

2016/7/22 Fri.

問題解決技法入門

7. 動的計画法

文教大学
堀田 敬介

切符購入問題

問)「東京－新神戸」間で新幹線を使う。下表は普通車自由席(一部指定席)回数券(6枚綴り)の値段である。素直に購入すれば **¥84,900** である。いくつか分割して購入すると安くなるだろうか？

分割例1) 東京－名古屋－新神戸 ¥62,160 + ¥42,660 = **¥104,820**

分割例2) 東京－静岡－新大阪－新神戸
¥32,340 + ¥56,940 + ¥8,520 = **¥97,800**

駅名	新幹線回数券(普通車自由席/指定席用)6枚綴り	データ出典: 2014年JR東海Webサイト「お得なきっぷ」より(2015.2.3)														
東京	¥84,900	¥82,140	¥65,340	—	¥62,160	¥53,760	¥46,560	¥42,720	¥40,800	¥32,340	¥27,840	¥21,960	¥19,980	¥16,500	¥7,740	東京
新横浜	¥82,890	¥78,740	¥74,380	¥62,760	—	¥58,280	—	¥44,700	¥40,800	¥38,820	¥27,840	¥24,600	¥17,700	¥15,360	¥10,890	新横浜
小田原	—	¥66,720	¥63,420	—	—	¥46,560	—	¥38,820	¥30,360	¥27,840	¥17,700	¥14,340	¥10,380	—	—	小田原
熱海	—	¥65,340	—	—	—	¥44,700	—	—	—	—	¥15,360	—	—	—	—	熱海
三島	¥66,720	¥63,420	¥58,260	—	—	¥42,720	—	¥30,360	—	—	¥10,380	—	—	—	—	三島
新富士	—	¥62,760	¥56,940	—	—	¥38,820	—	—	—	—	¥7,740	—	—	—	—	新富士
静岡	¥62,760	¥56,940	¥53,760	—	—	¥32,340	—	—	—	¥12,300	¥9,660	—	—	—	—	静岡
掛川	—	¥53,760	¥46,560	—	—	¥25,860	—	—	—	—	¥7,740	—	—	—	—	掛川
浜松	¥53,760	¥46,560	¥42,720	¥32,340	—	¥24,600	¥15,600	¥8,400	—	—	—	—	—	—	—	浜松
雪櫃	—	¥44,700	¥38,820	—	—	¥12,300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	雪櫃
三河安城	—	¥40,800	¥30,360	—	—	¥7,020	—	—	—	—	—	—	—	—	—	三河安城
名古屋	¥42,660	¥33,960	¥30,420	¥15,360	¥8,040	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	名古屋
岐阜羽島	¥32,340	¥27,840	¥24,600	¥9,660	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	岐阜羽島
米原	—	¥24,600	¥11,640	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	米原
京都	¥13,820	¥8,040	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	京都
新大阪	¥8,520	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	新大阪
新神戸	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	新神戸

※) 東京－新横浜以外は、東京＝【東京(山手線内)】or【東京(都区内)】
※) 新横浜－小田原－三島以外は、新横浜＝【新横浜(市内)】
※) 東京－新横浜間にある品川＝【東京(山手線内)】
※) 名古屋＝名古屋(市内)
※) 京都＝京都(市内)
※) 新大阪＝新大阪(市内)
※) 新神戸＝新神戸(市内)
※) 青森緑色は指定席回数券(自由席回数券の設定はない)
※) 指定席券を自由席で使うことにする

＝ のぞみ停車駅

動的計画法とは？

- 例) スパイであるあなたは敵国で諜報活動をしているある時、相棒がヘマをやらかし、安全な地点まで速やかに移動しなければならなかった。 **現在地点(Alpha)** から、 **安全な地点(Echo)** までの間に **3箇所の拠点(Bravo～Delta)** がある。各地点間の移動に対する **リスク(危険度)** は以下の数値で表される。さて、最もリスクの少ない道を通りたい。どこを通れば良いか？

動的計画法とは？

- Step1: トポロジカル順をみつける

動的計画法とは？

- Step2: トポロジカル逆順に漸化式

Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AE}, & \leftarrow A\text{までの最小リスク} + A \rightarrow E\text{間リスク} \\ p_B + c_{BE}, & \leftarrow B\text{までの最小リスク} + B \rightarrow E\text{間リスク} \\ p_C + c_{CE}, & \leftarrow C\text{までの最小リスク} + C \rightarrow E\text{間リスク} \\ p_D + c_{DE} \} & \leftarrow D\text{までの最小リスク} + D \rightarrow E\text{間リスク} \end{array}$$

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AD}, & \leftarrow A\text{までの最小リスク} + A \rightarrow D\text{間リスク} \\ p_B + c_{BD}, & \leftarrow B\text{までの最小リスク} + B \rightarrow D\text{間リスク} \\ p_C + c_{CD} \} & \leftarrow C\text{までの最小リスク} + C \rightarrow D\text{間リスク} \end{array}$$

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AC}, & \leftarrow A\text{までの最小リスク} + A \rightarrow C\text{間リスク} \\ p_B + c_{BC} \} & \leftarrow B\text{までの最小リスク} + B \rightarrow C\text{間リスク} \end{array}$$

Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} \leftarrow A\text{までの最小リスク} + A \rightarrow B\text{間リスク}$$

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$

p_i : 拠点 i までの最小リスク
 c_{ij} : 拠点 $i \rightarrow j$ 間のリスク

動的計画法とは？

- Step3: トポロジカル順に計算

Echoまでの最小リスク

$$p_E = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AE}, & = \min \{ 0+10, \} = 8 \leftarrow \times A \rightarrow E \\ p_B + c_{BE}, & = 3+7, \leftarrow \times B \rightarrow E \\ p_C + c_{CE}, & = 4+5, \leftarrow \times C \rightarrow E \\ p_D + c_{DE} \} & = 6+2 \} \leftarrow \text{○} D \rightarrow E \end{array}$$

Deltaまでの最小リスク

$$p_D = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AD}, & = \min \{ 0+7, \} = 6 \leftarrow \times A \rightarrow D \\ p_B + c_{BD}, & = 3+4, \leftarrow \times B \rightarrow D \\ p_C + c_{CD} \} & = 4+2 \} \leftarrow \text{○} C \rightarrow D \end{array}$$

Charlieまでの最小リスク

$$p_C = \min \{ \begin{array}{ll} p_A + c_{AC}, & = \min \{ 0+4, \} = 4 \leftarrow \text{○} A \rightarrow C \\ p_B + c_{BC} \} & = 3+3 \} \leftarrow \times B \rightarrow C \end{array}$$

Bravoまでの最小リスク

$$p_B = \min \{ p_A + c_{AB} \} = \min \{ 0+3 \} = 3 \leftarrow \text{○} A \rightarrow B$$

Alphaまでの最小リスク

$$p_A = 0$$

p_i : 拠点 i までの最小リスク
 c_{ij} : 拠点 $i \rightarrow j$ 間のリスク

動的計画法とは？

- 動的計画法

逐次的(段階的)な決定を行う問題について、最適な決定を求める一般的な解法の枠組み

- 段階 $\leftarrow$ トポロジカル順, 離散的な時刻(期)
- 決定
- 状態

- 最適性の原理 principle of optimality

最適方策は、最初の状態および最初の決定がどうであったにせよ、残りの決定は最初の決定の結果生じた状態に対して、最適方策になっていなければならない([1])

参考文献

[1] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)

[2] 久保幹雄「動的計画法」【久保・田村・松井 編『応用数理計画ハンドブック』第7章】(2002)