Excel ソルバーではじめるOR

後藤順哉[1]　　堀田敬介[2]

[1] 中央大学
[2] 文教大学

2016 年10 月15 日（土）

本セミナーの構成

1. 数理最適化とソルバー（後藤）
2. Excel ソルバー入門（堀田）

---

3. ゲーム理論（堀田）
4. 0-1 整数計画（堀田）
5. ポートフォリオ選択（後藤）
6. VBA を使って便利にする（後藤）
7. データ包絡分析法（後藤）

- 閉会（閉会後　個別相談・質問コーナー）

0-1整数計画

セッション4

堀田敬介

文教大学

2016 年10 月15 日（土）

Outline

1. 0-1整数計画

2. ナップサック問題

3. 安定集合

4. 集合分割

5. 巡回セールスマン問題

1. 0−1整数計画

※ここでは，目的関数・制約
とも線形の場合のみ考える

- 整数計画(Integer Program)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & c^t z \\
\text{s.t.} \quad & \mathrm{Az} \leq b \\
& z \geq 0 \\
& z \in Z
\end{aligned}
$$

0-1整数計画（0-1IP）

$\Leftrightarrow$ $z \in \{0,1\}$

$\Updownarrow$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & c^t z + d^t x \\
\text{s.t.} \quad & \mathrm{Az} + Ex \leq b \\
& z, x \geq 0 \\
& z \in Z, x \in R
\end{aligned}
$$

