



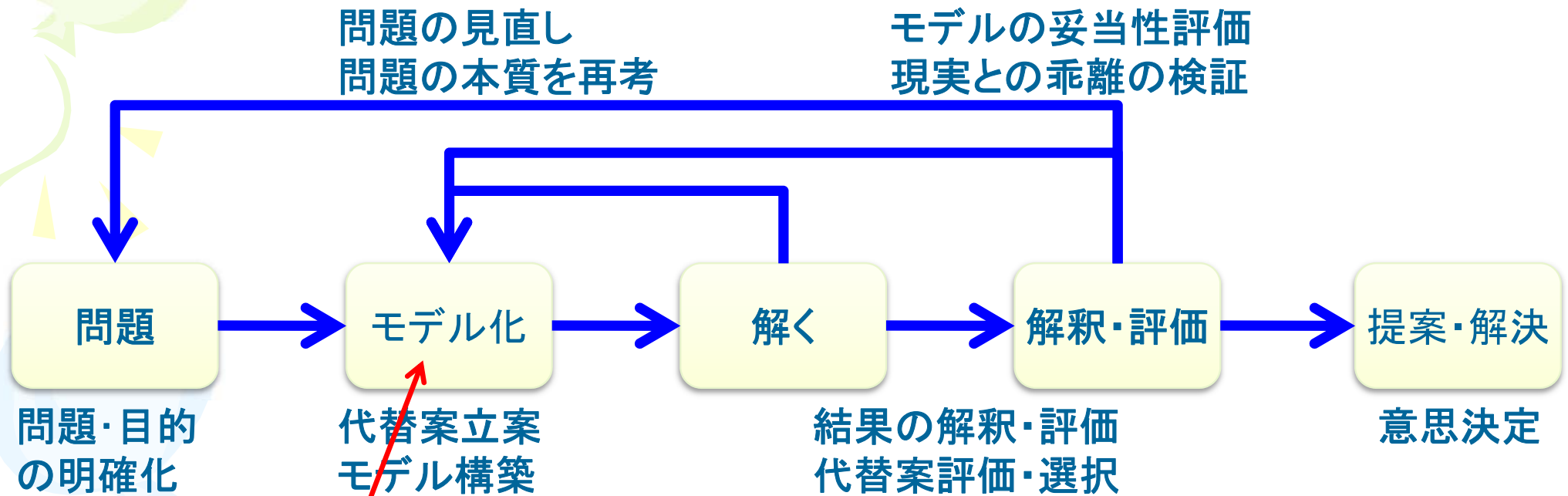
意思決定科学

線形計画法

堀田敬介

2017/10/3, Tue.

はじめに



➤最適化モデル

- 線形計画法
- 凸2次計画法
- 錐計画法
- 整数計画法

...

線形計画法

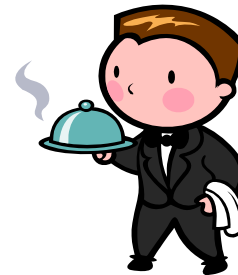
• 例題：効率的なアルバイト

- 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェ이터ー2つ.
- 各仕事を行うとストレスがたまるが，各々5，3である.

¥1,200/h
5 stress



¥900/h
3 stress

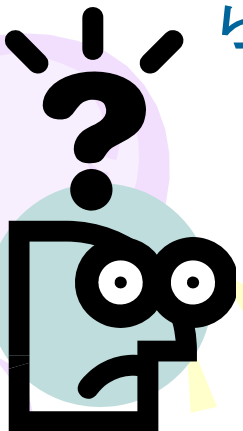


- 週末に5時間，アルバイトをする時間を取ることができる.
- 健康のため，ストレス許容量は21である.

— さて，この条件のもとで，最大のアルバイト料を得るにはどちらのアルバイトをどれだけすればいいか？

時給1200円 $\geq$ 時給900円
だから，5時間全てを清掃作業で！

でも...，
ストレス： $5 \times 5 = 25 > 21$ (許容量)



線形計画法

• 例題：効率的なアルバイト

- 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェ이터ー2つ．
- 各仕事を行うとストレスがたまるが，各々5，3である．
- 週末に5時間，アルバイトをする時間を取ることができる．
- 健康のため，ストレス許容量は21である．

定式化

$$\max. 1200x_1 + 900x_2$$

← アルバイト代**最大化**

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 5$$

← アルバイト時間**制約**

$$5x_1 + 3x_2 \leq 21$$

← 許容**ストレス制約**

$$x_1, x_2 \geq 0$$

← アルバイト時間は**非負**

最適化モデル

線形計画法, LP; Linear Program

線形計画法

• 解いてみよう

$$\begin{array}{ll}\text{max.} & 12x_1 + 9x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

