

問題解決技法入門

7. 動的計画法

文教大学
堀田 敬介

切符購入問題

問)「東京－新神戸」間で新幹線を使う。下表は普通車自由席(一部指定席)回数券(6枚綴り)の値段である。素直に購入すれば ¥84,900 である。いくつか分割して購入すると安くなるだろうか？

分割例1) 東京－名古屋－新神戸 ¥62,160 + ¥42,660 = ¥104,820

分割例2) 東京－静岡－新大阪－新神戸
¥32,340 + ¥56,940 + ¥8,520 = ¥97,800

駅名	新幹線回数券(普通車自由席/指定席用)6枚綴り						データ出典:2014年JR東海Webサイト「お得なきっぷ」より(2015.2.3)										
東京	¥84,900	¥82,140	¥78,420	¥65,340	—	¥62,160	¥53,760	¥46,560	¥42,720	¥40,800	¥32,340	¥27,840	¥21,960	¥19,980	¥16,500	¥7,740	東京
新横浜	¥82,980	¥79,740	¥74,580	¥62,760	—	¥58,260	—	¥44,700	¥40,800	¥38,820	¥27,840	¥24,600	¥17,700	¥15,360	¥10,980	新横浜	
小田原	—	¥66,720	¥63,420	—	—	¥46,560	—	¥38,820	¥30,360	¥27,840	¥17,700	¥14,340	¥10,380	—	小田原		
熱海	—	¥65,340	—	—	—	¥44,700	—	—	—	—	¥15,360	—	—	熱海			
三島	¥66,720	¥63,420	¥58,260	—	—	¥42,720	—	¥30,360	—	—	¥10,980	—	三島				
新富士	—	¥62,760	¥56,940	—	—	¥38,820	—	—	—	—	¥7,740	新富士					
静岡	¥62,760	¥56,940	¥53,760	—	—	¥32,340	—	—	¥12,300	¥9,660	静岡						
掛川	—	¥53,760	¥46,560	—	—	¥25,860	—	—	¥7,740	掛川							
浜松	¥53,760	¥46,560	¥42,720	¥32,340	—	¥24,600	¥15,600	¥8,400	浜松								
豊橋	—	¥44,700	¥38,820	—	—	¥12,300	—	豊橋									
三河安城	—	¥40,800	¥30,360	—	—	¥7,020	三河安城										
名古屋	¥42,660	¥33,960	¥30,420	¥15,360	¥8,040	名古屋											
岐阜羽島	¥32,340	¥27,840	¥24,600	¥9,660	岐阜羽島												
米原	—	¥24,600	¥11,640	米原													
京都	¥13,920	¥8,040	京都														
新大阪	¥8,520	新大阪															
新神戸	新神戸																

※)東京—新横浜以外は、東京＝【東京(山手線内)】or【東京(都区内)】

※)新横浜—小田原～三島以外は、新横浜＝【新横浜(市内)】

※)東京—新横浜間にある品川＝【東京(山手線内)】

＝ のぞみ停車駅

※)背景緑色は指定席回数券(自由席回数券の設定はない)

