# 意思決定科学

## ゲーム理論1

堀田　敬介

2017/11/3,Fri.～

## Contents



## ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた．
2人に均等に与えたいのだが，2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い，けんかになる．


仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

## ケーキを仲良く

- **You Cut, I Choose !** (**One divides, the other chooses.**)
  - Bobにケーキを切らせ，Carolにケーキを選ばせる

ただし，これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」！
(Bobにどのように切らせるかの指定はない．Bobは自分の意思で切る)
(Carolにどのように選ばせるかの指定はない．Carolは自分の意思で選ぶ)

- 解は…
  - Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

## ケーキを仲良く

◆「解」が持ってほしい2つの性質

- proportionality (An allocation is proportional.)
  - Each thinks he or she received a portion that has size or value of **at least 1/n**.
- envy-freeness (An allocation is envy-free.)
  - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, **does not envy** any other player.

プレイヤーが2人の場合はこの2つの概念は等価

## ケーキを仲良く（3人いたら？）

H. Steinhaus, 1948

◆ The Steinhaus' **lone-divider procedure** (3 players)

1. Bob がケーキを3分割するように切る（切り方は自由であることに注意）

2-1. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘

2-2. Ted も Carol と同様のことを行う．

（CarolもTedも，少なくとも1つは acceptable であることに注意）

3. case1: Carol (or Ted) が2個以上acceptable cake がある場合

Ted→Carol→Bob (or Carol→Ted→Bob) の順にケーキを取る

case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個の場合

Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて，残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う．

def.) call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least 1/3 of the cake.

## ケーキを仲良く（3人いたら？）

◆ The Steinhaus' **loan-divider procedure** (3 playes)

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
  - Bobはちょうど1/3（とBobが思う）piece に切る
  - Carol, Ted は acceptable cake を取る
- envy-free ではない
  - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが，Carol は Ted を妬む可能性がある．（Tedが，彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので）
  - case2 : Carol, Ted は誰も妬まないが，Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある．（Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合，2人のいずれかが1/3以上（とBobが思う）cake を得るので）

## ケーキを仲良く（n人いたら？）

H.W. Kuhn, 1967

◆ Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes) を n人版に拡張

- Frobenius & Konig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム）
- 4人版は Steinhaus も気づいていたらしい

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

◆ **The Banach-Knaster last-diminisher procedure**

- Steinhaus が 1948年に2人（学生，ポーランド人）のアイデアを論文の形で発表

◆ ……

## ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- The Banach-Knaster **last-diminisher procedure**
  - The partners being ranged **A**,**B**,**C**,…,**N**.
  - **A** cuts from the cake an arbitrary part.
  - **B** has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off.
  - Whatever he does, **C** has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice,
  - and so on up to **N**.
  - The rule obliges the ``**last-diminisher**” to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of , the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake.
  - After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder.

(from ``Fair Division”, p.35 [Steinhaus’ description 1948 p.102])

## ケーキを仲良く

- The last-dimisher procedure
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - 切るプレイヤーがちょうど1/nと考えるpiece に切ること
  - **envy-freeではない**
    - 理由：例えば，ゲームを先に抜けたプレイヤーAが，ある段階で切られたケーキが1/nより大きい（とAが思う）ときでもそれを阻止できない．結果として1/nより大きいケーキが誰か（例えばB）に行く（とAが思う）ので，AはBを妬む．

## ゲーム理論とは何か？

- ゲーム的状況　game situations
  - 複数の意思決定主体（プレイヤー）が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ゲーム理論　game theory
  - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

**John von Neumann (1903-1957)**
**2004年11月9日（火）取得の情報**

## ゲーム理論とは何か？

- プレイヤー　player
  - 意思決定し，行動する主体．（2人，3人，…，n人，…，∞）
    - 例：個人，複数の個人から成る組織，政党，国家，…

プレイヤーの集合
$N=\{1, 2, \ldots, n\}$

- 戦略　strategy
  - プレイヤーが取りうる行動．（有限，無限）

プレイヤー$i$の戦略集合
$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\} \quad (i \in N)$

- 利得と利得関数　payoff
  - 各プレイヤーの戦略決定後，ゲームは終了し，結果が出る．結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値．利得 payoff，効用 utility.

