Excel ソルバーではじめるOR

後藤順哉[1]　　堀田敬介[2]

[1] 中央大学
[2] 文教大学

2016 年10 月15 日（土）

本セミナーの構成

1. 数理最適化とソルバー（後藤）
2. Excel ソルバー入門（堀田）

---

3. ゲーム理論（堀田）
4. 0-1 整数計画（堀田）
5. ポートフォリオ選択（後藤）
6. VBA を使って便利にする（後藤）
7. データ包絡分析法（後藤）

- 閉会（閉会後　個別相談・質問コーナー）

ゲーム理論

セッション3

堀田敬介

文教大学

2016 年10 月15 日（土）

Outline

1. ゲーム理論：2人非協力零和ゲーム

2. 均衡解と線形計画法

1. 2人非協力零和ゲーム

- ゲーム理論(game theory)
  - ゲーム的状況　game situations
    - 複数の意思決定主体（プレイヤー）が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
  - ゲーム理論　game theory
    - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」（1944）

1. 2人非協力零和ゲーム

- ゲーム理論(game theory)
  - **プレイヤー　player**
    - 意思決定し，行動する主体．（2人，3人，…，n人，…，∞）
      - 例：個人，複数の個人から成る組織，政党，国家，…
  - **戦略　strategy**
    - プレイヤーが取りうる行動．（有限，無限）
  - **利得と利得関数　payoff**
    - 各プレイヤーの戦略決定後，ゲームは終了し，結果が出る．結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値．利得 payoff，効用 utility．

プレイヤーの集合

$N=\{1, 2, \ldots, n\}$

プレイヤーiの戦略集合

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\} \qquad (i \in N)$

プレイヤーiの利得関数

$f_i : S_1 \times S_2 \ldots \times S_n \to R \quad (i \in N)$

ゲームの定義

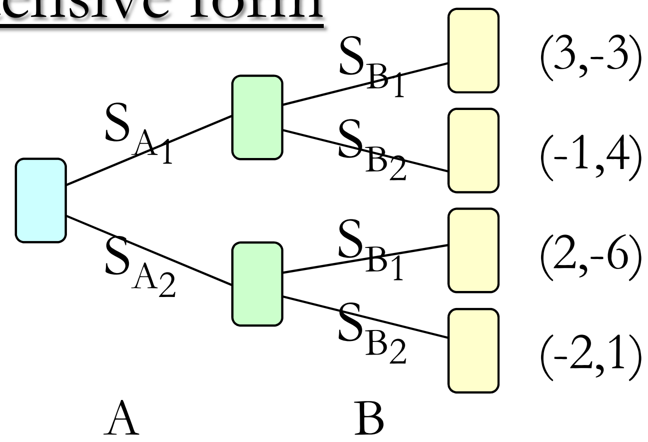
$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$$

各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し，
Gは全てのプレイヤーの共有知識とする

1. 2人非協力零和ゲーム

※ここでは戦略形のみ扱う
（展開形は扱わない）

- ゲーム理論(game theory)
  - ◆ **ゲームの表現形式**
    - **展開形**　extensive form



    - **戦略形**　strategic form，**標準形**　normal form

A＼B	S_{B_1}	S_{B_2}
S_{A_1}	3	1
S_{A_2}	-4	6

1. 2人非協力零和ゲーム

出展：「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 例）喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中
  - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は，A=600人，B=300人
  - 両店舗が別々の地域に出店すると，見込み客を全て獲得できる
  - 両店舗が同じ地域に出店すると，スタボがダタールの2倍の客を獲得
  - 同時にどちらか1地域に必ず出店（両方出店や出店中止はない）
- 問：ダタールはどちらに出店すべきか？　またそれは何故か？

ダタ＼スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

◆ 検討
- マキシミン基準（悲観的意思決定基準）　→　A地域へ出店せよ
- マキシマックス基準（楽観的意思決定基準）　→　A地域へ出店せよ
- ラプラス基準（平均値）　→　A地域へ出店せよ
- ゲーム理論による解答　→　B地域へ出店せよ

「1人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用であるゲーム」では解が異なる！

1. 2人非協力零和ゲーム

- ゲーム理論(game theory)