※)指定席券を自由席で使うことにする

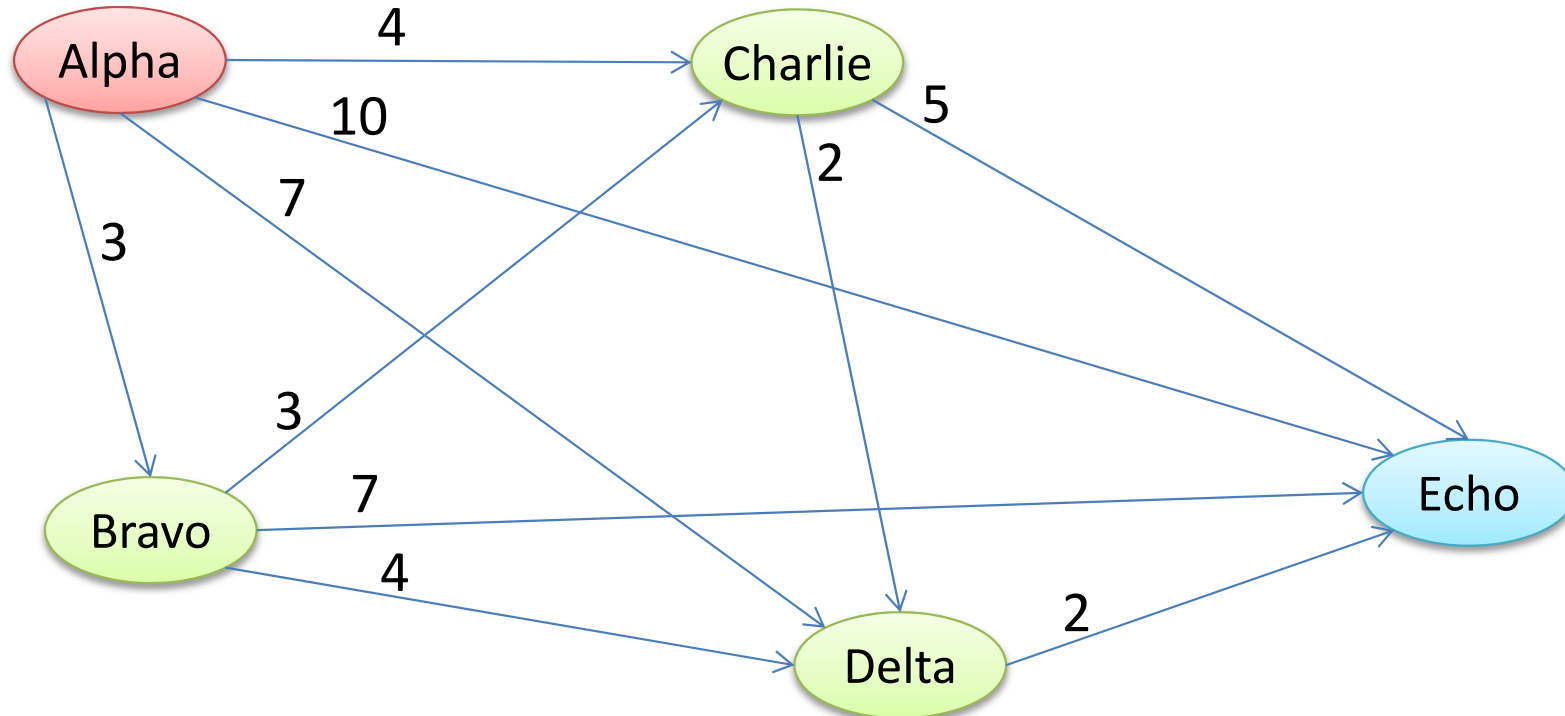
※ 東京－新横浜以外は、東京＝【東京(山手線内)】or【東京(都区内)】
 ※ 新横浜－小田原～三島以外は、新横浜＝【新横浜(市内)】
 ※ 東京－新横浜間にある品川＝【東京(山手線内)】