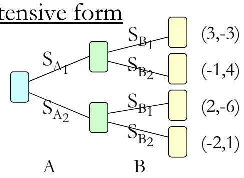
プレイヤー$i$の利得関数
$f_i : S_1 \times S_2 \ldots \times S_n \to R \quad (i \in N)$

ゲームの定義
$$G=(N,\{S_i\}_{i \in N},\{f_i\}_{i \in N})$$

各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し，
$G$は全てのプレイヤーの共有知識とする

## ゲーム理論とは何か？

- ゲームの表現形式
  - 展開形　extensive form




  - 戦略形　strategic form，標準形　normal form

| A＼B | $S_{B_1}$ | $S_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $S_{A_1}$ | (3,-3) | (-1,4) |
| $S_{A_2}$ | (2,-6) | (-2,1) |

## ゲーム理論とは何か？

- 非協力ゲームと協力ゲーム
  - 各プレイヤーの戦略決定における前提

1. プレイヤー間には，各プレイヤーがとるべき戦略について，強制力のある取り決めは存在しない．

   拘束的合意が成立しない → 非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に，とるべき戦略についての合意が成り立ち，それに基づいて戦略決定する．

   拘束的合意が成立 → 協力ゲーム

## ゲーム理論とは何か？

出展：「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 例）喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中
  - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は，A=600人，B=300人
  - 両店舗が別々の地域に出店すると，見込み客を全て獲得できる
  - 両店舗が同じ地域に出店すると，スタボがダタールの2倍の客を獲得
  - 同時にどちらか1地域に必ず出店（両方出店や出店中止はない）
- 問：ダタールはどちらに出店すべきか？　またそれは何故か？

| ダタ＼スタ | A地域 | B地域 |
|---|---|---|
| A地域 | (200,400) | (600,300) |
| B地域 | (300,600) | (100,200) |

- 検討
  - マキシミン基準（悲観的意思決定基準）　→ A地域へ出店せよ
  - マキシマックス基準（楽観的意思決定基準）→ A地域へ出店せよ
  - ラプラス基準（平均値）　→ A地域へ出店せよ
  - ゲーム理論による解答　→ B地域へ出店せよ

「1人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用であるゲーム」では解が異なる！

## 2人非協力零和ゲーム

## 2人非協力零和ゲーム

◆ Example1 :

- 2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」をしている
- プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う
- 2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち，異なるならBさんの勝ち
- 表を出して勝ったら相手から2円貰い，裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$N=\{1, 2\}$

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}$, $(i\in N)$

$S_1$ ={表, 裏}, $S_2$ ={表, 裏}

$f_i : S_1 \times S_2 \to R$, $(i\in N)$

$f_1$(表, 表) = 2 + $f_2$(表, 表) = -2 =0
$f_1$(表, 裏) = -1 + $f_2$(表, 裏) = 1 =0
$f_1$(裏, 表) = -2 + $f_2$(裏, 表) = 2 =0
$f_1$(裏, 裏) = 1 + $f_2$(裏, 裏) = -1 =0

A君の利得表

| A＼B | 表 | 裏 |
|---|---|---|
| 表 | 2 | -1 |
| 裏 | -2 | 1 |

Bさんの利得表

| A＼B | 表 | 裏 |
|---|---|---|
| 表 | -2 | 1 |
| 裏 | 2 | -1 |

2人の利得表

| A＼B | 表 | 裏 |
|---|---|---|
| 表 | (2,-2) | (-1,1) |
| 裏 | (-2,2) | (1,-1) |

## 2人非協力零和ゲーム

◆ Example2 :