0-1混合整数計画（0-1MIP）

$\Leftrightarrow$ $z \in \{0,1\}$

混合整数計画（MIP）

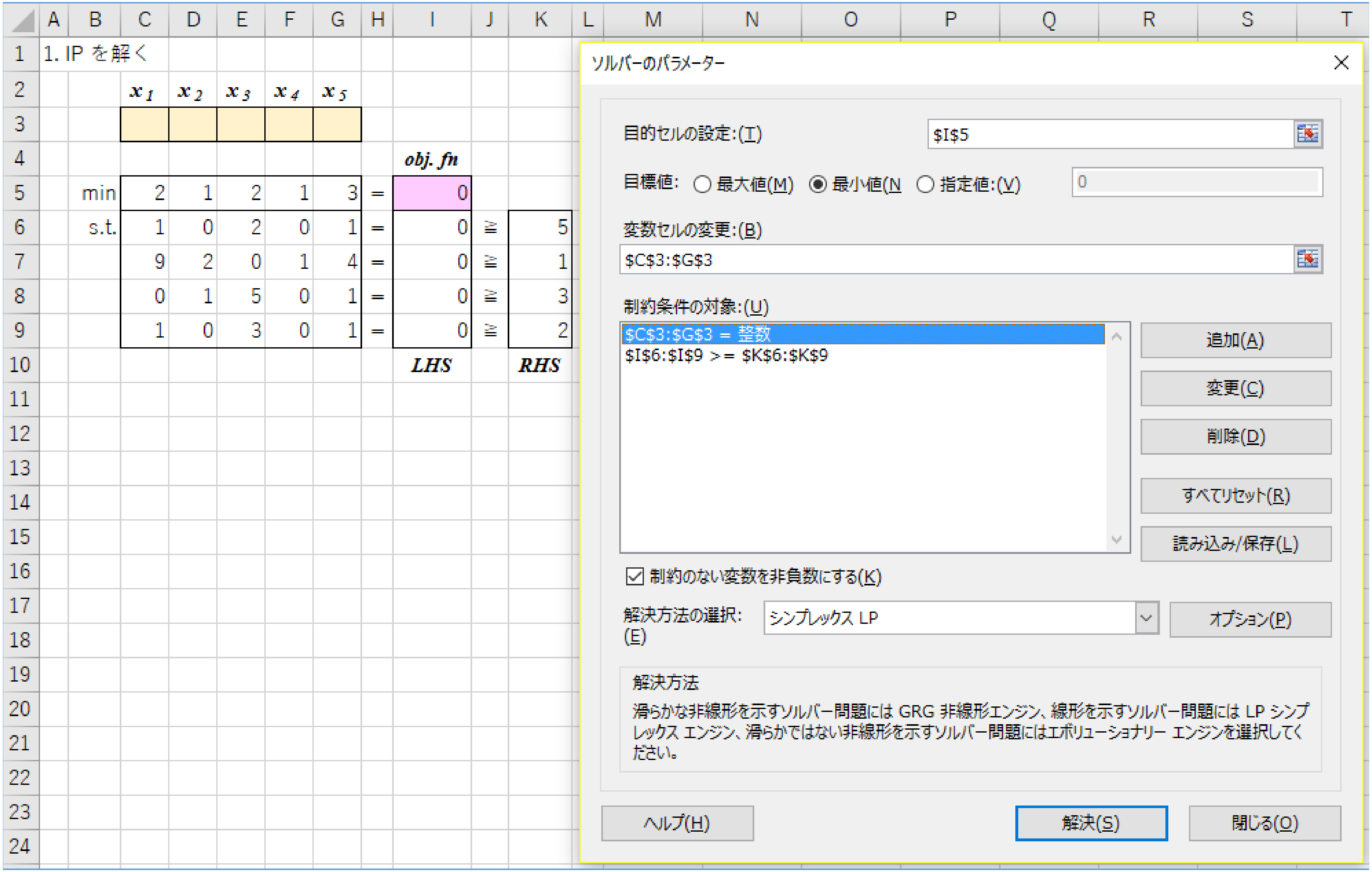
1. 0–1整数計画：IPを解く

- 整数計画(Integer Program)

$$\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5 \\
& 9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1 \\
& x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3 \\
& x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in Z
\end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1. IP を解く															
2			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5									
3																
4									*obj. fn*				数式			
5		min	2	1	2	1	3	=	0				[I5] = SUMPRODUCT(C$3:G$3, C5:G5)			
6		s.t.	1	0	2	0	1	=	0	≧	5		↓			
7			9	2	0	1	4	=	0	≧	1		[I6]～[I9]へコピー			
8			0	1	5	0	1	=	0	≧	3		↓			
9			1	0	3	0	1	=	0	≧	2		↓			
10									*LHS*		*RHS*					

