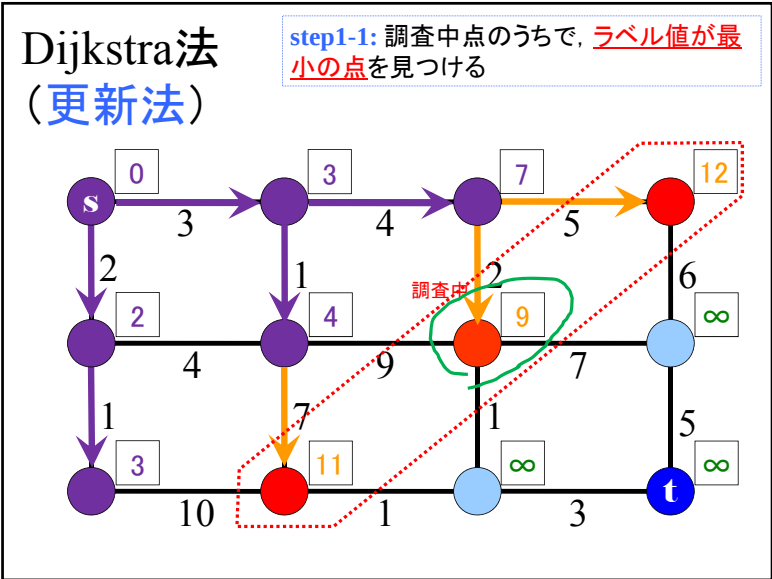
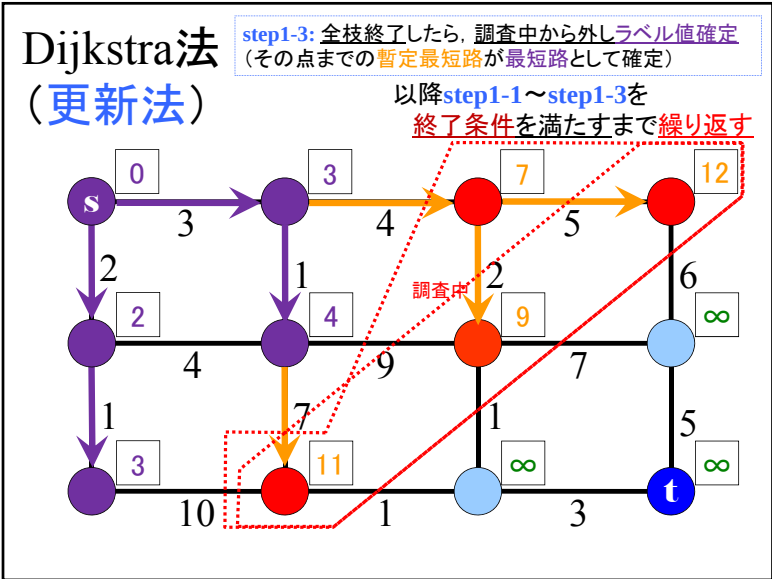
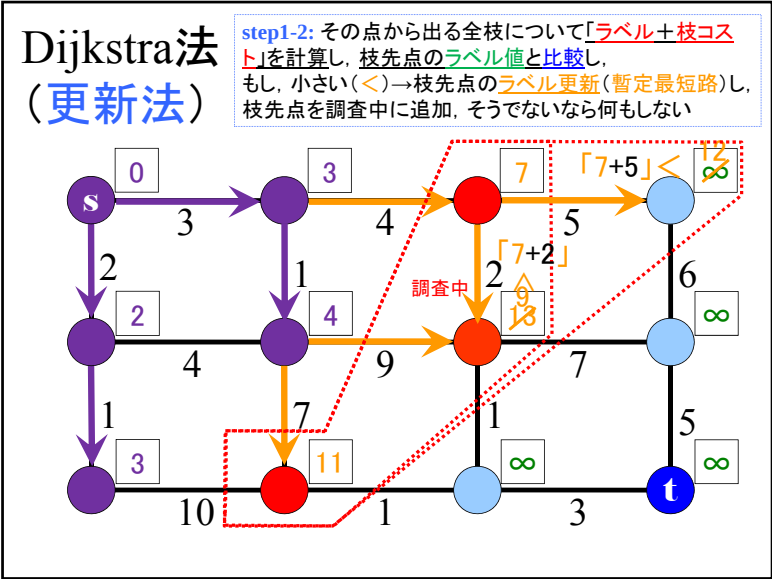
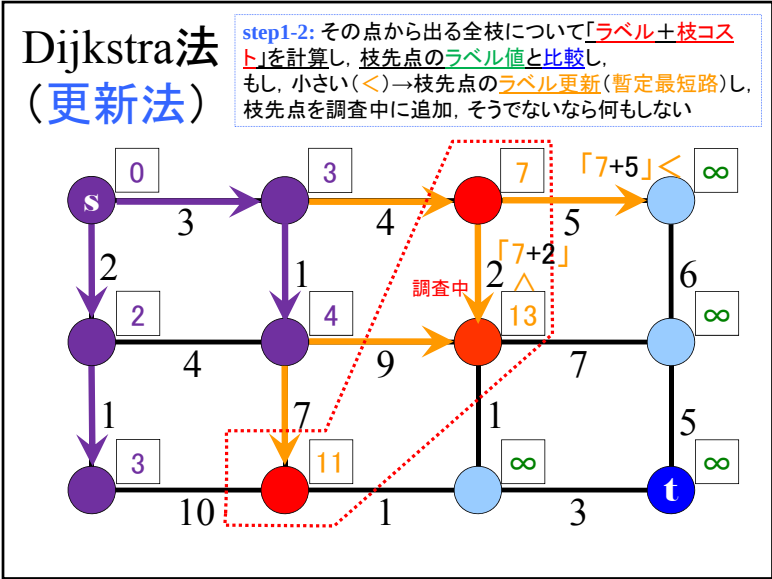
step1-3: 全枝終了したら、調査中から外しラベル値確定
(その点までの暫定最短路が最短路として確定)
以降step1-1～step1-3を
終了条件を満たすまで繰り返す