- A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

## 2人非協力零和ゲーム

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAの思考　最大化プレイヤー
  - 戦略$s_{A_1}$を取ったときの最悪の事態は
    min(-2, 4, -1) = -2 (プレイヤーBが戦略$s_{B_1}$を取る)
  - 戦略$s_{A_2}$を取ったときの最悪の事態は
    min(2, 2, 1) = 1 (プレイヤーBが戦略$s_{B_3}$を取る)
  - 戦略$s_{A_3}$を取ったときの最悪の事態は
    min(4, -3, 0) = -3 (プレイヤーBが戦略$s_{B_2}$を取る)

⇒ 戦略$s_{A_2}$を取る（最悪でも利得1が保証される）

もっと良い利得を得ることができるのか？

## 2人非協力零和ゲーム

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAがBの立場で思考
  - Bが戦略$s_{B_1}$を取ったとき，Aである自分は戦略$s_{A_3}$を取る
    max(-2, 2, 4) = 4
  - Bが戦略$s_{B_2}$を取ったとき，Aである自分は戦略$s_{A_1}$を取る
    max(4, 2, -3) = 4
  - Bが戦略$s_{B_3}$を取ったとき，Aである自分は戦略$s_{A_2}$を取る
    max(-1, 1, 0) = 1

⇒ 戦略$s_{B_3}$を取る（最悪でも損失1で済む）

Aは戦略$s_{A_2}$を取るとき，利得1を得られ，
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる．

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス原理
  - Example2:

保証水準 security level

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | min | max |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 | -2 | |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 | -3 | |
| max | 4 | 4 | 1 | | |
| min | 1 | | | | |

保証水準 security level

マキシミン値 maximin value

$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

マキシミン原理 maximin principle 〔最大化プレイヤーの行動原理〕

ミニマックス値 minimax value

$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス原理 minimax principle 〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$v_1 = v_2$

## 2人非協力零和ゲーム

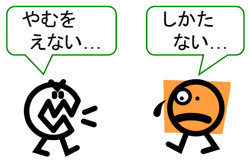
| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -2 | 4 | -1 |
| $s_{A_2}$ | 2 | 2 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 4 | -3 | 0 |

- 均衡点とゲームの値
  - 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると，どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！

何らかの意味での均衡に到達

$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$




2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

$(s_{A_2}{}^*, s_{B_3}{}^*)$：ゲームの均衡点 equilibrium point

## 演習1：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？（1），（2）それぞれのゲームについて考えよ

（1）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 | -1 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 0 | 2 |
| $s_{A_3}$ | 5 | 2 | 3 |

（2）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 5 | 6 | 4 |
| $s_{A_2}$ | 1 | 8 | 2 |
| $s_{A_3}$ | 7 | 2 | 3 |

## 2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3:
    - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

## 2人非協力零和ゲーム

### ◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | min | max |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 | -4 | |
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 | -3 | |
| max | 4 | 3 | 2 | | |
| min | 2 | | | | |

マキシミン戦略

$$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

## 2人非協力零和ゲーム

### ◆ 純粋戦略と混合戦略

- **Proposition1**

  利得行列A=[$a_{ij}$]が与えられた時，以下が成り立つ

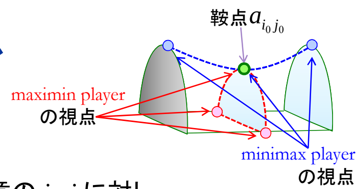
  $$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

⇩

いかなる場合に均衡点が存在し，
ゲームが厳密に確定的であるか？

## 2人非協力零和ゲーム




### ◆ 純粋戦略と混合戦略

- 鞍点 saddle point
  - 行列A=[$a_{ij}$]において，任意の $i$，$j$ に対し，

$$\boxed{a_{ij_0} \le \boxed{a_{i_0 j_0}}} \le a_{i_0 j}$$

が成り立つとき，($i_0, j_0$)をこの行列の鞍点といい，$a_{i_0 j_0}$を鞍点値という．

$\boxed{a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0}}$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j_0} & a_{1n} \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 j_0} & a_{i_0 n} \\ a_{m1} & a_{mj_0} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boxed{a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}}$