1. 0-1整数計画：IPを解く



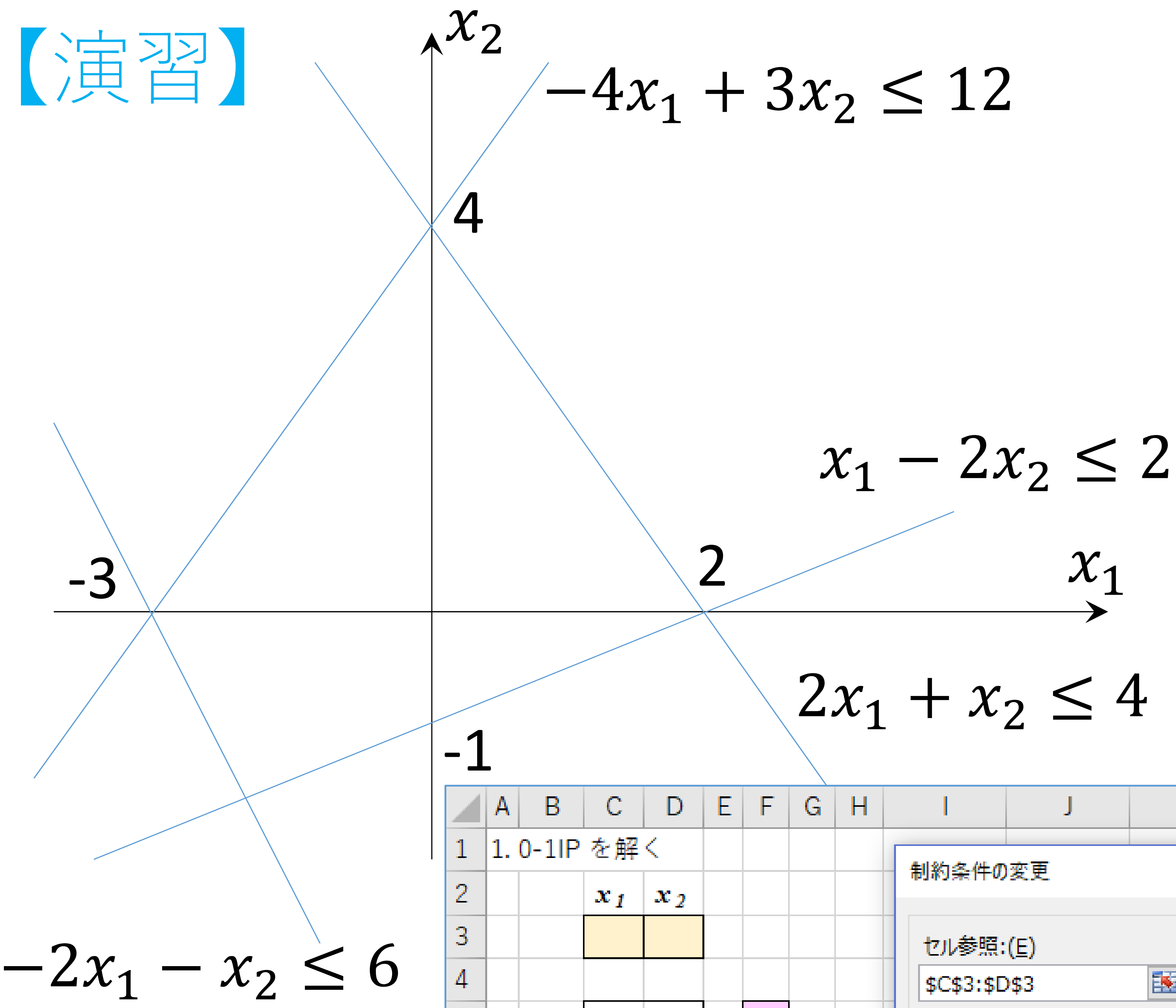
1. 0–1整数計画：IPを解く

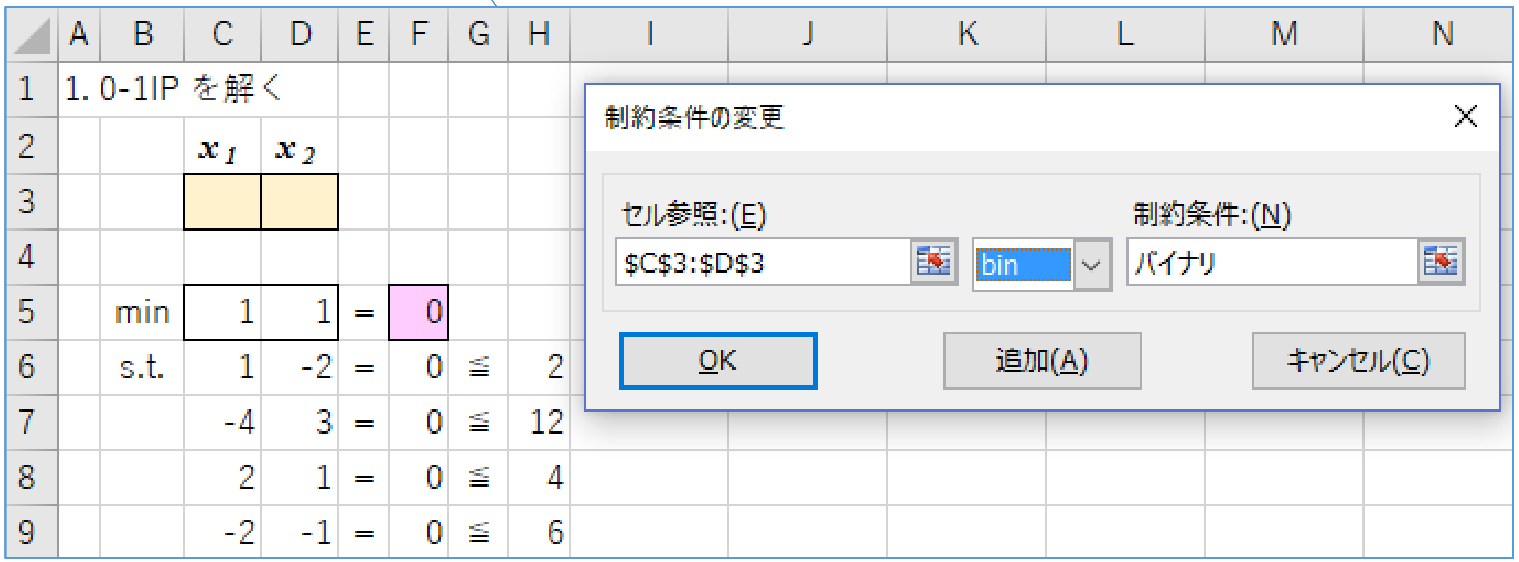
【演習】

- 以下の0-1IPについてExcel solverで最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & -4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -2x_1 - x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

【演習】





	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1. 0-1IP を解く							
2			x_1	x_2				
3								
4								
5		min	1	1	＝	0		
6		s.t.	1	-2	＝	0	≦	2
7			-4	3	＝	0	≦	12
8			2	1	＝	0	≦	4
9			-2	-1	＝	0	≦	6

2.ナップサック問題

- ナップサック問題 ***knapsack problem***

n個の品物があり，ナップサック（1つ）に入れたい

各品物には重さがあり，価値がある

ナップサックには b kg まで，品物を入れることができる

価値総和が最大になるようにするには，どの品物を持って行けばよいか？

【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 品物 $i = 1,2,\ldots,n$