step1-1: 調査中点のうちで、ラベル値が最小の点を見つける

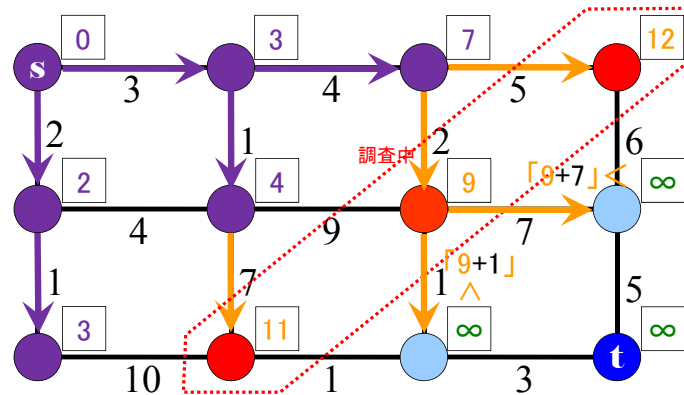




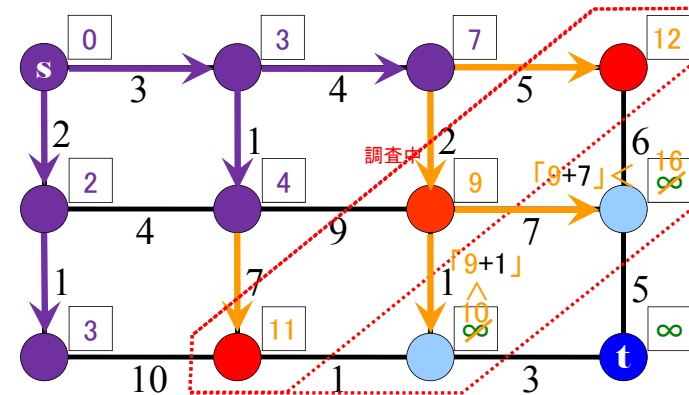


Dijkstra法 (更新法)

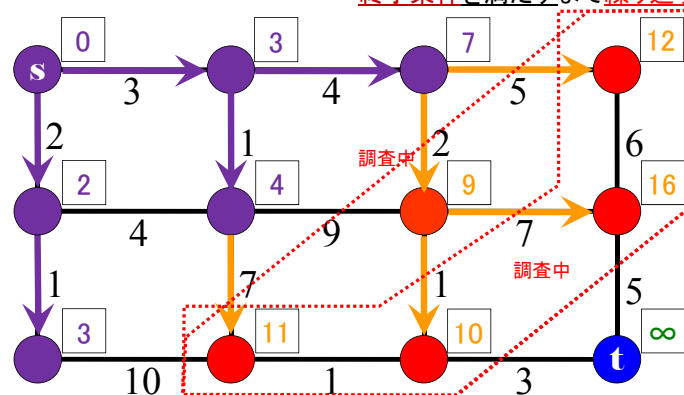
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル+枝コスト」を計算し、枝先点のラベル値と比較し、もし、小さい(<)→枝先点のラベル更新(暫定最短路)し、枝先点を調査中に追加、そうでないなら何もしない



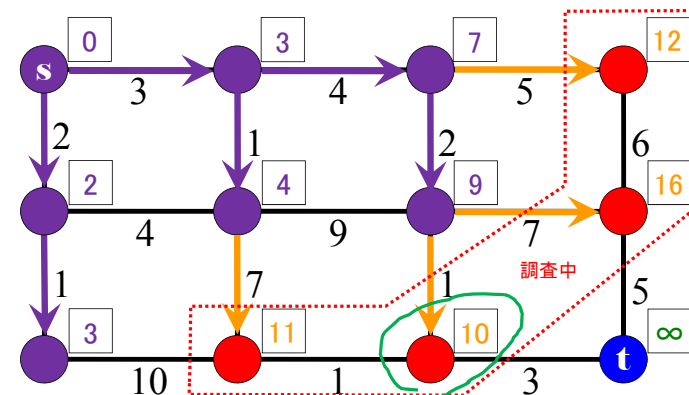
Dijkstra法 (更新法)