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example：

$$q_j \geq 0, (j = 1,2,3)$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$p_i \geq 0, (i = 1,2,3)$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

混合戦略
mixed strategy

純粋戦略
pure strategy

1. 2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example：

	q_1	q_2	q_3
A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
$p_1 \rightarrow s_{A_1}$	-4	2	0
$p_2 \rightarrow s_{A_2}$	4	3	1
$p_3 \rightarrow s_{A_3}$	1	-3	2

  - player Aの期待効用（player A = 期待**効用最大化**プレイヤー = **maximin player**）

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略}s_{B_1}\text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = \ \ 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略}s_{B_2}\text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = \qquad\quad\ \ p_2 + 2p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略}s_{B_3}\text{の時の期待効用} \end{cases}$$

  - player Bの期待損失（player B = 期待**損失最小化**プレイヤー = **minimax player**）

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = -4q_1 + 2q_2 & \leftarrow \text{player A が戦略}s_{A_1}\text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = \ \ 4q_1 + 3q_2 + q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略}s_{A_2}\text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q}) = \ \ \ q_1 - 3q_2 + 2q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略}s_{A_3}\text{の時の期待損失} \end{cases}$$

補足：A, Bが各々混合戦略(p_1,p_2,p_3), (q_1,q_2,q_3)のとき

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3 \end{cases}$$

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

1. 2人非協力零和ゲーム

◆ 戦略の支配

- Example：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

被支配戦略 → s_{A_1}

支配戦略 → s_{A_2}

支配する
dominate

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	4 >	3	1
s_{A_3}	1 >	-3	2

A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	3	1
s_{A_3}	-3	2

戦略の支配 domination of strategies
プレイヤー i の戦略 h, k について，
戦略 h が戦略 k を支配するとは，
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して，

$$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$$

が成立すること．

- ＝だと「同等」
- ≧かつ≠
だと「弱支配」

補足）通常は，被弱支配戦略は
除去しない→　共有地の悲劇

被支配戦略除去の原理
「支配される戦略は用いない」

補足：被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ **ゲームは支配可解** dominance solvable

1. 2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 最適混合戦略

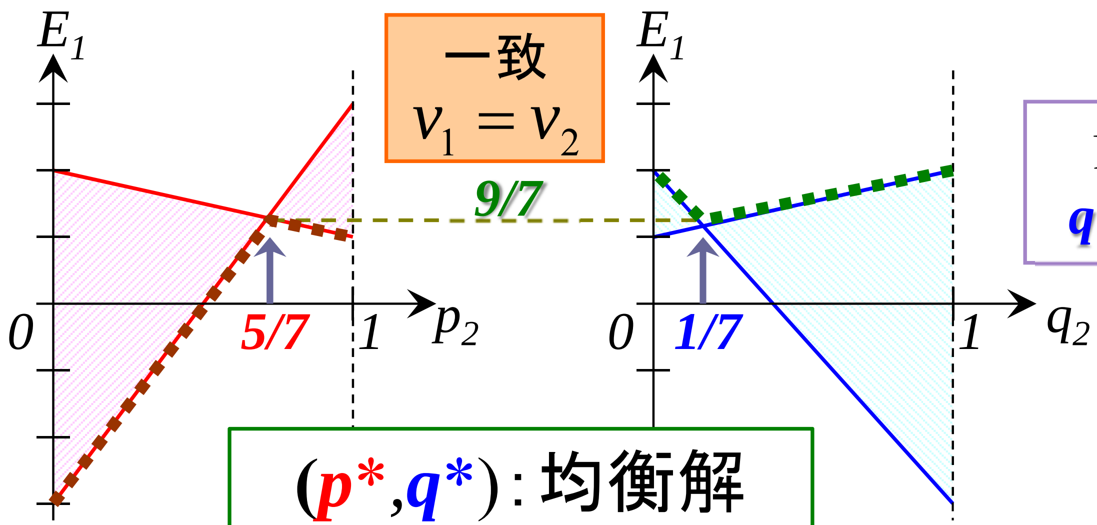
- Example：
  - player A = 期待**効用最大化**プレイヤー = **maximin player**

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p},(1,0)) = 6p_2 - 3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_2} \text{の時の期待効用} \\ E(\boldsymbol{p},(0,1)) = -p_2 + 2 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_3} \text{の時の期待効用} \end{cases}$$