- 品物 i の価値：w_i
- ナップサック容量 b
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \ldots \quad \text{品物 } i \text{ をナップサックに入れる} \\ 0 & \ldots \quad \textit{otherwise} \end{cases}$

2.ナップサック問題

- 例題：ナップサック問題

100個の品物があり，ナップサック（1つ）に入れたい

各品物には，重さがあり，価値がある

ナップサックには 40kg まで，品物を入れることができる

価値総和が最大になるようにするには，どの品物を持って行けばよいか？

【演習】 Excel Solver で求解せよ

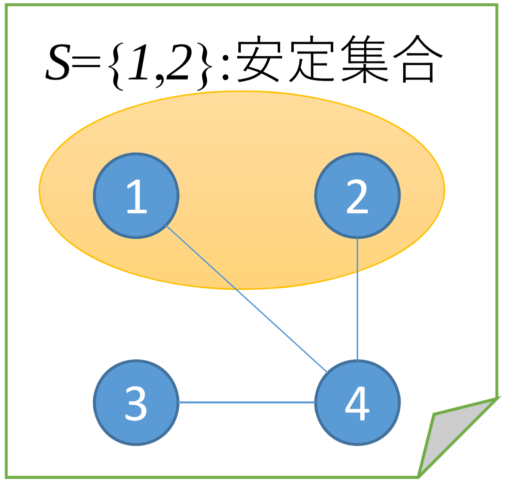
3.安定集合

- 最大安定集合問題 ***maximum stable set problem***

無向グラフ $G=(V,E)$　（V={1,2,...,n}）

について，要素数が最大となる安定集合 S を求めなさい

※点の部分集合 S（$S \subseteq V$）が安定集合（stable set）$\Leftrightarrow$ S内の任意の2点間に枝がない



【演習】0-1IPに定式化せよ

- 点集合 $V=\{1,2,\ldots,n\}$
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \ldots \quad \text{点 } i \text{ が安定集合 } S \text{ に含まれる} \\ 0 & \ldots \quad \textit{otherwise} \end{cases}$