＝ のぞみ停車駅

※ 背景緑色は指定席回数券(自由席回数券の設定はない)
 ※ 指定席券を自由席で使うことにする

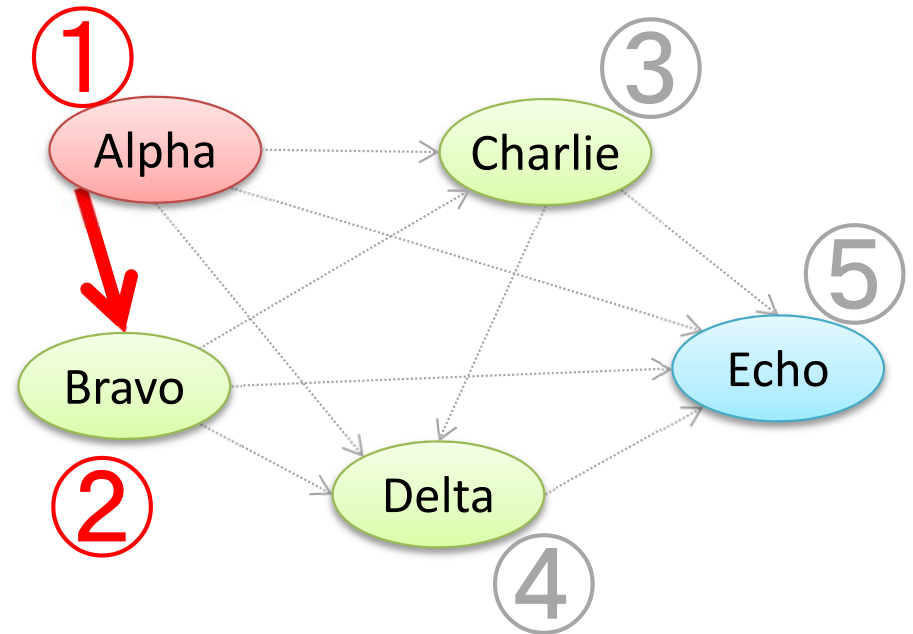
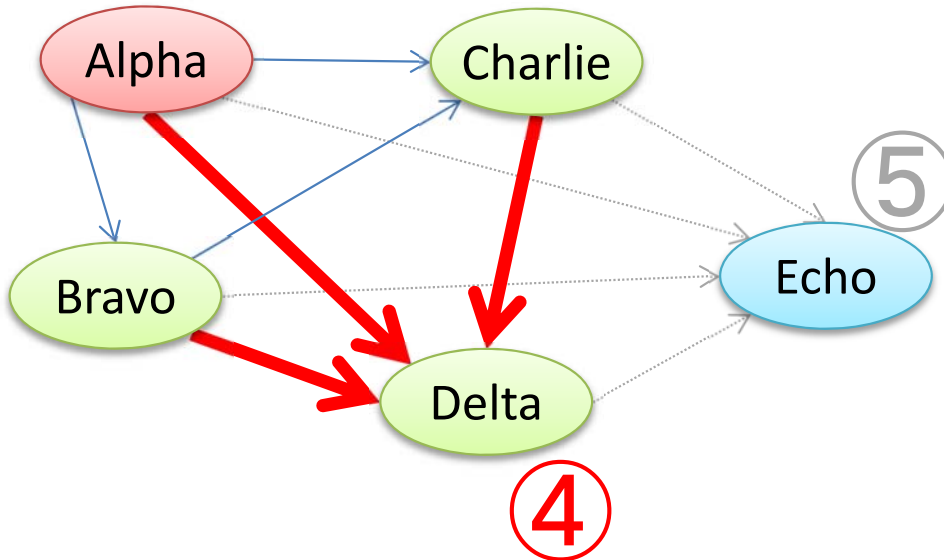
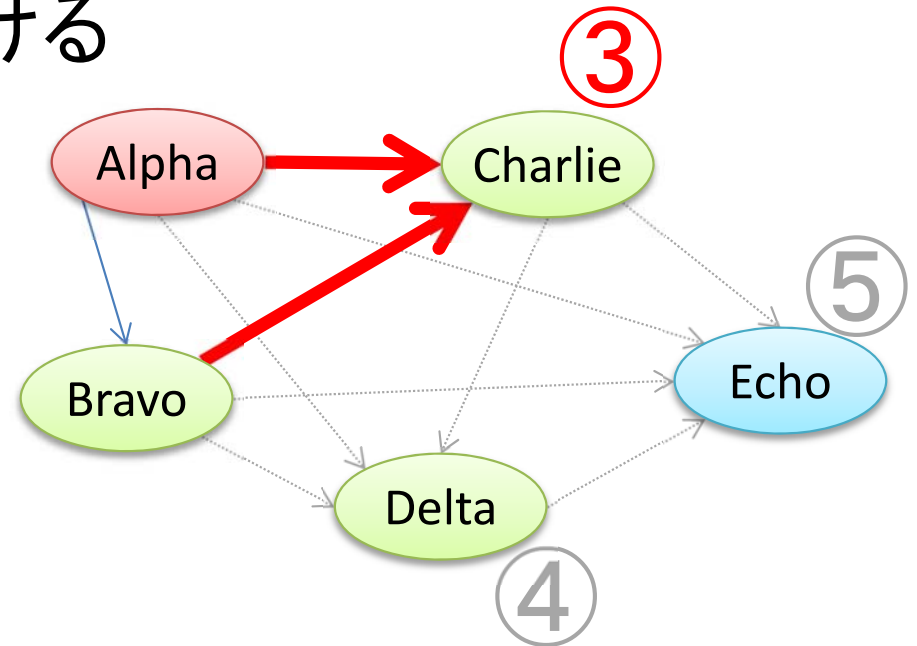
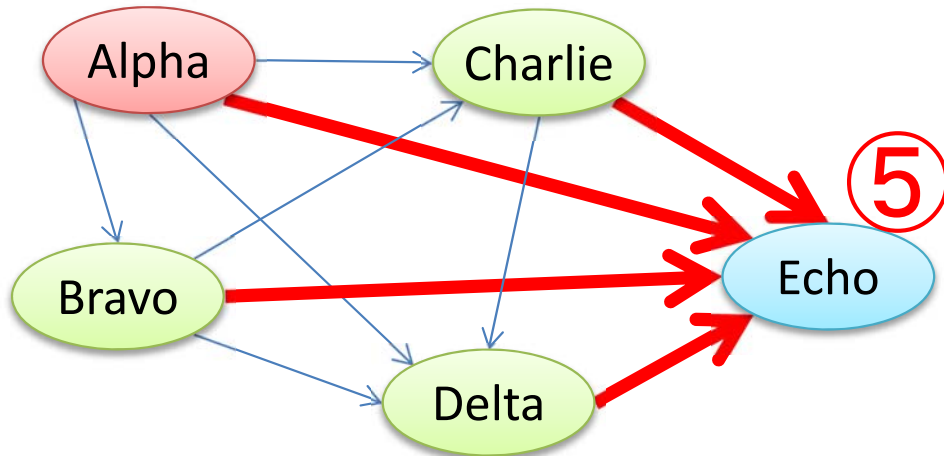
動的計画法とは？