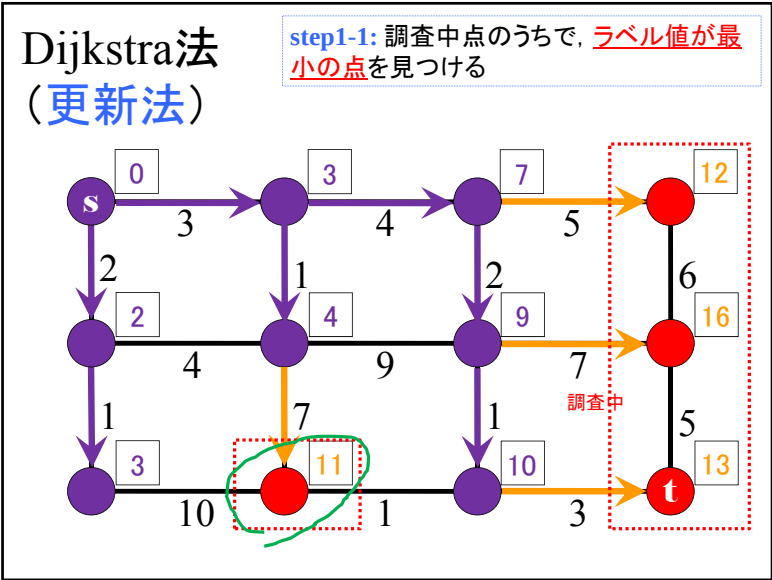
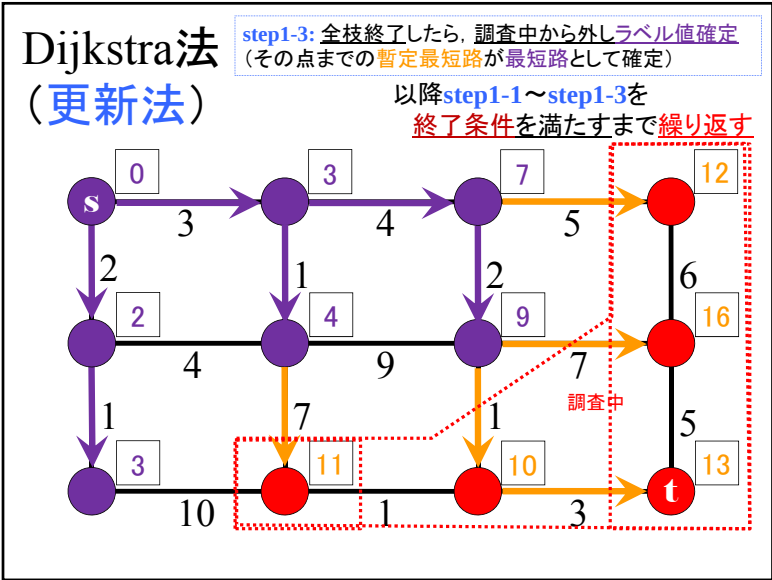
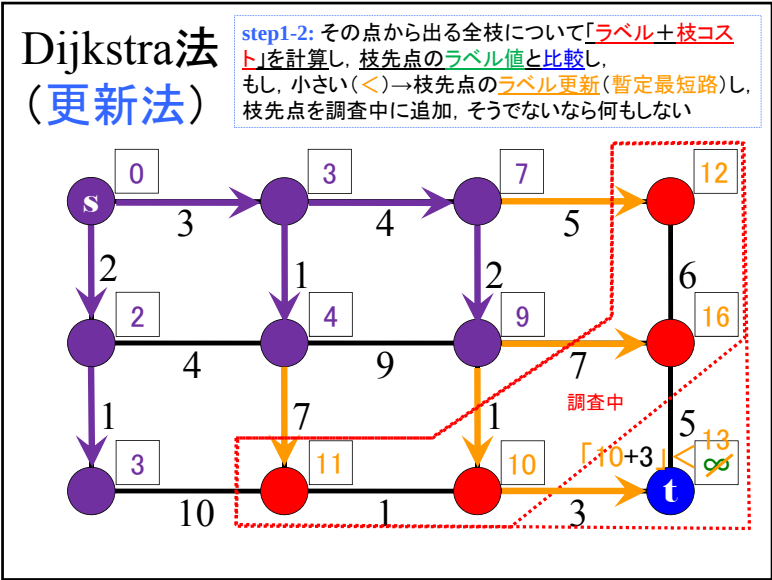
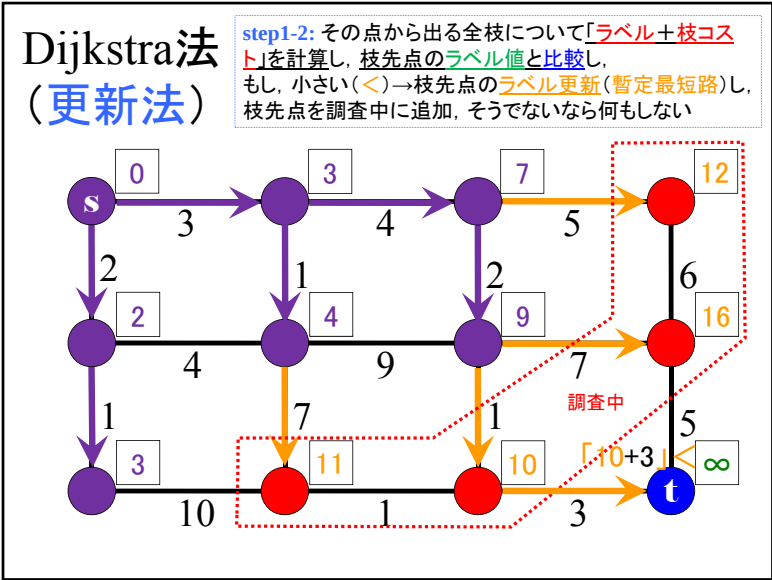