## 2人非協力零和ゲーム

### ◆ 純粋戦略と混合戦略

- **Theorem1**
  - (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は，その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること．またこのとき，鞍点が均衡点．

- 最適戦略　optimal strategy
  - 均衡点($i^*, j^*$)は鞍点なので，プレイヤーAが戦略 $i^*$ を用いると，プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ，また，Bが戦略 $j^*$ を取る限り，Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない．

⇨ 戦略 $i^*$ がAの最適戦略

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- **Theorem2**
  - 厳密に確定的な零和ゲームにおいて，均衡点が複数ある場合，各均衡点の値は等しい．また，$(i^*, j^*)$, $(i_0, j_0)$ が均衡点ならば，$(i^*, j_0)$, $(i_0, j^*)$も均衡点である．

均衡戦略は交換可能

$$\begin{array}{c|cc} & j_0 & j^* \\ \hline i_0 & a_{i_0 j_0} & a_{i_0 j^*} \\ i^* & a_{i^* j_0} & a_{i^* j^*} \end{array}$$

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

⇒ 主体的な賭，最適な賭の確率

⇒ 期待効用原理

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

- Example3：

$q_j \geq 0, (j = 1,2,3)$

$q_1 + q_2 + q_3 = 1$

$p_i \geq 0, (i = 1,2,3)$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

混合戦略 <u>mixed</u> strategy

純粋戦略 <u>pure</u> strategy

## 2人非協力零和ゲーム

### 純粋戦略と混合戦略

| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

- Example3：
  - player Aの期待効用（player A = 期待効用最大化プレイヤー = **maximin player**）

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_1} \text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = \ \ 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_2} \text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = \qquad\quad p_2 + 2p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_3} \text{の時の期待効用} \end{cases}$$

  - player Bの期待損失（player B = 期待損失最小化プレイヤー = **minimax player**）

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = -4q_1 + 2q_2 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_1} \text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = \ \ 4q_1 + 3q_2 + q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_2} \text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q}) = \quad q_1 - 3q_2 + 2q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_3} \text{の時の期待損失} \end{cases}$$

補足：A, Bが各々混合戦略$(p_1,p_2,p_3)$, $(q_1,q_2,q_3)$のとき

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3 \end{cases}$$

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

## 2人非協力零和ゲーム

- 戦略の支配
  - Example3:

| | | A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 被支配戦略 | → | $s_{A_1}$ | -4 | 2 | 0 |
| 支配戦略 | → | $s_{A_2}$ | 4 | 3 | 1 |
| | | $s_{A_3}$ | 1 | -3 | 2 |

支配する dominate

**戦略の支配** domination of strategies
プレイヤー i の戦略 h, k について,
戦略 h が戦略 k を支配するとは,
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して,
$$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$$
が成立すること.

- =だと「同等」
- ≧かつ≠ だと「弱支配」

補足）通常は, 被弱支配戦略は除去しない→ 共有地の悲劇

**被支配戦略除去の原理**
「支配される戦略は用いない」

| A＼B | $s_{B_1}$ | | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_{A_2}$ | 4 | > | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | 1 | > | -3 | 2 |

| A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

補足：被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ **ゲームは支配可解** dominance solvable

## 2人非協力零和ゲーム

| | | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

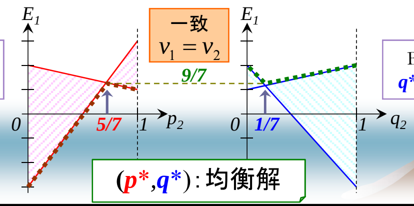
- 最適混合戦略
  - Example3:
    - player A = 期待効用最大化プレイヤー = **maximin player**

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p},(1,0)) = 6p_2 - 3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_2} \text{の時の期待効用} \\ E(\boldsymbol{p},(0,1)) = -p_2 + 2 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_3} \text{の時の期待効用} \end{cases}$$