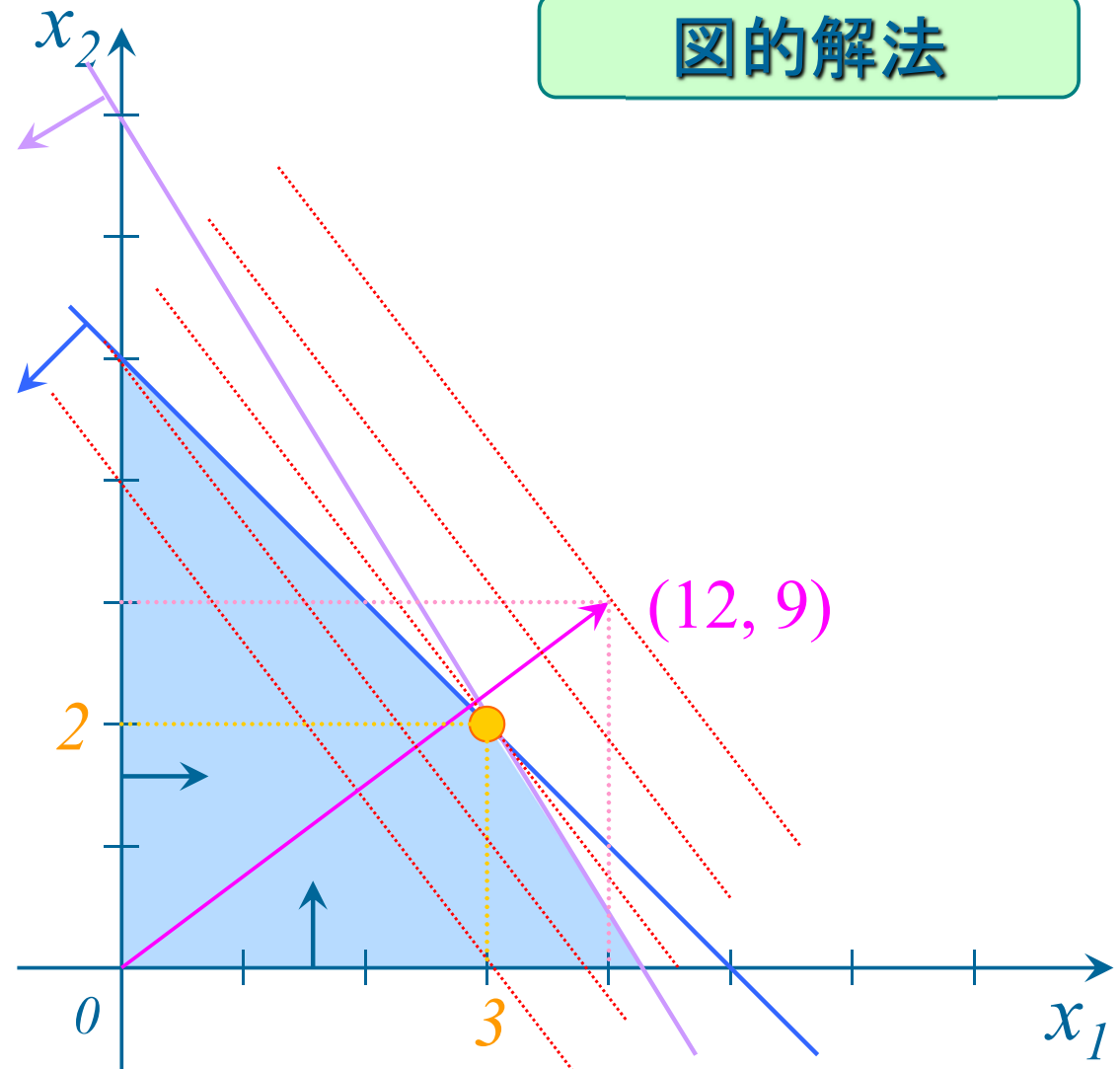
最適解: $(x_1, x_2) = (3, 2)$

{ ウェイターを3時間
清掃作業を2時間

最適値: ¥5,400

図的解法が使えるのは2次元(頑張って3次元)まで.
それ以上の高次元ではどうするの?

図的解法



演習1: LPによる定式化と図解による求解

• 最適勉強時間

– 太郎君は期末試験に備えて2科目A, Bの勉強をしたい

- Aの勉強時間1時間あたり期末試験15点アップできる
- Bの勉強時間1時間あたり期末試験20点アップできる
- Aの勉強時間1時間あたり20の疲労度がたまる
- Bの勉強時間1時間あたり30の疲労度がたまる
- 太郎君に残された勉強時間は最大10時間
- 太郎君の許容できる蓄積総疲労度は最大240
- 単位取得のために, AもBも60点以上が必要

– 2科目の総得点が最大となるように A, B の勉強時間を割り振りたい. それぞれ何時間ずつ勉強すればよいか?