3.安定集合

- 例題：最大安定集合問題

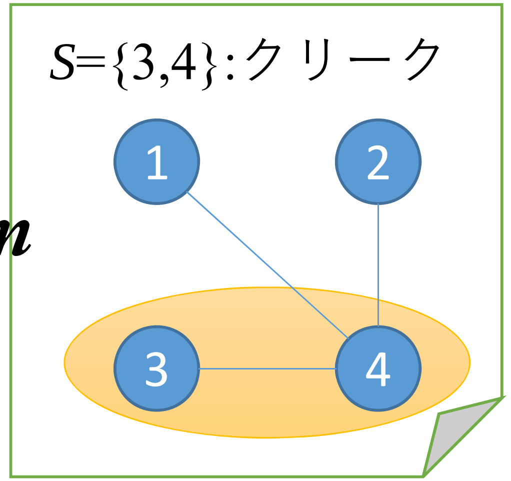
10人の学生がいる

人数が最大の仲良しグループをつくれ

※学生を点とし，仲が悪い学生間に枝を張ると，最大安定集合問題となる

【演習】 Excel Solver で求解せよ

3.安定集合

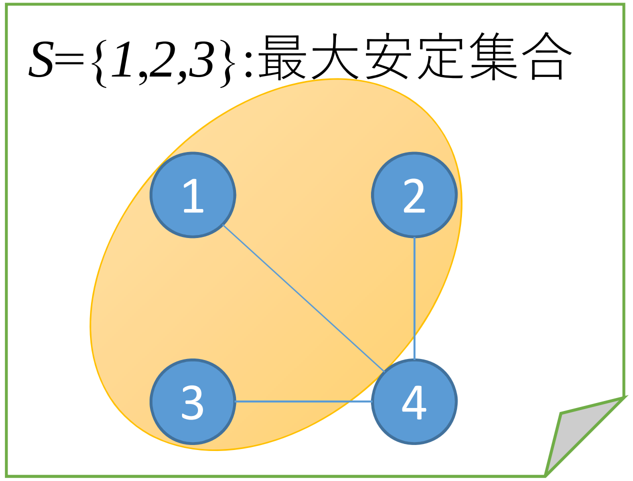


- 最大クリーク問題 ***maximum clique problem***

無向グラフ $G=(V,E)$　（V={1,2,...,n}）

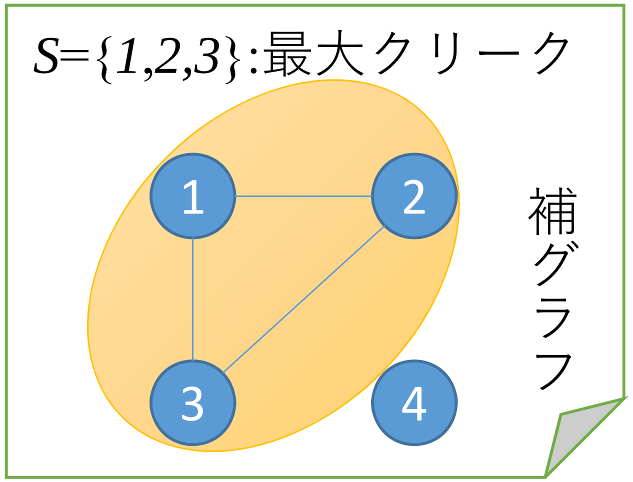
について，要素数が最大となるクリーク C を求めなさい

※点の部分集合 C（$C\subseteq V$）がクリーク⇔ Cによる誘導部分グラフが完全グラフ



【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 点集合 $V=\{1,2,\dots,n\}$
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \text{点 } i \text{ がクリーク } C \text{ に含まれる} \\ 0 & \dots\ otherwise \end{cases}$