    - player B = 期待損失最小化プレイヤー = **minimax player**

$$\begin{cases} E((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_2 + 1 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_2} \text{の時の期待損失} \\ E((0,1),\boldsymbol{q}) = -5q_2 + 2 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_3} \text{の時の期待損失} \end{cases}$$

Aの最適戦略
$p^*=(0, 5/7, 2/7)$



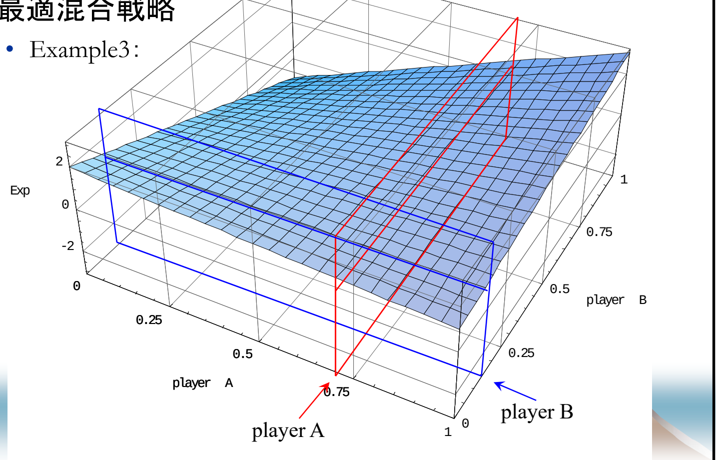

Bの最適戦略
$q^*=( 0, 1/7, 6/7)$

$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ : 均衡解

## 2人非協力零和ゲーム

- 最適混合戦略
  - Example3:

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ &= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\ &= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2) \end{aligned}$$
$$\left[ = \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right]$$



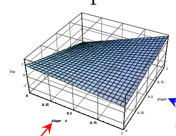

player A

player B

## 2人非協力零和ゲーム

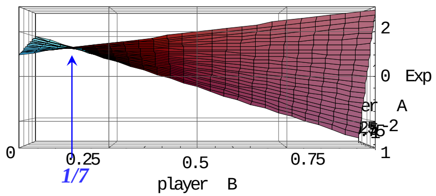
| | | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

- 最適混合戦略
  - Example3:

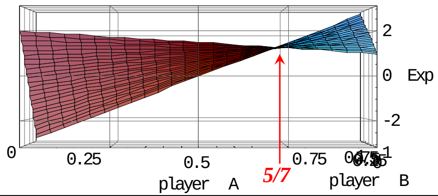


player A
maximin player

player B
minimax player




1/7




5/7

## 2人非協力零和ゲーム

| | | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 3 | 1 |
| $p_3$ | $s_{A_3}$ | -3 | 2 |

- 混合戦略の意味
  - $p^*,q^*$ の確率のくじをつくって，引いていずれかに決する方法が，なぜ合理的な決定方法なのか？

    Aの最適戦略 $p^*=(0, 5/7, 2/7)$　Bの最適戦略 $q^*=(0, 1/7, 6/7)$
  - player A は $s_{A_2}$なら 3，$s_{A_3}$なら 2 が望ましいが，$p_2^*q_3^*+p_3^*q_2^*=32/49$ の確率で望ましくない結果になる．

    しかし，これは事後的


  - このような状況も全て考慮に入れた上で，最適戦略が決定された！

## 演習2:

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 4 | -2 |
| $s_{A_2}$ | -3 | 3 |

（2）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 5 |

（3）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | $s_{B_4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 | 3 | 4 |
| $s_{A_2}$ | 4 | 4 | 2 | 3 |
| $s_{A_3}$ | 2 | 3 | 1 | 2 |

（4）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ |
|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 2 | 4 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 3 | 0 |
| $s_{A_3}$ | 2 | 1 | -2 |