1. 変数を設定する(求めたいものを変数にする)
2. LPに定式化する
3. 図解で求解する

線形計画法

単体法で解く

$$\max. 4x_1 + 3x_2$$

$$s. t. \quad x_1 + x_2 \leq 5$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max. z$$

$$s. t. \quad z - 4x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 5$$

$$5x_1 + 3x_2 + s_2 = 21$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

$$\max. z$$

$$s. t. \quad z + 3/2s_1 + 10/7s_2 = 18$$

$$x_2 + 5/2s_1 - 1/2s_2 = 2$$

$$x_1 - 3/2s_1 + 1/2s_2 = 3$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

単体法 (simplex method)

reduced cost

nonbasic variable

ratio test

basic variable

pivot

simplex tableau

	z	x1	x2	s1	s2	rhs	
Obj	1	-4	-3	0	0	0	
s1	0	1	1	1	0	5	5/1
s2	0	5	3	0	1	21	21/5

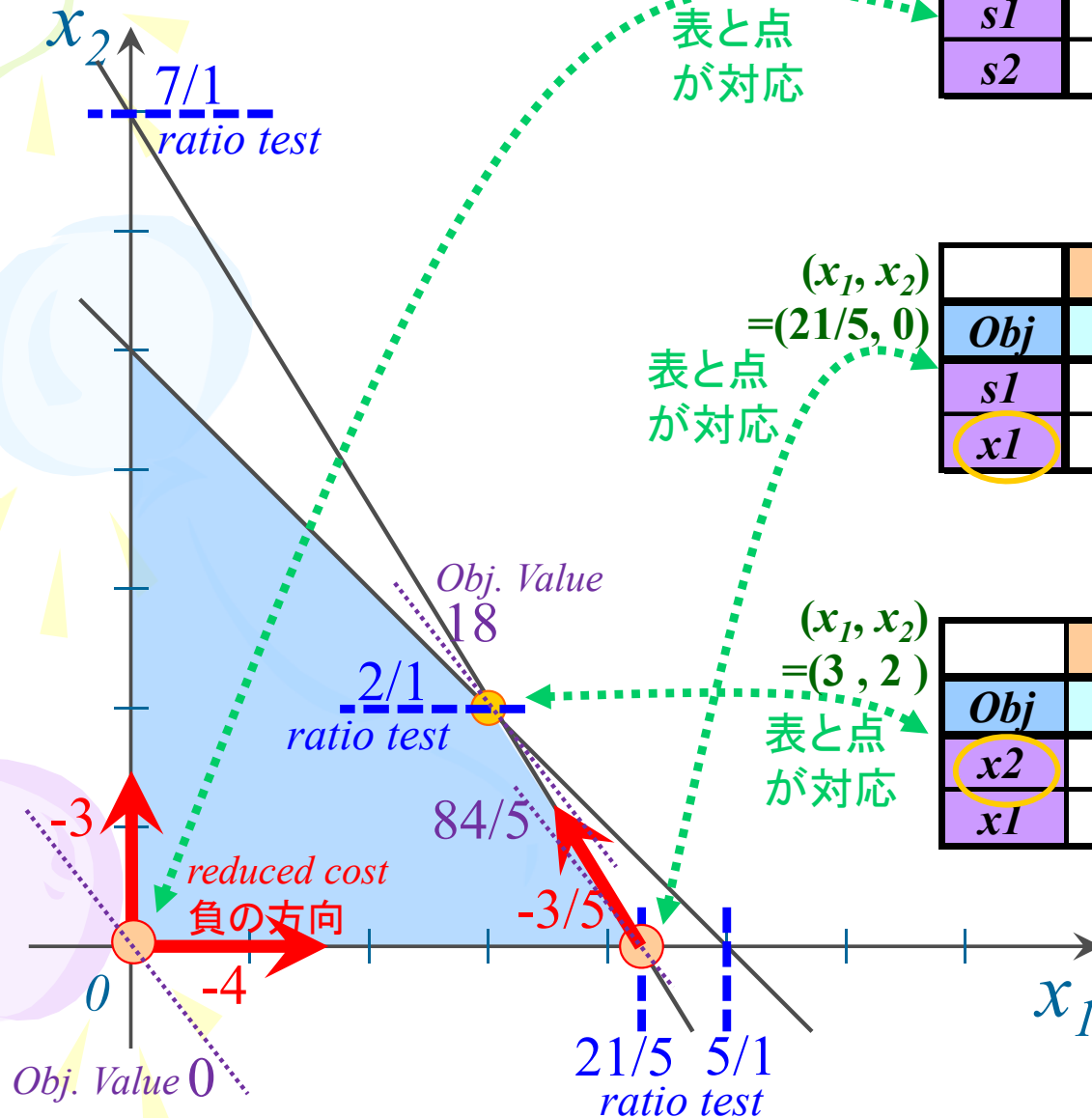
	z	x1	x2	s1	s2	rhs	
Obj	1	0	-3/5	0	1	84/5	
s1	0	0	2/5	1	-1/5	4/5	2/1
x1	0	1	3/5	0	1/5	21/5	7/1