  - player B = 期待**損失最小化**プレイヤー = **minimax player**

$$\begin{cases} E((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_2 + 1 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_2} \text{の時の期待損失} \\ E((0,1),\boldsymbol{q}) = -5q_2 + 2 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_3} \text{の時の期待損失} \end{cases}$$

Aの最適戦略
$\boldsymbol{p}^*=(0, 5/7, 2/7)$



Bの最適戦略
$\boldsymbol{q}^*=(0, 1/7, 6/7)$

$(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$: 均衡解

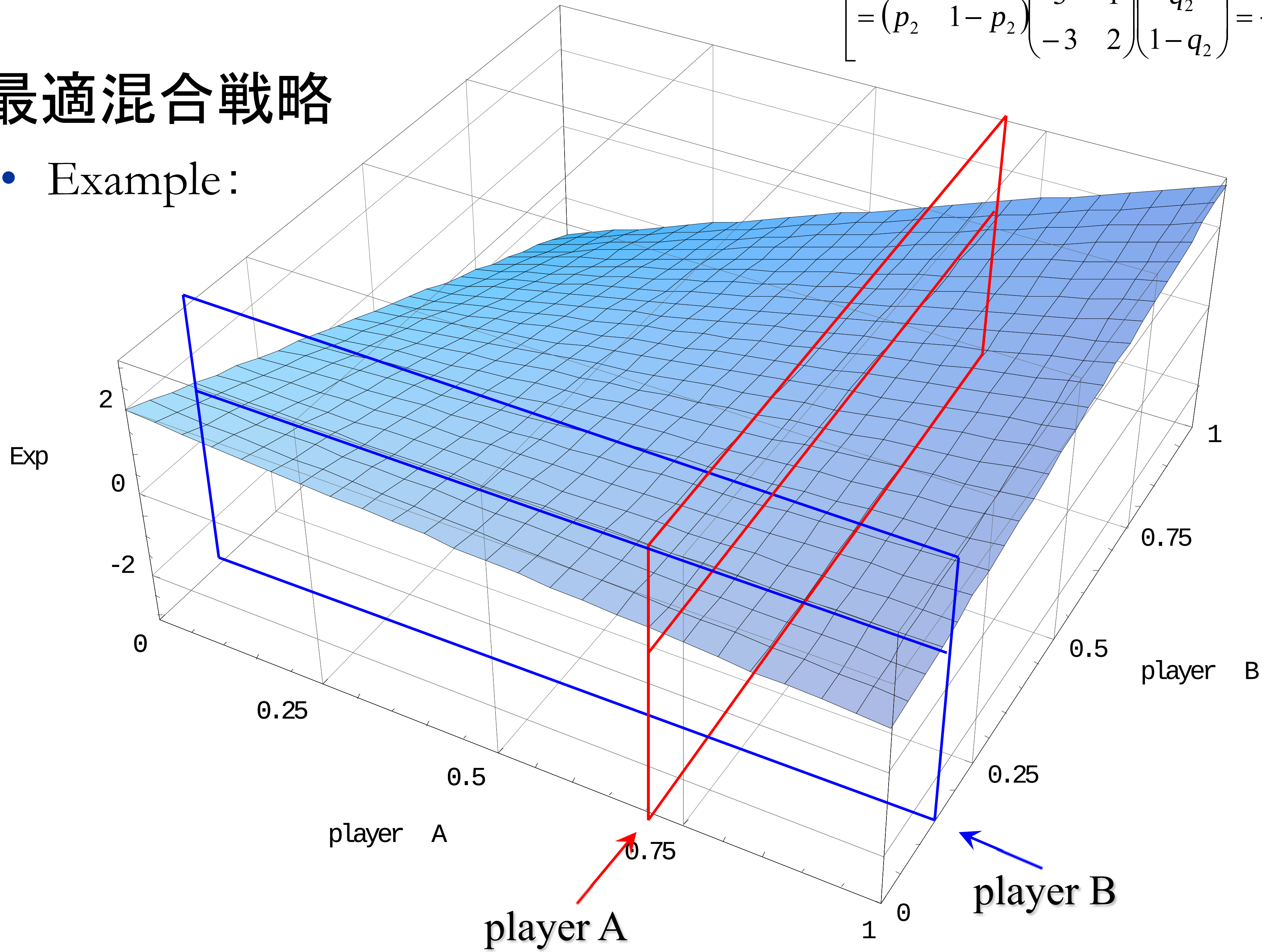
1. 2人非協力零和ゲーム

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\
&= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\
&= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2)
\end{aligned}
$$