- 例) スパイであるあなたは敵国で諜報活動をしている
ある時、相棒がヘマをやらかし、安全な地点まで速やかに移動しなければならなくなった。 現在地点 (Alpha) から、 安全な地点 (Echo) までの間に 3箇所 の 拠点 (Bravo ~ Delta) がある。各地点間の移動に対する リスク (危険度) は以下の数値で表される。さて、最もリスクの少ない道を通りたい。どこを通れば良いか？



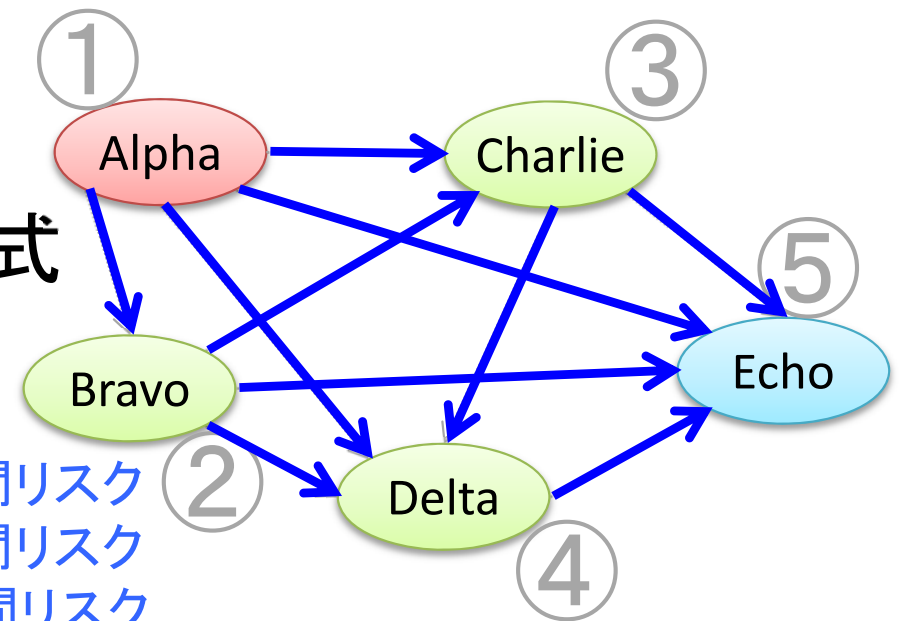
動的計画法とは？

- Step1: トポロジカル順を見つける



動的計画法とは？

- Step2: トポロジカル逆順に漸化式



Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AE}, & \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow E \text{間リスク} \\ p_B + c_{BE}, & \leftarrow B \text{までの最小リスク} + B \rightarrow E \text{間リスク} \\ p_C + c_{CE}, & \leftarrow C \text{までの最小リスク} + C \rightarrow E \text{間リスク} \\ p_D + c_{DE} \} & \leftarrow D \text{までの最小リスク} + D \rightarrow E \text{間リスク} \end{array}$$

p_i : 拠点 i までの最小リスク
 c_{ij} : 拠点 $i \rightarrow j$ 間のリスク

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AD}, & \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow D \text{間リスク} \\ p_B + c_{BD}, & \leftarrow B \text{までの最小リスク} + B \rightarrow D \text{間リスク} \\ p_C + c_{CD} \} & \leftarrow C \text{までの最小リスク} + C \rightarrow D \text{間リスク} \end{array}$$

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AC}, & \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow C \text{間リスク} \\ p_B + c_{BC} \} & \leftarrow B \text{までの最小リスク} + B \rightarrow C \text{間リスク} \end{array}$$

Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} \leftarrow A \text{までの最小リスク} + A \rightarrow B \text{間リスク}$$

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$

動的計画法とは？

• Step3: トポロジカル順に計算

Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \{ p_A + c_{AE}, p_B + c_{BE}, p_C + c_{CE}, p_D + c_{DE} \} = \min \{ 0+10, 3+7, 4+5, 6+2 \} = 8$$

← $\times A \rightarrow E$
 ← $\times B \rightarrow E$
 ← $\times C \rightarrow E$
 ← $\bigcirc D \rightarrow E$