	z	x1	x2	s1	s2	rhs
Obj	1	0	0	3/2	10/7	18
x2	0	0	1	5/2	-1/2	2
x1	0	1	0	-3/2	1/2	3

線形計画法

単体法で解く

単体法 (simplex method)



(x_1, x_2)
 $= (0, 0)$

表と点
 に対応

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	x_1
Obj	1	-4	-3	0	0	0	
s_1	0	1	1	1	0	5	5/1
s_2	0	5	3	0	1	21	21/5



(x_1, x_2)
 $= (21/5, 0)$

表と点
 に対応

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	x_2
Obj	1	0	$-3/5$	0	1	$84/5$	
s_1	0	0	$2/5$	1	$-1/5$	$4/5$	2/1
x_1	0	1	$3/5$	0	$1/5$	$21/5$	7/1

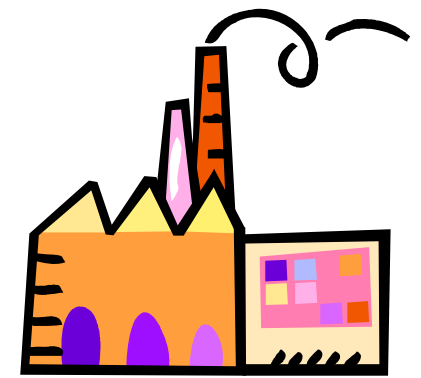


(x_1, x_2)
 $= (3, 2)$

表と点
 に対応

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
Obj	1	0	0	$3/2$	$10/7$	18
x_2	0	0	1	$5/2$	$-1/2$	2
x_1	0	1	0	$-3/2$	$1/2$	3

演習2: LPによる定式化



• 最適生産量問題

– ある工場では3つの製品A, B, Cを作っている.

- A, B, Cを1単位作るのに, それぞれ以下の材料が必要
材料Pが其々 $6kg, 2kg, 3kg$,
材料Qが其々 $3kg, 2kg, 5kg$,
材料Rが其々 $4l, 3l, 2l$,
材料Sが其々 $5g, 1g, 9g$
- この工場で使用できる材料P, Q, R, Sの量は, 其々 $2500kg, 3000kg, 1800l, 5000g$ である.
- A, B, Cを1単位売って得られる利益が各々7万円, 4万円, 5万円.

– 利益最大となる, A, B, Cの生産単位はいくらか?

線形計画法

単体法の考え方

$$\max. 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$s. t. 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \quad \longleftrightarrow \quad x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

最適解 (an optimal solution)

$$x^* = (6, 0, 0, 0)$$

最適値 (the optimal value)

12



被約費用 (reduced cost)

$$\max. z = 12 - 4x_2 - 2x_3 - x_4$$
$$s. t. x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

辞書 (dictionary)

最適辞書
(an optimal dictionary)

基底変数 (basic variable)

非基底変数 (non-basic variable)