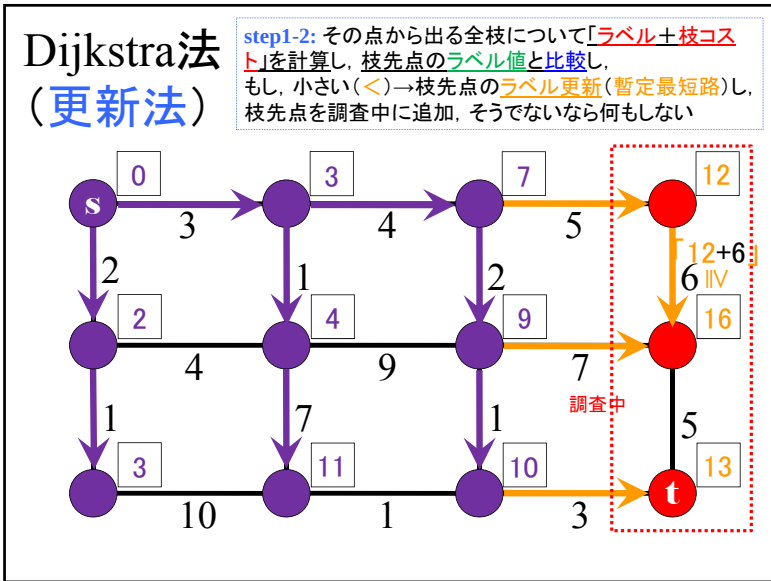
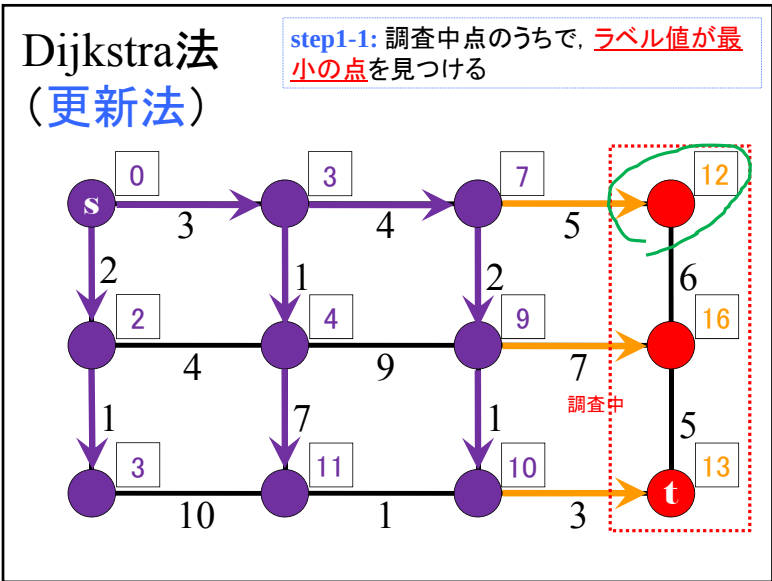
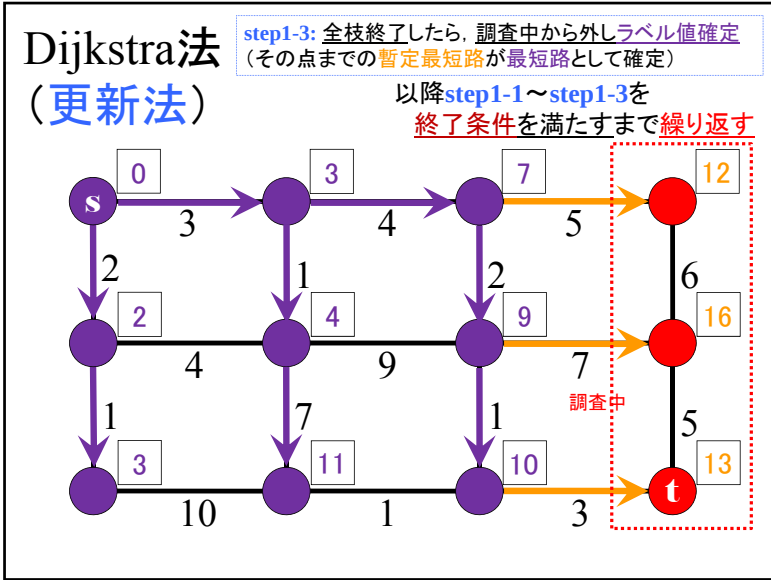
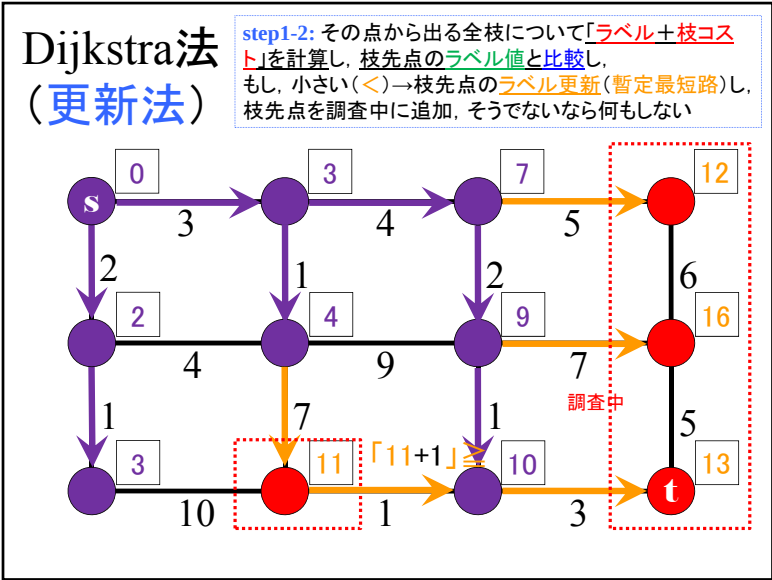
Dijkstra法 (更新法)