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \{ p_A + c_{AD}, p_B + c_{BD}, p_C + c_{CD} \} = \min \{ 0+7, 3+4, 4+2 \} = 4$$

← $\times A \rightarrow D$
 ← $\times B \rightarrow D$
 ← $\bigcirc C \rightarrow D$

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \{ p_A + c_{AC}, p_B + c_{BC} \} = \min \{ 0+4, 3+3 \} = 3$$

← $\bigcirc A \rightarrow C$
 ← $\times B \rightarrow C$

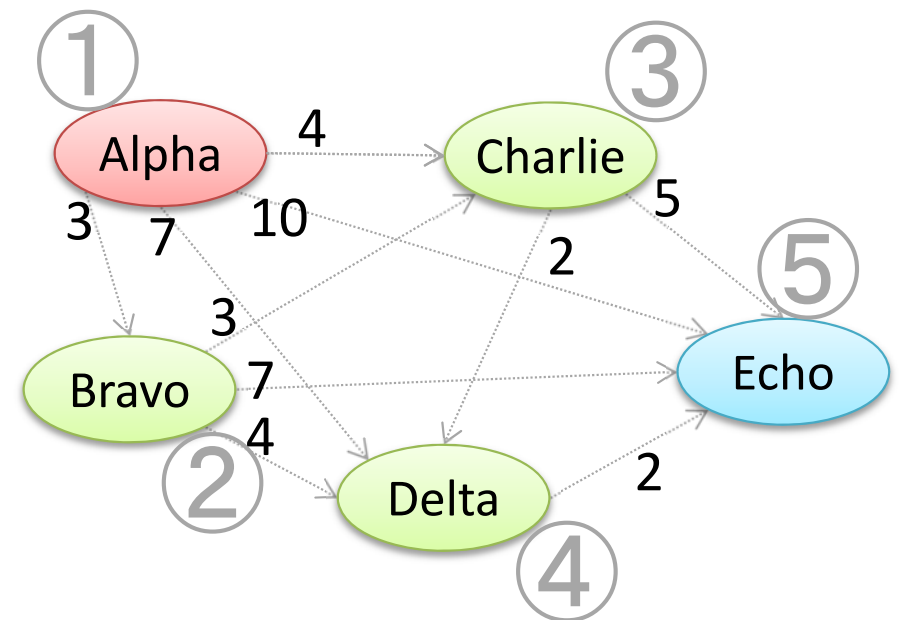
Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} = \min \{ 0+3 \} = 3$$

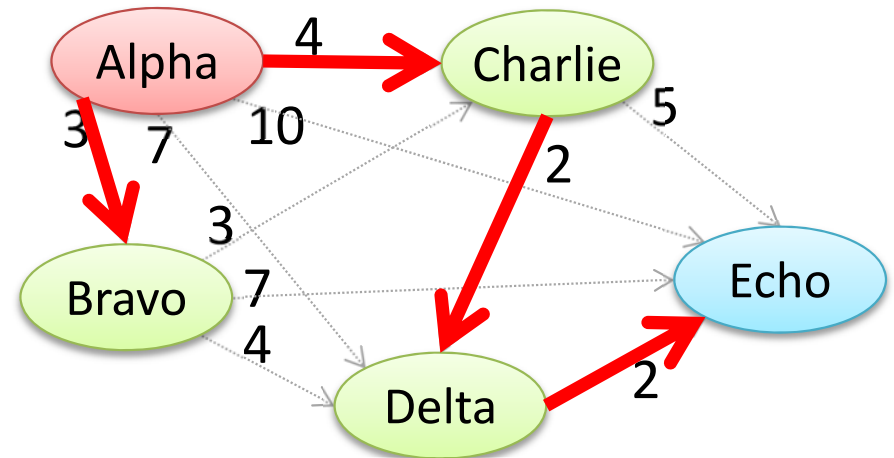
← $\bigcirc A \rightarrow B$

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$



p_i : 拠点 i までの最小リスク
 c_{ij} : 拠点 $i \rightarrow j$ 間のリスク



最小リスク経路は
 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$

動的計画法とは？

- 動的計画法

逐次的(段階的)な決定を行う問題について、最適な決定を求める一般的な解法の枠組み

- 段階 ← トポロジカル順, 離散的な時刻(期)
- 決定
- 状態

- 最適性の原理 principle of optimality

最適方策は、最初の状態および最初の決定がどうであったにせよ、残りの決定は最初の決定の結果生じた状態に対して、最適方策になっていなければならない([1])

参考文献

- [1] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- [2] 久保幹雄「動的計画法」【久保・田村・松井 編『応用数理計画ハンドブック』第7章】(2002)