$$
\left[= \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right]
$$

◆ 最適混合戦略

- Example：

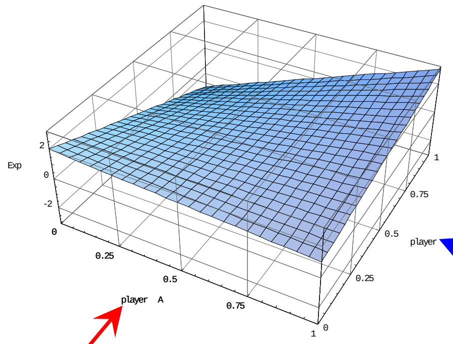


1. 2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

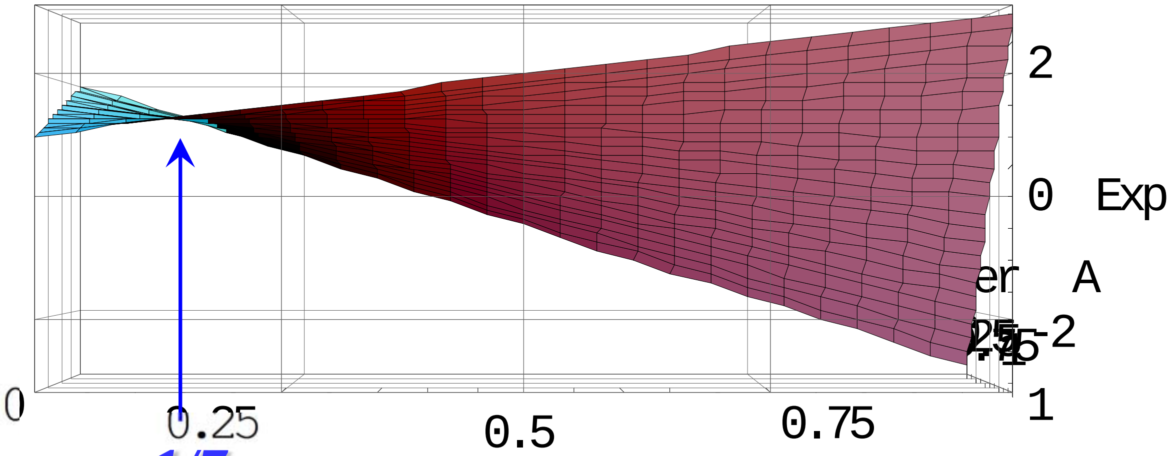
◆ 最適混合戦略

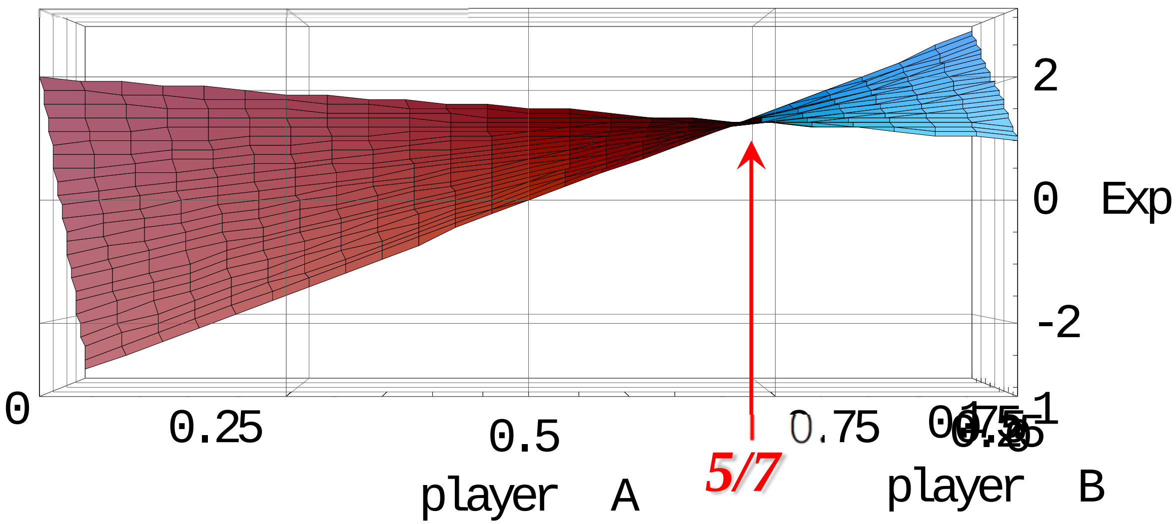
- Example：



player A
maximin player

player B
minimax player





1. 2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

- **Theorem3**

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

また，これを成立させる戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ を**均衡点**といい，均衡点における利得 $v(\boldsymbol{A})$ をゲームの値という．

$$v(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{p}^{*T} \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

- **Theorem4**

戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が関数 $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の**鞍点**であること．即ち，

$$\forall \boldsymbol{p},\boldsymbol{q}, \quad E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q})$$

が成立すること．

Bが $\boldsymbol{q}^*$ の時，Aは $\boldsymbol{p}^*$ にするのが利得最大

Aが $\boldsymbol{p}^*$ の時，Bは $\boldsymbol{q}^*$ にするのが損失最小

2. 均衡解と線形計画法

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- プレイヤーAの利得行列と混合戦略 $\boldsymbol{p}$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \vdots \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min \{E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}), E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\boldsymbol{p}, s_{B_n})\}$$

まとめると…

$$\begin{array}{ll} \max . u & \\ s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \cdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \ \cdots, \ p_m \geq 0 \end{array}$$

2. 均衡解と線形計画法

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

- プレイヤーBの損失行列(Aの利得行列)と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} q_1 & q_m & \cdots & q_n \end{array} \\
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\
E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\
\vdots \\
E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n
\end{cases}
$$

$$