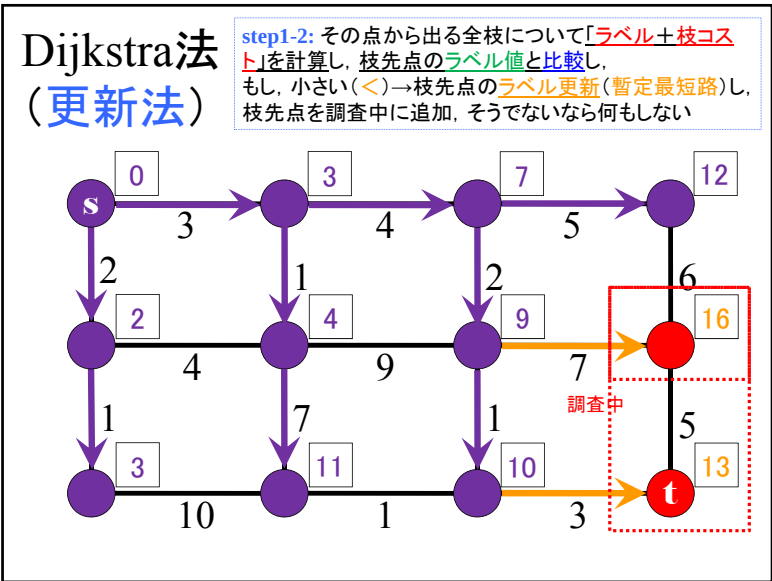
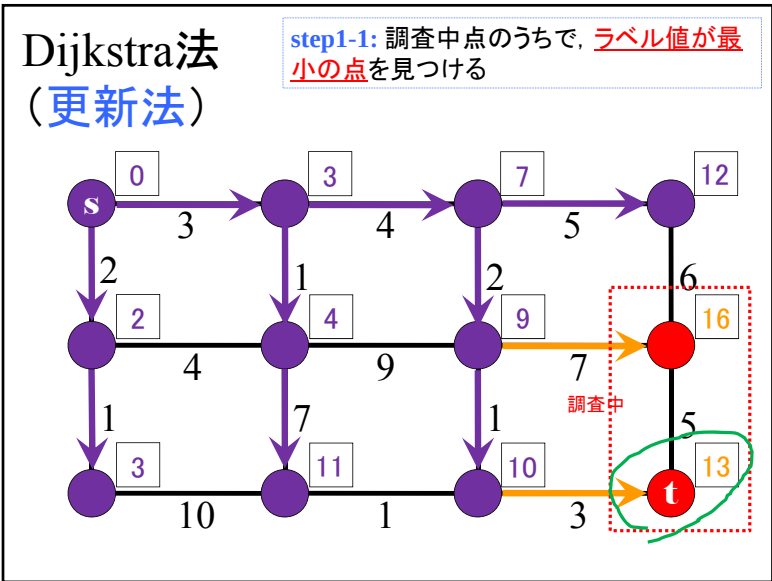
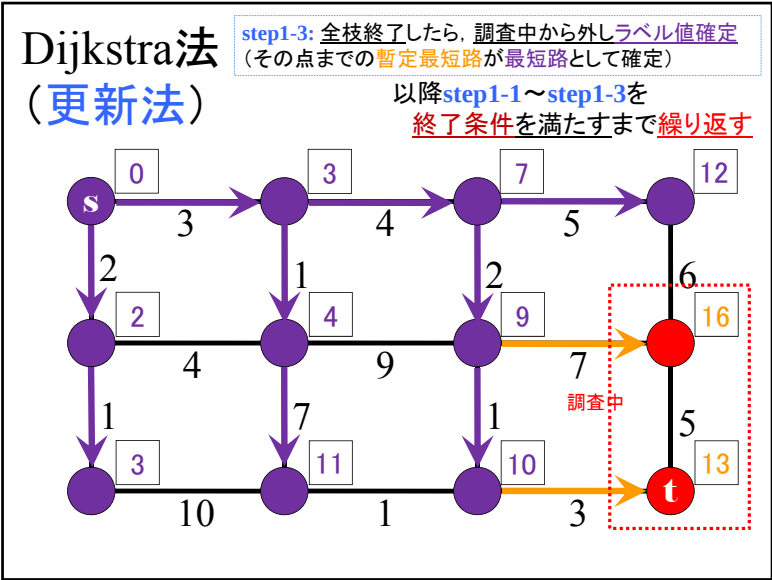
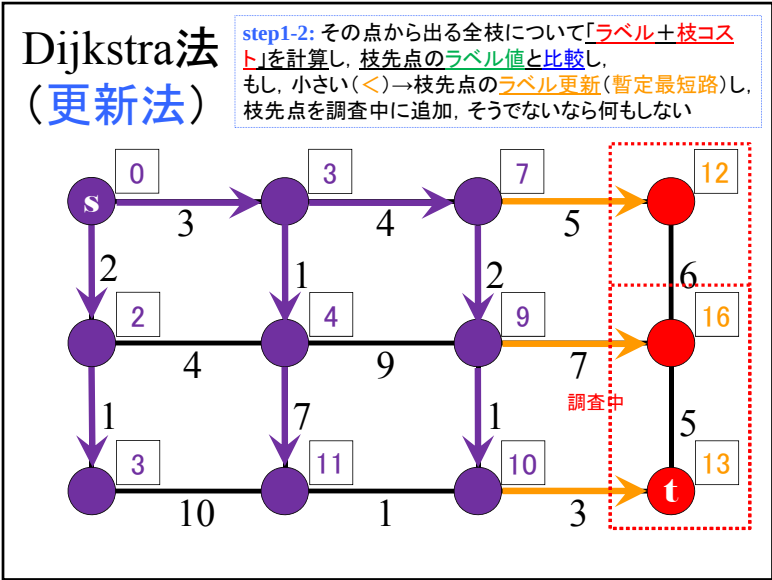