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーA, Bの純粋戦略

    $S_A=\{s_{A_i}\mid i=1,\ \ ,m\},\ S_B=\{s_{B_j}\mid j=1,\ \ ,n\}$
  - プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）

    $$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

    **利得関数**

    $$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}^T A\boldsymbol{q}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j$$
  - プレイヤーA, Bの混合戦略

    $$\boldsymbol{p}=(p_1,\ \ ,p_m) \longrightarrow s_{A_i}=(0,\ \ ,1,\ \ ,0)$$
    $$\begin{cases} p_1+\ \ +p_m=1 \\ p_1,\ \ ,p_m\geq 0, \end{cases}$$

    $$\boldsymbol{q}=(q_1,\ \ ,q_n) \longrightarrow s_{B_j}=(0,\ \ ,1,\ \ ,0)$$
    $$\begin{cases} q_1+\ \ +q_n=1 \\ q_1,\ \ ,q_n\geq 0 \end{cases}$$

## 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーAの保証水準

    $$\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_1=\max_{\boldsymbol{p}}\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

    $\boldsymbol{p}$ を操作して期待利得最大
  - プレイヤーBの保証水準

    $$\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_2=\min_{\boldsymbol{q}}\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

    $\boldsymbol{q}$ を操作して期待損失最小
  - **Proposition2**

    $$\max_{\boldsymbol{p}}\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\leq\min_{\boldsymbol{q}}\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

## 2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

- **Theorem3**

$$\max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

また，これを成立させる戦略の組($\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$)を**均衡点**といい，均衡点における利得 $v(\mathbf{A})$ をゲームの値という．

$$v(\mathbf{A}) := \mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{q}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

- **Theorem4**

戦略の組($\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$)が均衡点であるための必要十分条件は，($\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$)が関数 $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ の**鞍点**であること．即ち，

$$\forall \mathbf{p},\mathbf{q},\quad \underline{E(\mathbf{p},\mathbf{q}^*) \le E(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)} \le E(\mathbf{p}^*,\mathbf{q})$$

が成立すること．

Bが$q^*$の時，Aは$p^*$にするのが**利得最大**

Aが$p^*$の時，Bは$q^*$にするのが**損失最小**

## 2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- **Theorem5**

$v(\mathbf{A})$ がゲームの値，($\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$)が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j,\quad E(s_{A_i},\mathbf{q}^*) \le E(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \le E(\mathbf{p}^*,s_{B_j})$$

が成立すること．

$$\forall i = 1,\ \ ,m,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le E(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*)$$

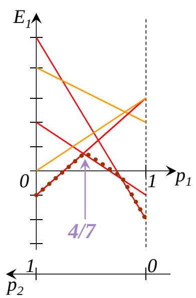
$$\forall j = 1,\ \ ,n,\quad E(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$$

## 2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- Example4

| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | $s_{B_4}$ | $s_{B_5}$ |
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | -2 | -1 | < 2 | 3 | ≦ 3 |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | 5 | 2 | < 4 | -1 | ≦ 0 |
| | $s_{A_3}$ | 4 | 1 | 3 | -2 | -1 |




$$E(\mathbf{p},s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$$
$$\cancel{E(\mathbf{p},s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2}$$
$$E(\mathbf{p},s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$$
$$E(\mathbf{p},s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$$
$$\cancel{E(\mathbf{p},s_{B_5}) = 3p_1}$$

$$\mathbf{p}^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0)$$

## 2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- Example5：一般の2×2ゲーム

| | | $q_1$ | $q_2$ |
|---|---|---|---|
| | A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
| $p_1$ | $s_{A_1}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $p_2$ | $s_{A_2}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

鞍点が存在すればそれが**均衡点**．なければ，混合戦略を考えるが，このとき，必ず $E(\mathbf{p},s_{B_1})$ と $E(\mathbf{p},s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1},\mathbf{q})$ と $E(s_{A_2},\mathbf{q})$ は交点を持つ．

$$\begin{cases} E(\mathbf{p},s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(\mathbf{p},s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} E(s_{A_1}\mathbf{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}\mathbf{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

**均衡点**

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}, \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}\right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}+a_{22}-a_{21}}, \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}+a_{22}-a_{21}}\right)$$