\min_{\boldsymbol{q}} \max \left\{ E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}), E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}), \cdots, E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) \right\}
$$

まとめると…

$$
\begin{array}{|ll}
\min. \, w & \\
s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \le w \\
 & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \le w \\
 & \quad \cdots \\
 & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \le w \\
 & \qquad q_1 + \cdots + q_n = 1 \\
 & \qquad q_1, \ \cdots, \ q_n \ge 0
\end{array}
$$

2. 均衡解と線形計画法

◆ 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題
（LPの主問題：**P**）

主・双対

プレイヤーBの最適化問題
（LPの双対問題：**D**）

$$
\begin{array}{ll}
\max . u & \\
s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\
& a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\
& \cdots \\
& a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\
& p_1 + \cdots + p_m = 1 \\
& p_1, \ \cdots, \ p_m \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\min . w & \\
s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\
& a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\
& \cdots \\
& a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\
& q_1 + \cdots + q_n = 1 \\
& q_1, \ \cdots, \ q_n \geq 0
\end{array}
$$

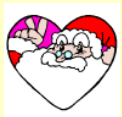
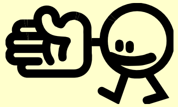
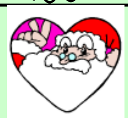
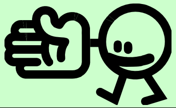
注）（**P**）（**D**）ともに自明解（$\boldsymbol{p}$=(1,0,…,0), $\boldsymbol{q}$=(1,0,…,0)）があるので実行可能.
→双対定理より，最適解が存在し，最適値は一致する

Theorem6

（P），（D）の最適解が（$\boldsymbol{p}^*$, u^*），（$\boldsymbol{q}^*$, w^*）のとき，（$\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$）がゲームの均衡点であり，$v := u^* = w^*$がゲームの値である

2. 均衡解と線形計画法

- 例題：じゃんけん

A＼B				min	max
	0	2	-7	-7	-2
	-2	0	4	-2	
	7	-4	0	-4	
max	7	2	4		
min		2			

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\neq$$

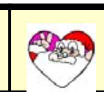
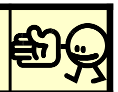
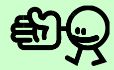
$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