基底解 (an basic solution)
 $x = (6, 0, 0, 0)$

実行可能基底解 (an feasible basic solution)
 $x \geq 0$ を満たす基底解

線形計画法

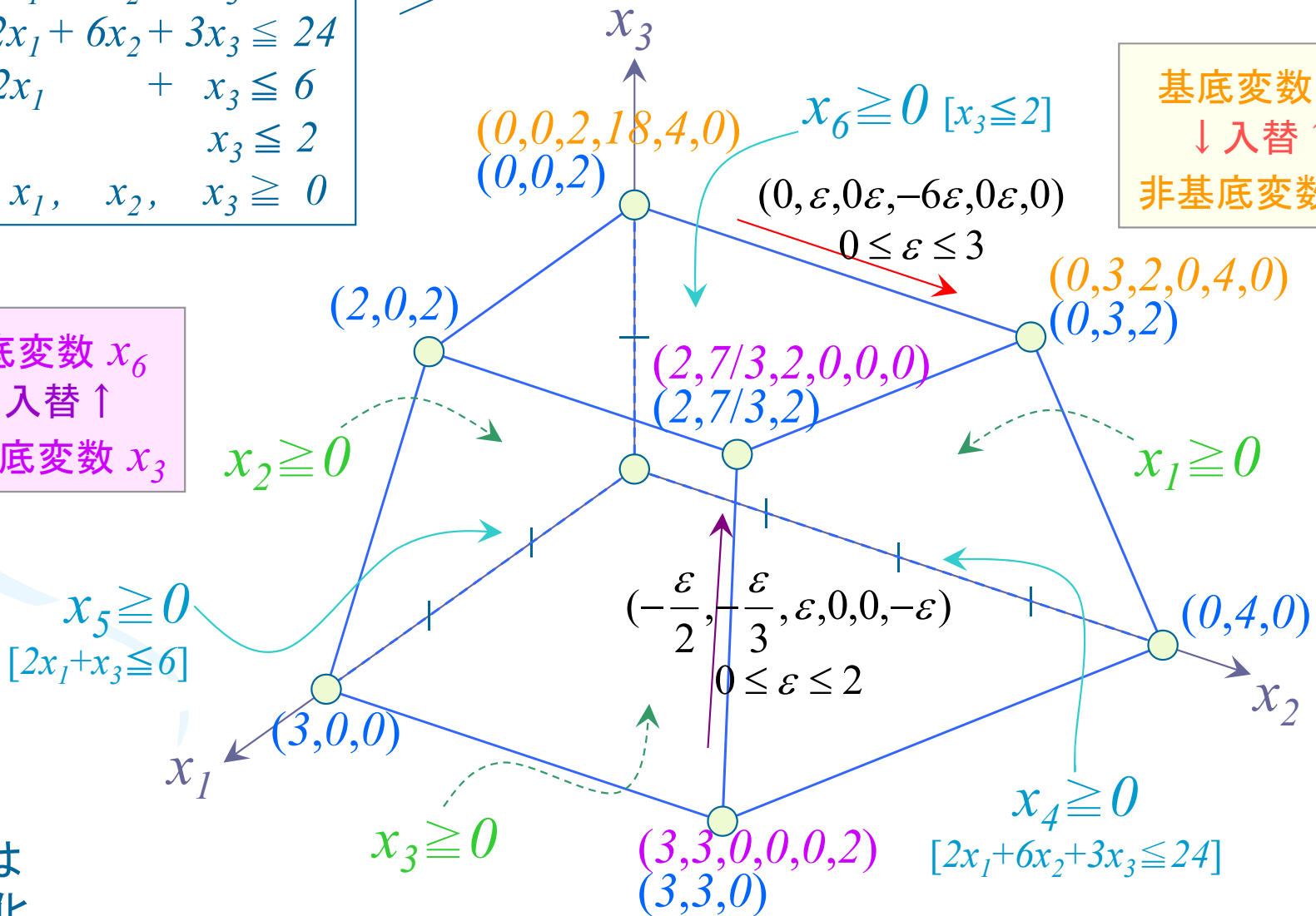
単体法の幾何学的意味

$$\begin{aligned} \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 6 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\ & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\ & x_3 + x_6 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

基底変数 x_6
↓入替↑
非基底変数 x_3

基底変数 x_4
↓入替↑
非基底変数 x_2



※この例題では
全端点で非退化

演習3: 単体法と幾何学的意味

- 以下の問題を単体法で解いてみよう

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\
 & 2x_1 + x_3 \leq 6 \\
 & x_3 \leq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\
 & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\
 & x_3 + x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
Obj	1	-1	-1	-1	0	0	0	0
x_4	0	2	6	3	1	0	0	24
x_5	0	2	0	1	0	1	0	6
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2

ratio test $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; z)$
 $(0, 0, 0, 24, 6, 2; 0)$

 非基底変数 基底変数

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
Obj	1	0	-1	-1/2	0	1/2	0	3
x_4	0	0	6	2	1	-1	0	18
x_1	0	1	0	1/2	0	1/2	0	3
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2

ratio test $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; z)$
 $(3, 0, 0, 18, 0, 2; 3)$

 非基底変数 基底変数
 $(3, 3, 0, 0, 0, 2; 6)$

※赤字は湘南校舎PC
で使えるソフト

PCソフトを利用してLPを解く

- ソフトを利用して解いてみよう！

- | | |
|------------------|----------------------|
| – Gurobi | 商用, Academic利用期間限定無料 |
| – FICO Xpress | 商用, 学生試用版無料 |
| – IBM Ilog Cplex | 商用, Academic利用無料 |
| – SCIP | フリー |
| – Excel Solver | 商用 |
| – LINGO/LINDO | 商用 |
| – GLPK | フリー |
| – Matlab | 商用 |
| – Octave | フリー |
| – Scilab | フリー |
| etc. | |