## 演習3:

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 4 | -2 |
| $s_{A_2}$ | -3 | 3 |

（2）

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ |
|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 3 | 1 |
| $s_{A_2}$ | -1 | 5 |

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーAの利得行列と混合戦略 $\boldsymbol{p}$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \quad\vdots \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

まとめると…

$$\begin{array}{ll} \max. & u \\ s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \quad\vdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{array}$$

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min \{E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}), E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\boldsymbol{p}, s_{B_n})\}$$

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーBの損失行列（Aの利得行列）と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$\begin{array}{cccc} q_1 & q_m & \cdots & q_n \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \quad\vdots \\ E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \end{cases}$$

まとめると…

$$\begin{array}{ll} \min. & w \\ s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \quad\vdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{array}$$

$$\min_{\boldsymbol{q}} \max \{E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}), E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}), \cdots, E(s_{A_m}, \boldsymbol{q})\}$$

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題（LPの主問題：**P**）　主・双対　プレイヤーBの最適化問題（LPの双対問題：**D**）

$$\begin{array}{ll} \max. & u \\ s.t. & a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ & a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ & \quad\vdots \\ & a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ & p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ & p_1, \cdots, p_m \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min. & w \\ s.t. & a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ & \quad\vdots \\ & a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ & q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{array}$$

注）(**P**)(**D**)ともに自明解($\boldsymbol{p}$=(1,0,…,0), $\boldsymbol{q}$=(1,0,…,0))があるので実行可能．
→双対定理より，最適解が存在し，最適値は一致する

**Theorem6**
(P)，(D)の最適解が($\boldsymbol{p}^*$, $u^*$)，($\boldsymbol{q}^*$, $w^*$)のとき，($\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$)がゲームの均衡点であり，$v := u^* = w^*$がゲームの値である

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

| A＼B | | | | min | max |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 2 | -7 | -7 | -2 |
| | -2 | 0 | 4 | -2 | |
| | 7 | -4 | 0 | -4 | |
| max | 7 | 2 | 4 | | |
| min | 2 | | | | |

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

## 2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

| | A＼B | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
| $p_1$ | | 0 | 2 | -7 |
| $p_2$ | | -2 | 0 | 4 |
| $p_3$ | | 7 | -4 | 0 |

$$\begin{array}{lrl} \max . u & & \\ s.t. & -2p_2 + 7p_3 & \geq u \\ & 2p_1 - 4p_3 & \geq u \\ & -7p_1 + 4p_2 & \geq u \\ & p_1 + p_2 + p_3 & = 1 \\ & p_1, \quad p_2, \quad p_3 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \min . w & & \\ s.t. & 2q_2 - 7q_3 & \leq w \\ & -2q_1 + 4q_3 & \leq w \\ & 7q_1 - 4q_2 & \leq w \\ & q_1 + q_2 + q_3 & = 1 \\ & q_1, \quad q_2, \quad q_3 & \geq 0 \end{array}$$

自己双対線形計画問題
**self-dual LP**

$(p_1^*, p_2^*, p_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)$, $u^*=0$
$(q_1^*, q_2^*, q_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)$, $w^*=0$

## 演習4：

- LPによる均衡解の求解
  - 2人のプレイヤーA, Bは，プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）が以下で与えられるゲームをする．各プレイヤーの問題をLPで表し，均衡解とゲームの値を求めよ．

| A＼B | $s_{B_1}$ | $s_{B_2}$ | $s_{B_3}$ | $s_{B_4}$ | $s_{B_5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_{A_1}$ | 1 | 5 | -2 | -4 | 3 |
| $s_{A_2}$ | 4 | -1 | 3 | 2 | -7 |
| $s_{A_3}$ | -4 | 3 | 6 | -2 | 2 |
| $s_{A_4}$ | 1 | 6 | -4 | 3 | -3 |
| $s_{A_5}$ | -3 | -6 | 4 | 5 | 1 |

## 参考文献


- S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division”, Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981,2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2008）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣（2000）
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2001）
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版（2003）
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房（2005）
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）