2. 均衡解と線形計画法

- 例題：じゃんけん

		q_1	q_2	q_3
	A＼B			
p_1		0	2	-7
p_2		-2	0	4
p_3		7	-4	0

$$
\begin{array}{l}
\max.\, u \\
s.t. \quad \quad -2p_2 + 7p_3 \geq u \\
\quad 2p_1 \quad \quad -4p_3 \geq u \\
\quad -7p_1 + 4p_2 \quad \quad \geq u \\
\quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
\quad p_1,\ p_2,\ p_3 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\min.\, w \\
s.t. \quad \quad 2q_2 - 7q_3 \leq w \\
\quad -2q_1 \quad \quad +4q_3 \leq w \\
\quad 7q_1 - 4q_2 \quad \quad \leq w \\
\quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\
\quad q_1,\ q_2,\ q_3 \geq 0
\end{array}
$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

【演習】 Excel Solver で最適解を求めよ

2. 均衡解と線形計画法

【補足】2人非協力零和ゲームの均衡点

零和ゲームの場合は
➢最適応答戦略
➢ミニマックス戦略
いずれの考え方でも均衡解を求められるよ

例題：プレイヤーAの利得表

		q_1	q_2
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p_1	s_{A_1}	3	-2
p_2	s_{A_2}	-1	4

➢**最適応答戦略**

$$\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} = 3-(-1) = 4 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 4-(-2) = 6 \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} = (-1)-4 = -5 \end{cases}$$

$$(\bar{r}+\hat{r})q_1 - \hat{r} = 10q_1 - 6$$

$$\begin{cases} q_1 > 3/5 \to p_1 := 1 \\ q_1 = 3/5 \to p_1 : 任意 \\ q_1 < 3/5 \to p_1 := 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} = (-3)-1 = -4 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = (-4)-2 = -6 \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} = 1-(-4) = 5 \end{cases}$$

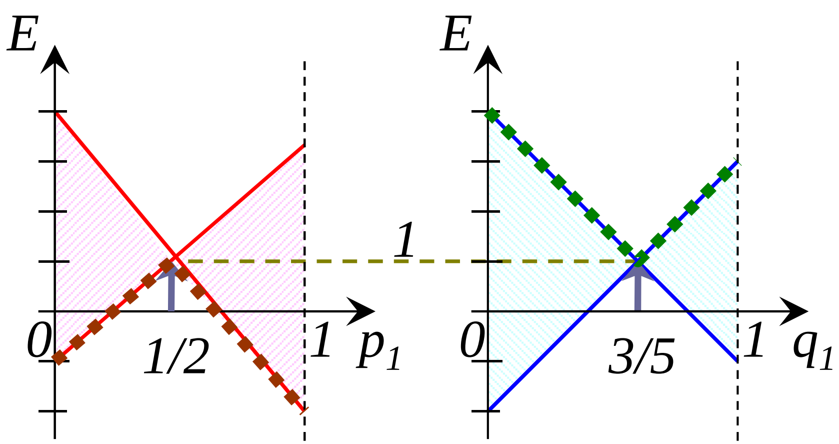
$$(\bar{c}+\hat{c})p_1 + \tilde{c} = -10p_1 + 5$$