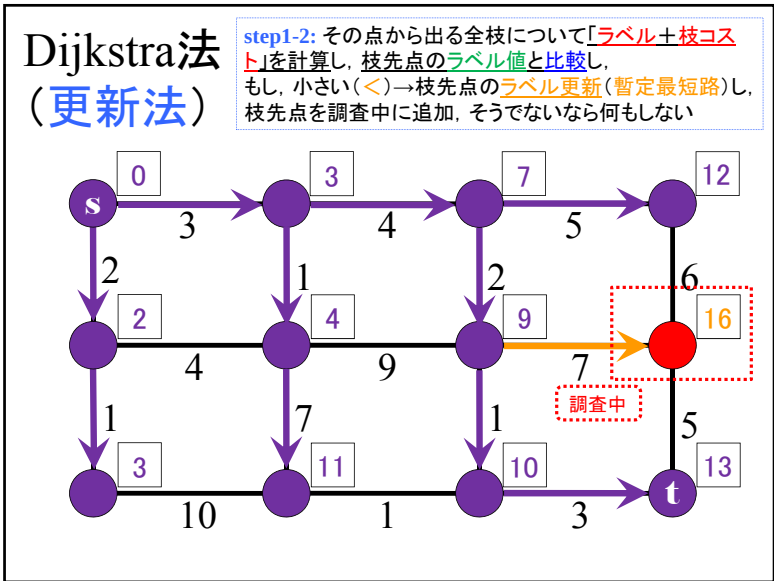
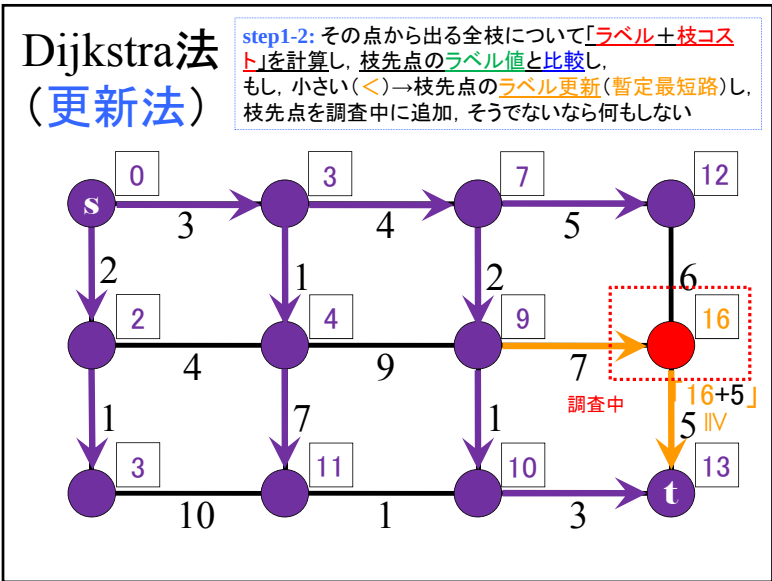
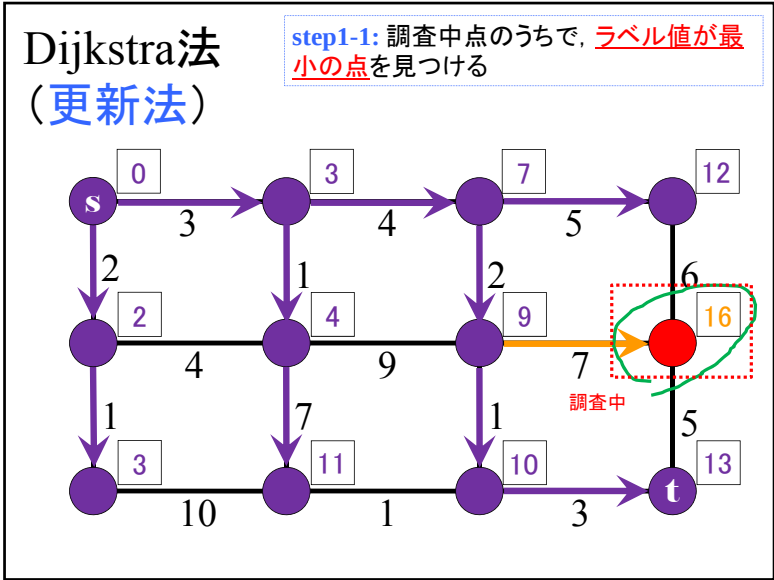
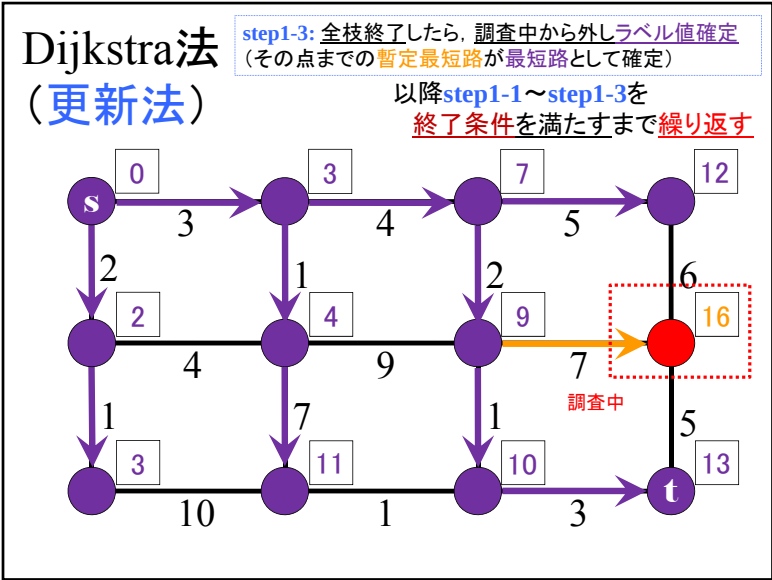
Dijkstra法 (更新法)