【補足】

無向グラフ $G=(V,E)$ 上の最大安定集合問題
＝補グラフ$\bar{G}=(V,\bar{E})$ 上の最大クリーク問題

4.集合分割

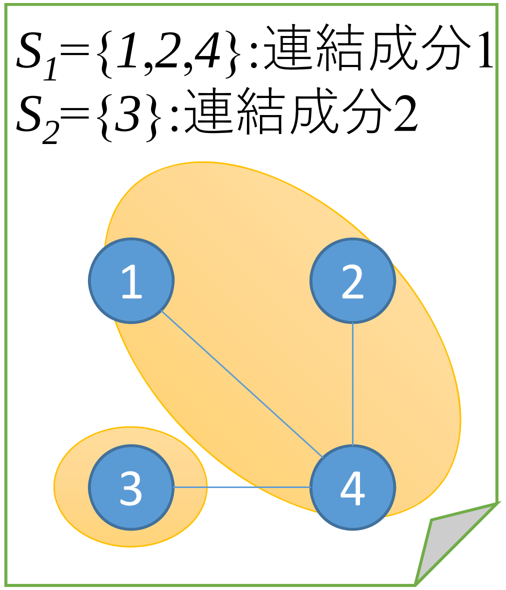
- 集合分割問題 ***set partition problem***

V={1,2,3,4}, m=2
→ S_1={1,2,4}:分割1
S_2={3}:分割2

集合 V を m 個に分割しなさい

※def) Vの部分集合族$\{V_1,\ldots,V_m\}$がVの分割 $\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{m} V_i = V,\ V_i \cap V_j = \emptyset (\forall i, j; i \neq j)$

※連結成分分割（無向グラフ $G = (V, E)$ を m 個の連結成分に分割せよ）



【演習】 0-1IPに定式化せよ

- Vの部分集合 V_i $(i = 1,2,\ldots)$
- V_i を表す特性ベクトル $a_i \in \boldsymbol{R}^{|V|}$
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \ldots V_i \text{ を分割の構成要素として使う} \\ 0 & \ldots \textit{otherwise} \end{cases}$