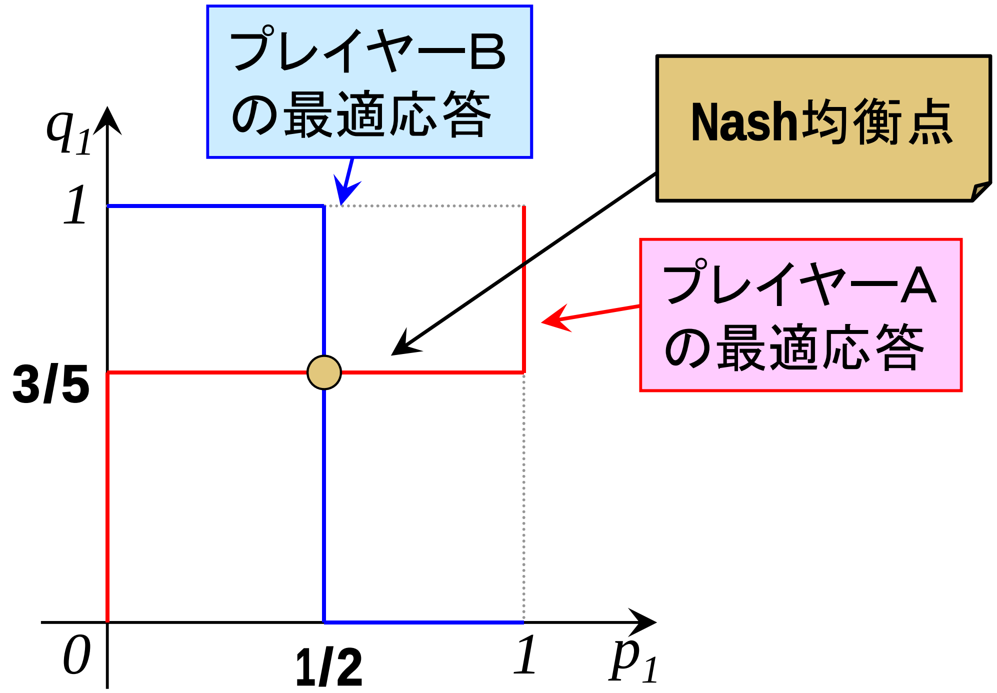
$$\begin{cases} p_1 < 1/2 \to q_1 := 1 \\ p_1 = 1/2 \to q_1 : 任意 \\ p_1 > 1/2 \to q_1 := 0 \end{cases}$$

➢**ミニマックス戦略**

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 10p_1q_1 - 6p_1 - 5q_1 + 4$$

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p},(1,0)) = 4p_1 - 1 \\ E(\boldsymbol{p},(0,1)) = -6p_1 + 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} E((1,0),\boldsymbol{q}) = 5q_1 - 2 \\ E((0,1),\boldsymbol{q}) = -5p_1 + 4 \end{cases}$$