参考: 数理モデル

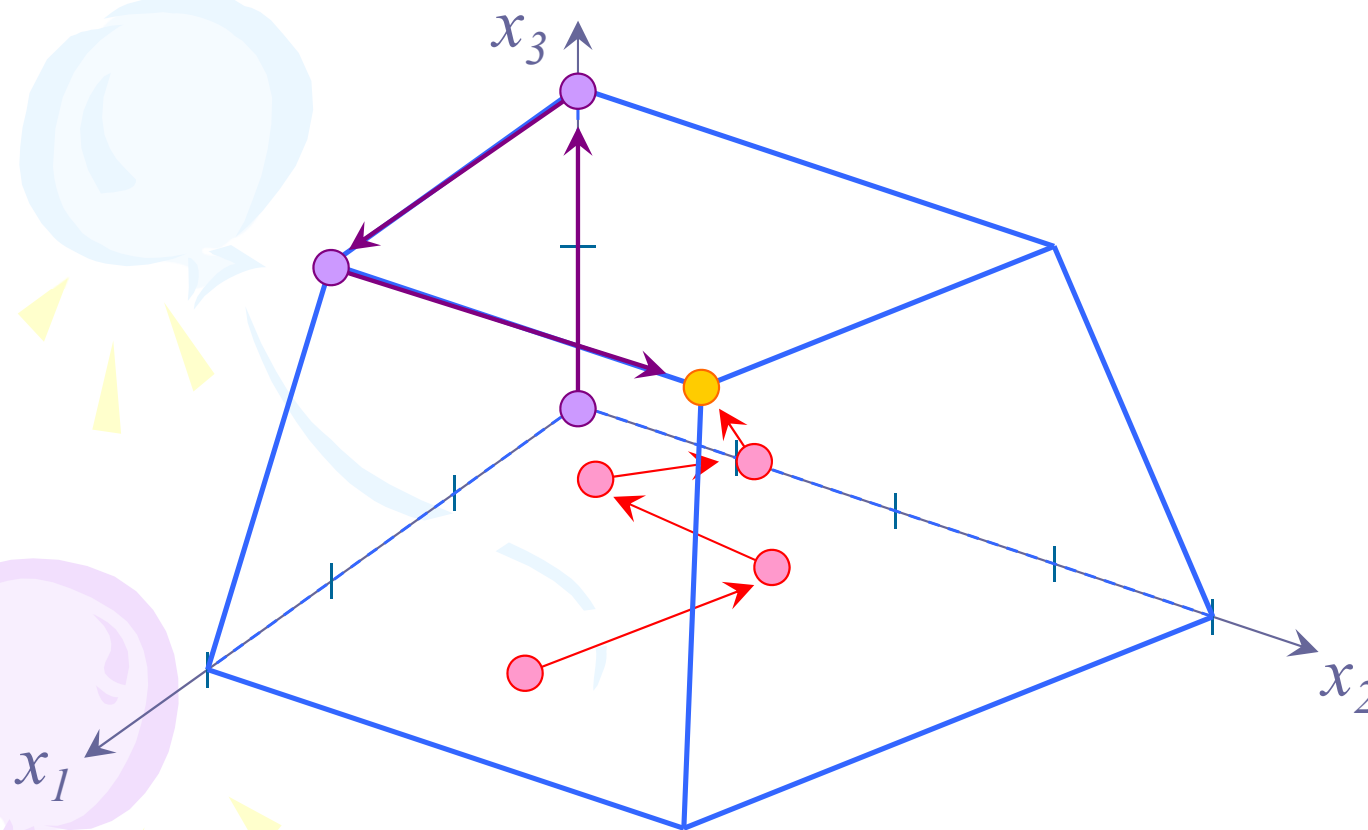
線形計画問題を解く2つの解法

単体法 (*simplex method*)

G.B.Dantzig (1947)

内点法 (*interior point method*)

N.Karmarkar (1984)



参考: 主双対内点法

主・双対問題(行列表記)

$$\begin{array}{ll} \max. \mathbf{c}^t \mathbf{x} & \min. \mathbf{b}^t \mathbf{y} \\ \text{s.t. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}^t \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Newton方程式

$$\begin{bmatrix} A & O & O \\ O & A^t & I \\ S & O & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Jacobi行列

Newton方向ベクトル

$$d_j = \mu - x_j s_j \\ (j=1, \dots, n)$$

Coffee break simplex ?