4.集合分割

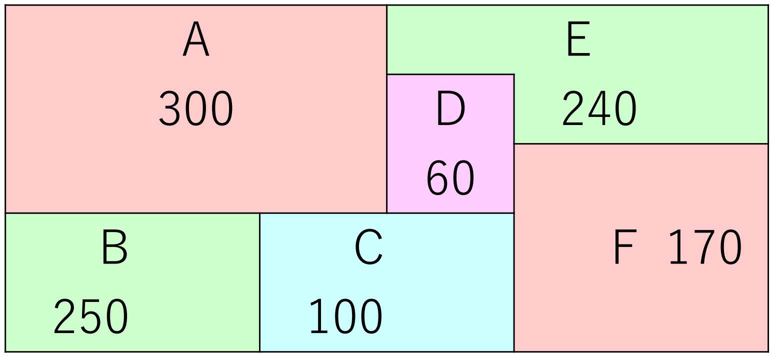
- 例題：連結成分分割問題（飛び地なし集合分割問題）

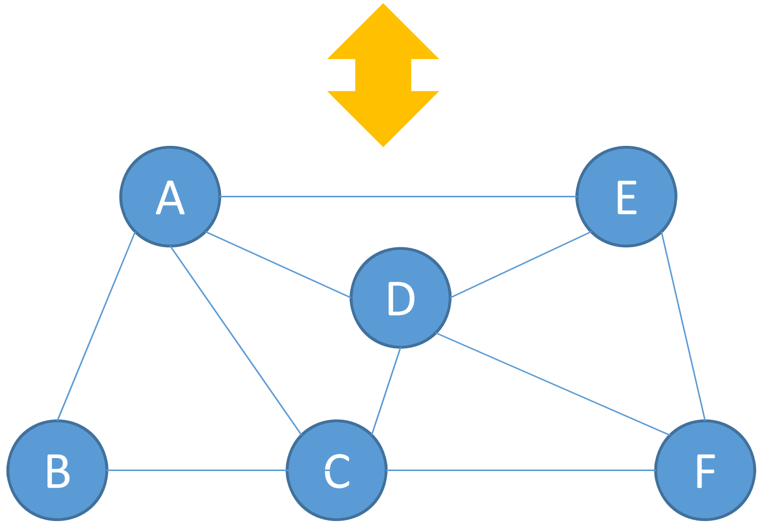
6つの地区（A,B,...,F）があり，各地区の人口が与えられている

3つの地域に分割したい（ただし，分割後の各地域は連結であること）

最大人口の地域と最小人口の地域の差を最小とする分割を求めよ

【演習】 Excel Solver で求解せよ





5.巡回セールスマン

- 巡回セールスマン問題 ***traveling salesman problem***

無向グラフ $G=(V,E)$　（V={1,2,...,n}）

について，全ての点を丁度1度ずつ経由するコスト最小の巡回路を求めよ

【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 点集合 $V=\{1,2,...,n\}$, 枝$(i,j)\in E$上のコストc_{ij}
- 0-1変数 $x_{ij}=\begin{cases}1 \cdots & \text{巡回路として枝 } (i,j)\in E \text{ を} i\to j \text{の順に通る} \\ 0 \cdots & \textit{otherwise}\end{cases}$

5.巡回セールスマン

- 定式化

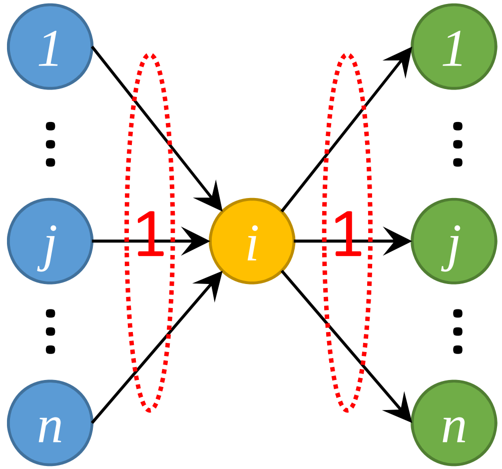
$$\text{min.} \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

この制約の意図



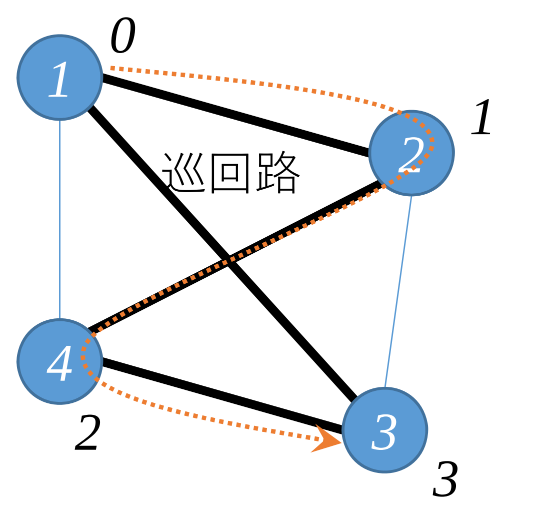
しかし，この制約だけでは部分巡回路が含まれる

部分巡回路をどう回避する？

- ✓ 部分巡回路除去定式化
- ✓ ポテンシャル定式化
- ✓ 単一品種流定式化
- ✓ 多品種流定式化
- ✓ etc.

5.巡回セールスマン

- ポテンシャル定式化



$$\text{min.} \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j: j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j: j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

部分巡回路が含まれる

$$u_i + 1 \ - (n-1)(1 - x_{ij}) \leq u_j \ (\forall i = 1, \dots, n; j = 2, \dots n; i \neq j)$$