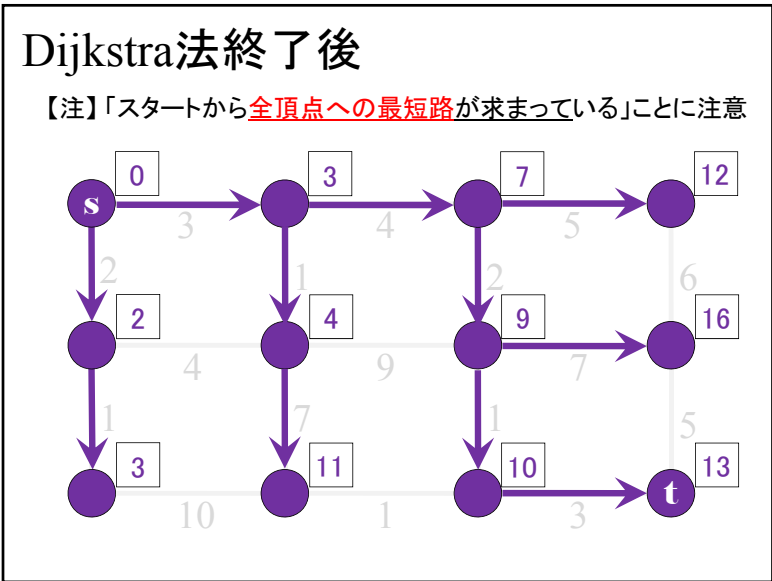
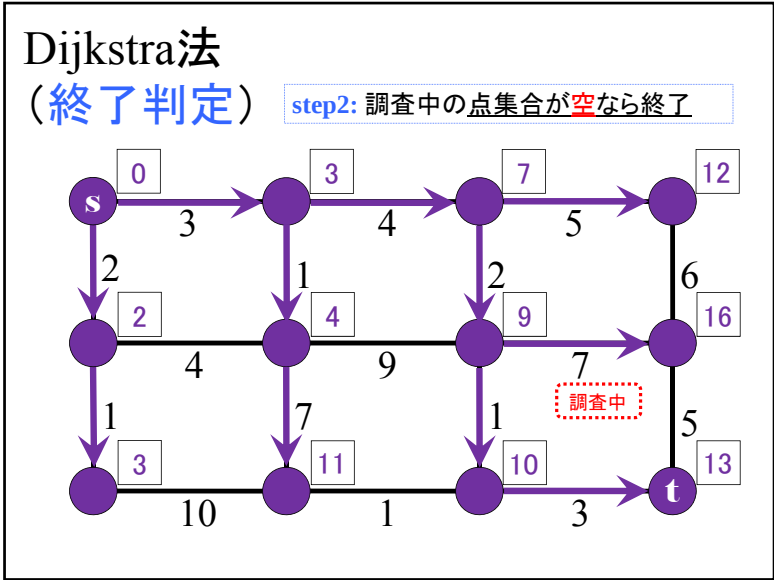
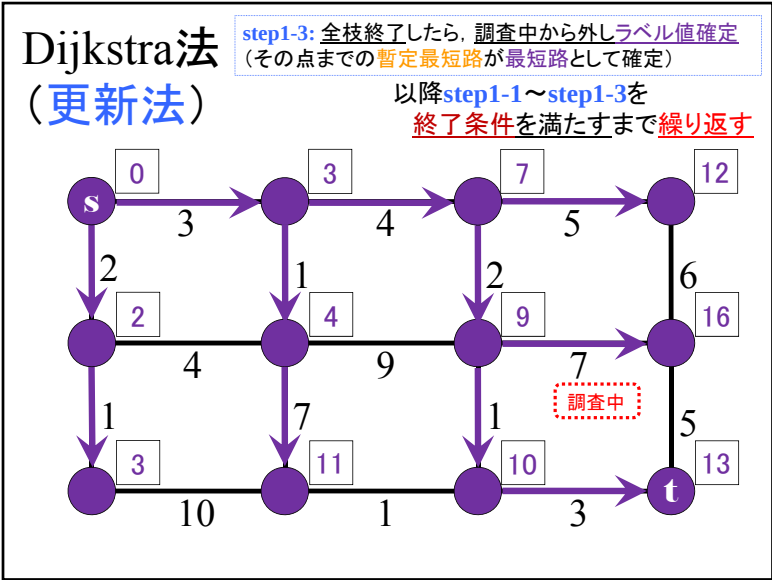