Def. Let S be an arbitrary set in E_n . The convex hull of S , denoted by $H(S)$, is the collection of all convex combination of S .

In other words, $\mathbf{x} \in H(S)$ if and only if

- $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j$
- $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 (\forall j)$
- $\mathbf{x}_j \in S (\forall j)$

Def. The convex hull of a finite number of points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ in E_n is called a polytope.

Def. A collection of vectors $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ in E_n is considered to be linearly independent, if $\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j = 0$ implies that $\lambda_j = 0$ for all j .

Def. A collection of vectors $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ in E_n is considered to be affinely independent, if $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \dots, (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_1)$ are linearly independent.

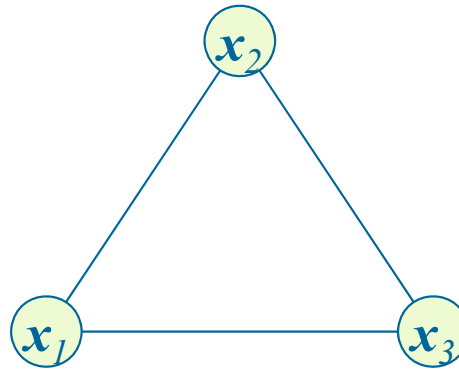
Def. If $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ are affinely independent, $H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1})$ is called a simplex with $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$.

***Coffee break** simplex ?*

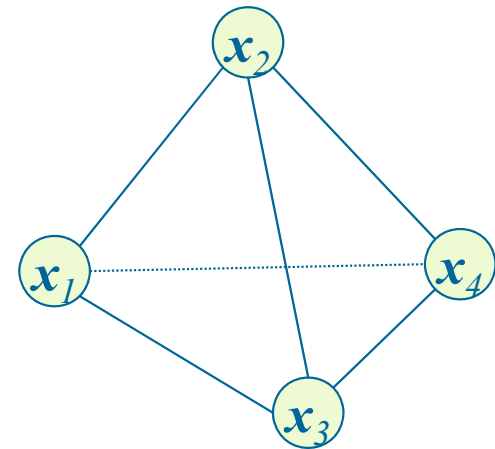
*The regular n -dimensional **simplex***



$n=1$



$n=2$



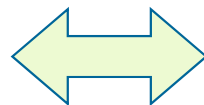
$n=3$

双対問題

Primal

• 主問題(P)

$$\begin{array}{ll}\max. & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



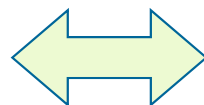
Dual

• 双対問題(D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$

対称型の主・双対問題

$$\begin{array}{ll}\max. & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 = 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 = 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\min. & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3\end{array}$$

標準型の主・双対問題

一般的には...



双対問題

• 双対問題の考え方

$$\begin{array}{l}
 \text{(P)} \quad \left| \begin{array}{l}
 \max. \quad \underline{15}x_1 + \underline{13}x_2 \\
 \text{s. t.} \quad x_1 + 3x_2 \leq 5 \quad \dots \textcircled{1} \\
 \quad \quad 3x_1 + x_2 \leq 7 \quad \dots \textcircled{2} \\
 \quad \quad 11x_1 + x_2 \leq 17 \quad \dots \textcircled{3} \\
 \quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(D)} \quad \left| \begin{array}{l}
 \min. \quad 5y_1 + 7y_2 + 17y_3 \\
 \text{s. t.} \quad y_1 + 3y_2 + 11y_3 \geq 15 \\
 \quad \quad 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 13 \\
 \quad \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2} \times 4 + \textcircled{3} \times 0$$

$$\underline{15}x_1 + \underline{13}x_2 \leq 43 \Rightarrow \text{目的関数値は43以下！}$$

$$\textcircled{1} \times 4 + \textcircled{2} \times 0 + \textcircled{3} \times 1$$

$$\underline{15}x_1 + \underline{13}x_2 \leq 37 \Rightarrow \text{目的関数値は37以下！}$$

$$\textcircled{1} \times y_1 + \textcircled{2} \times y_2 + \textcircled{3} \times y_3$$

$$(x_1 + 3x_2)y_1 + (3x_1 + x_2)y_2 + (11x_1 + x_2)y_3 \leq 5y_1 + 7y_2 + 17y_3$$