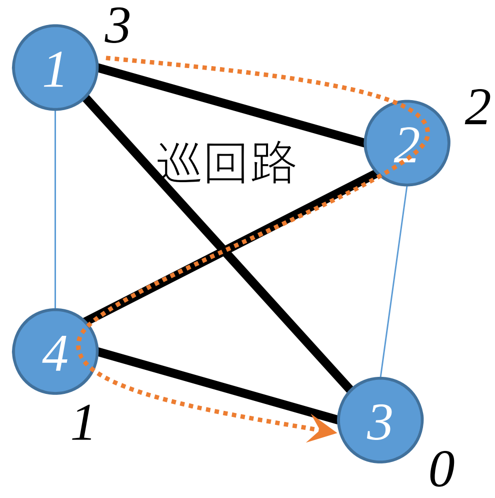
$$1 \leq u_i \leq n - 1 \ (\forall i = 2, \dots, n)$$

u_i：点iの訪問順序を表す実数変数

- u_1=0
- $i \rightarrow j$の順に訪問するとき $u_j = u_i$+1

5.巡回セールスマン

- 単一品種流定式化



$$\text{min.} \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

部分巡回路が含まれる

$$\sum_j f_{1j} = n - 1$$

$$\sum_j f_{ji} - \sum_j f_{ij} = 1 \ (\forall i = 2, \dots, n)$$

$$f_{1j} \leq (n-1) x_{1j} \ (\forall j \neq 1)$$

$$f_{ij} \leq (n-2) x_{ij} \ (\forall i \neq j, i \neq 1, j \neq 1)$$

$$f_{ij} \geq 0 \ (\forall i \neq j)$$

f_{ij}：点$i \to j$のフロー

- 点1から n-1 のフローを流す
- 各点では 1 消費する
- フローは巡回路上のみ流れる

5.巡回セールスマン

- 多品種流定式化

$$\text{min.} \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

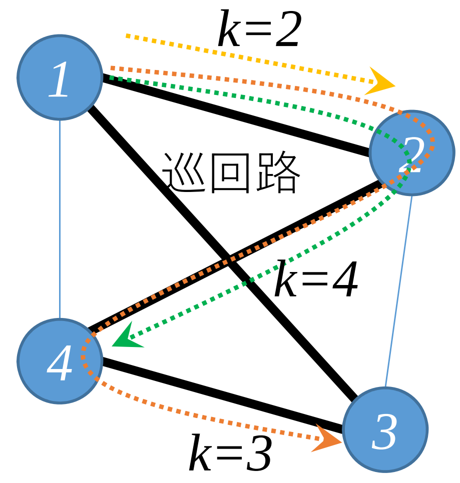
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

部分巡回路が
含まれる

点1から3種のフローを流す



$$\sum_j f_{ji}^k - \sum_j f_{ij}^k = \begin{cases} -1 (i = 1) \\ 0 (i \neq 1, k) \\ 1 (i = k) \end{cases} \ (\forall k = 2, \dots, n)$$

$$f_{ij}^k \leq x_{ij} \ (\forall k, i, j)$$

$$f_{ij}^k \geq 0 \ (\forall i \neq j, j \neq 1, k)$$

f_{ij}^k：品種kの点i→jのフロー

- 点1から n-1種類のフローを流す
- 各品種のフローは全て1単位
- 各品種k=2,...,nは対応点2,...,nが受け取る（k=2は点2, k=3は点3,…, k=nは点nが受け取る）
- 各フローは巡回路上のみ流れる

参考文献

1. *A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley and Sons, 1986.*
2. *L.A. Wolsey: Integer Programming, John Wiley and Sons, 1998.*
3. *M. Conforti, G. Cornuejols and G.Zambelli: Integer Programming, Springer, 2014.*
4. 久保幹雄, **J.P.**ペドロソ, 村松正和, **A.**レイス：あたらしい数理最適化, 近代科学社,**2012.**
5. 久保幹雄, 小林和博, 斉藤努, 並木誠, 橋本英樹：**Python**言語によるビジネスアナリティクス, 近代科学社, **2016.**
6. 藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎：**Excel**で学ぶ**OR**, オーム社, **2011.**
7. 堀田敬介：えくせるであそぶ, 創成社, **2005.**