参考文献：松井彰彦「高校生からのゲーム理論」
筑摩書房（2010）

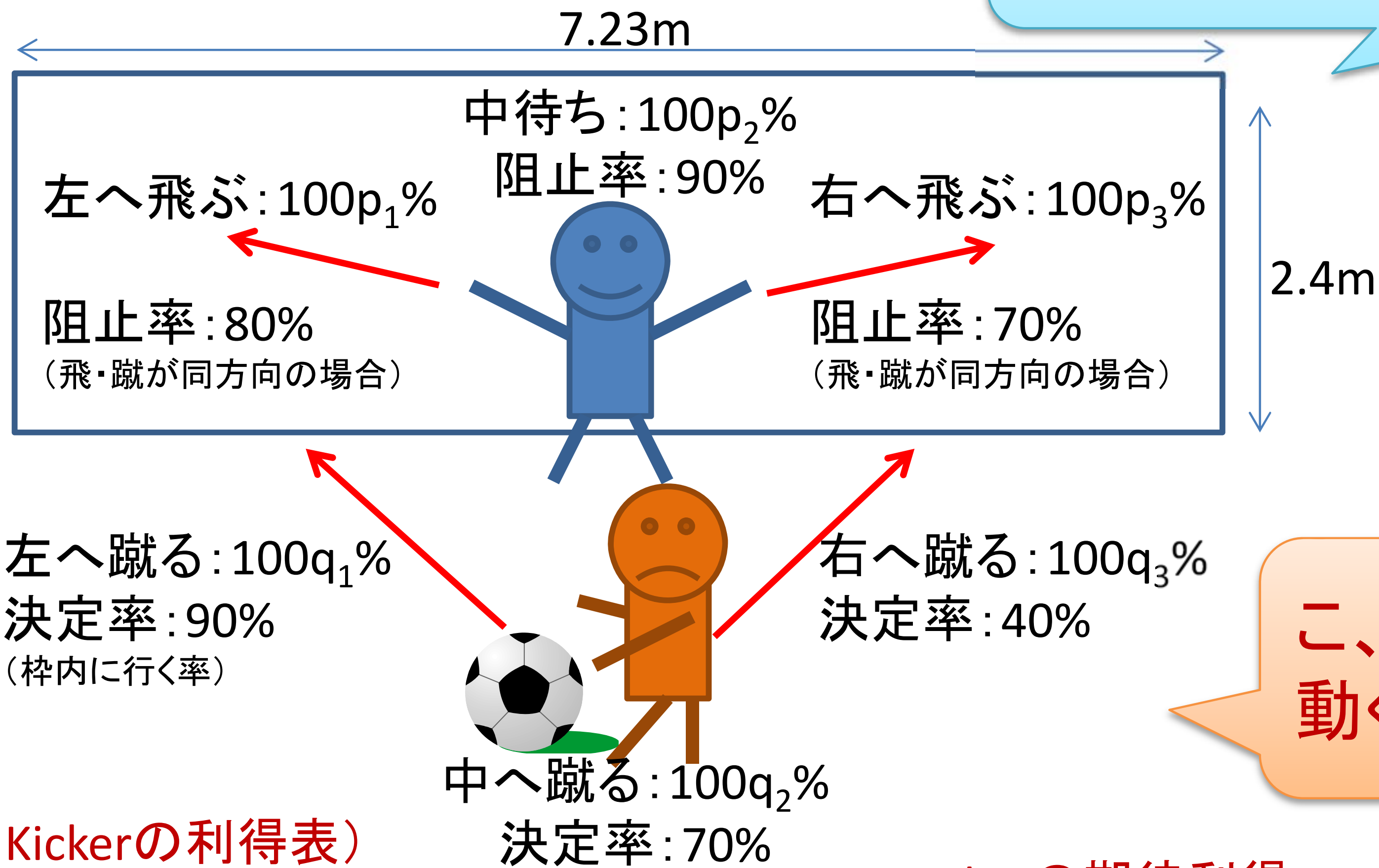
2. 均衡解と線形計画法

【演習】PK戦：キーパー 対 キッカー

あたらなければ
どうということはない

キーパーの
混合戦略
(p_1, p_2, p_3)
$p_1+p_2+p_3=1$
$p_1,p_2,p_3 \geqq 0$

キッカーの
混合戦略
(q_1, q_2, q_3)
$q_1+q_2+q_3=1$
$q_1,q_2,q_3 \geqq 0$



こ、こいつ
動くぞ

ゴールする確率（Kickerの利得表）

Kicker ＼ Keeper	左に飛ぶ	中待ち	右に飛ぶ
左へ蹴る	0.9×0.2	0.9	0.9
真ん中へ蹴る	0.7	0.7×0.1	0.7
右へ蹴る	0.4	0.4	0.4×0.3

Kickerの期待利得
（＝Keeperの期待損失）

$$(0.18q_1 + 0.9q_2 + 0.9q_3)\,p_1 + (0.7q_1 + 0.07q_2 + 0.7q_3)\,p_2 + (0.4q_1 + 0.4q_2 + 0.12q_3)\,p_3$$

参考文献：大浦宏邦「人間行動に潜むジレンマ」
DOJIN選書（2007）

2. 均衡解と線形計画法

【演習】タカ戦略 対 ハト戦略

- タカ戦略 … 相手をやっつけて餌（4）を独り占めしようとする
- ハト戦略 … 見つけた餌（4）を分け合って食べる

な、殴ったね！

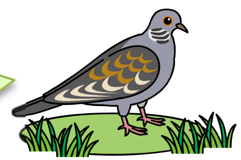
殴ってなぜ悪いか！
貴様はいい、そうして喚いていれば気分も晴れるんだからな！

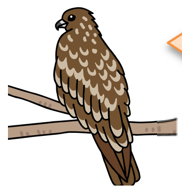
- タカとタカが出会ったら … 殴り合い怪我をする（-1）
- タカとハトが出会ったら … タカが餌を独り占め（タカ4, ハト0）
- ハトとハトが出会ったら … 餌を分け合う（2）

利得表

出会い	タカ	ハト
タカ	-1	4
ハト	0	2

2度もぶった！　親父にもぶたれたことないのに！





それが甘ったれなんだ！　殴られもせずに一人前になった奴がどこにいるものか！

参考文献

1. 鈴木光男：ゲーム理論入門, 共立出版,*1981, 2003.*
2. 岡田章：ゲーム理論, 有斐閣, *1996, 2011.*
3. 渡辺隆裕：ゲーム理論入門, 日本経済新聞社, *2008.*
4. 今野浩：線形計画法, 日科技連, *1987.*