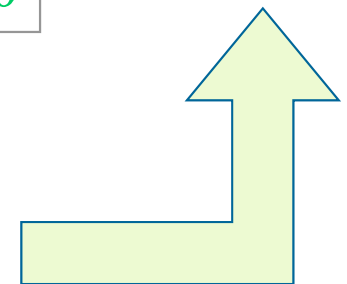
$$\Leftrightarrow (\underline{y_1 + 3y_2 + 11y_3})x_1 + (\underline{3y_1 + y_2 + y_3})x_2 \leq 5y_1 + 7y_2 + 17y_3$$

$$\textcircled{\ast}) x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{c} \text{VII} \\ \underline{15} \end{array} x_1 + \begin{array}{c} \text{VII} \\ \underline{13} \end{array} x_2$$

$$\textcircled{\ast}) y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

↓ minimize



演習4: 主問題と双対問題

- 以下の線形計画問題に対する双対問題を示せ

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \begin{array}{l} \max. \quad 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ \quad \quad -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ \quad \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ \quad \quad x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

双対定理

• 弱双対定理

任意の実行可能解 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ について,

$$4x_1 + 3x_2 \leq 5y_1 + 21y_2$$

が成り立つ

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \begin{array}{l} \max. \quad 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad \quad 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ \quad \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(D)} & \begin{array}{l} \min. \quad 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} \quad y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ \quad \quad y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ \quad \quad y_1, \quad y_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

• 証明

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq (y_1 + 5y_2)x_1 + (y_1 + 3y_2)x_2 \\ &= (x_1 + x_2)y_1 + (5x_1 + 3x_2)y_2 \leq 5y_1 + 21y_2 \end{aligned}$$

一般的には...



双対定理

- 双対定理

主問題(P) に最適解 (x_1^*, x_2^*) が存在するならば, 双対問題(D) にも最適解 (y_1^*, y_2^*) が存在し, 最適値は等しい, 即ち,

$$4x_1^* + 3x_2^* = 5y_1^* + 21y_2^*$$

が成り立つ

$$\begin{array}{l|l} \text{(P)} & \begin{array}{l} \max. \ 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad \quad 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ \quad \quad x_1, \ x_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{(D)} & \begin{array}{l} \min. \ 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} \quad y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ \quad \quad y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ \quad \quad y_1, \ y_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- 証明略

双対定理

• 相補性定理

主問題(P) と双対問題(D) の実行可能解 (x_1, x_2) , (y_1, y_2) が (P), (D) の最適解であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 5y_2 - 4) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases}, \begin{cases} y_1(5 - x_1 + x_2) = 0 \\ y_2(21 - 5x_1 + 3x_2) = 0 \end{cases}$$

が成立することである.

$$\begin{array}{l|l} \text{(P)} & \begin{array}{l} \max. \quad 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad \quad 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{(D)} & \begin{array}{l} \min. \quad 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} \quad y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ \quad \quad y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ \quad \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

• 証明略

双対理論からの解法の考察

(i) ~ (iii) 全てを満たす
 $(x_1^*, x_2^*), (y_1^*, y_2^*)$
が(主・双対)最適解

• (対称型の)主・双対線形計画問題を解くことは

$$(i) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

主実行可能条件

$$(ii) \quad \begin{cases} y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ y_1 + 3y_2 \geq 3 \end{cases} \quad y_1, y_2 \geq 0$$

双対実行可能条件

$$(iii) \quad \begin{cases} x_1(y_1 + 5y_2 - 4) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y_1(5 - x_1 + x_2) = 0 \\ y_2(21 - 5x_1 + 3x_2) = 0 \end{cases}$$

相補性条件

を満たす解 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ を見つけること.

(主)単体法 (*simplex method*)

(i), (iii)を満たしつつ, (ii)の成立で終了

双対単体法 (*dual simplex method*)

(ii), (iii)を満たしつつ, (i)の成立で終了

(主双対)内点法 (*primal-dual IPM*)

(i), (ii)を満たしつつ, (iii)の成立で終了

注: 反復中
(i), (ii)を満たさないなど
バリエーションがある

一般的には...



演習5:

- 双対定理

- 以下のLPについて, 双対問題を作成し, 弱双対定理が成り立っていることを確認せよ
- また, 単体法により最適解を求め, 双対定理, 相補性定理が成り立っていることを確認せよ

$$\begin{array}{l|l} \text{(P)} & \begin{array}{l} \max. \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 8 \\ \quad \quad 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array} \end{array}$$



参考文献

- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
 - 反町洋一「線形計画法の実際」産業図書(1992)
 - H.P.Williams「数理計画モデルの作成法」産業図書(1995)
 - 大山達雄「最適化モデル分析」日科技連(1993)
 - 福島雅夫「数理計画入門」朝倉書店(1996)
 - 田村明久・村松正和「最適化法」共立出版(2002)
 - 藤田宏・今野浩・田邊國士「最適化法」岩波書店(1994)
 - 小島正和・土谷隆・水野眞治・矢部博「内点法」朝倉書店(2001)
 - 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- 