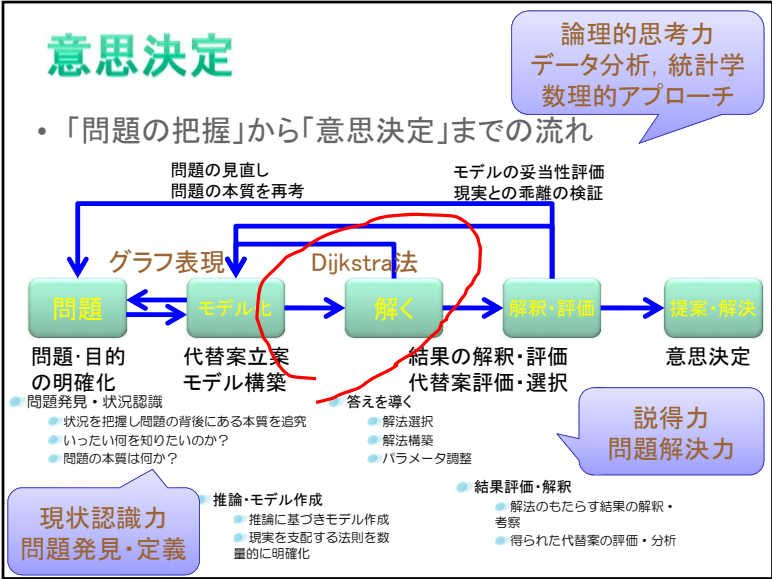












評価: Dijkstra法って速いのか?

点の数を n とすると, 大雑把な見積もりで,
 $O(n^2)$ **多項式オーダー**

点の数 n を右向枝数 R , 下向枝数 D で表すと
 $n = (R + 1) \times (D + 1)$

$n = (3 + 1) \times (2 + 1) = 12$
 $n^2 = 12^2 = 144$

コンピュータに計算させてみよう!
簡単のため n^2 の5倍の浮動小数点演算回数で計算できると仮定。

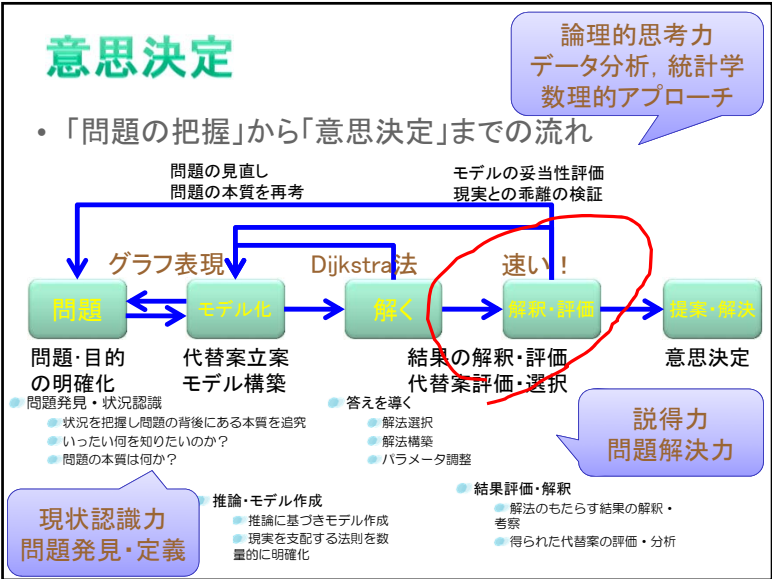
評価: Dijkstra法って速いのか?

		10.51PFLOPS		51.2GFLOPS	
R(横)	D(縦)	全経路	京 & しらみつぶし	Core i7 & Dijkstra	
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000001 秒	
6	4	210	0.000000000 秒	0.000000003 秒	
10	5	3,003	0.000000000 秒	0.000000006 秒	
20	10	30,045,015	0.000000086 秒	0.000000023 秒	
25	25	1.3×10^{14}	0.601382523 秒	0.000000066 秒	
30	30	1.2×10^{17}	11 分	0.000000094 秒	
40	40	1.1×10^{23}	26 年	0.000000164 秒	
50	50	1.0×10^{29}	30,439,996 年	0.000000254 秒	
100	100	9.1×10^{58}	4.0×10^{27} 宙齡	0.000000996 秒	
500	500	2.7×10^{299}	5.9×10^{268} 宙齡	0.000024512 秒	

世界最速SuperComp
+ 力技 (しょぼい方法)

<<<

そこのPC
+ 人間の知恵



意思決定支援・ビジネスサポート

カーナビは存在しない

素朴な方法しかない世界

⇔

カーナビが実現

Dijkstra法が考案された世界

人々の創造的な仕事！

参考文献

コンピュータに仕事を奪われつつある人類...

[1] 新井紀子
「コンピュータが仕事を奪う」日経新聞社(2010)

[2] E. Brynjolfsson, A. McAfee, 村井章子訳
「機械との競争」日経BP社(2013)



もっと知りたい人へ

- 参考文献
 - グリツツマン, ブランデンベルク「最短経路の本」シュブリンガー(2008)
 - W.J.クック「驚きの数学 巡回セールスマン問題」青土社(2013)
 - 山本, 久保「巡回セールスマン問題への招待」朝倉書店(1997)
 - 久保, 松井「組合せ最適化『短編集』」朝倉書店(1999)
 - 松井, 根本, 宇野「入門オペレーションズ・リサーチ」東海大出版(2008)
- 関連する授業
 - 「ネットワークモデル分析」(4セメ)
 - 「最適化モデル分析」(5セメ) etc...