2017/10/24 Tue.

問題解決技法入門

2. Graph Theory
2. 最短経路探索

堀田 敬介

問題解決とは？

➢ 問題発見･問題解決から意思決定まで

問題の見直し
問題の本質を再考

モデルの妥当性評価
現実との乖離の検証

問題 ⇄ モデル化 → 解く → 解釈･評価 → 提案･解決

問題発見
➢ 目的の明確化
➢ 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈･評価
代替案評価･選択

意思決定

問題の定義

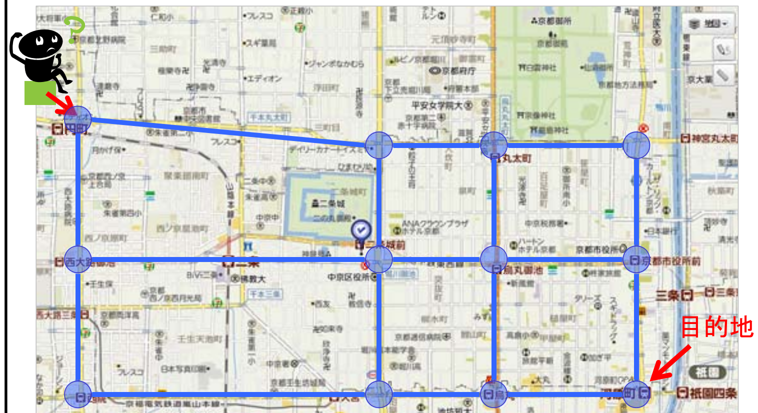
目標（あるべき姿） ⇦※到達可能な目標

⇕･･･ギャップ＝ 問題

現　状

ルート探索

今，円町の交差点にいる．河原町の交差点まで，車で大通りのみを選んで通り，目的地までたどり着きたい．どの経路（ルート）を通るのがよいか？



map : Yahoo!Japan地図　京都周辺

問題解決とは？

➢ 問題発見･問題解決から意思決定まで

問題の見直し
問題の本質を再考

モデルの妥当性評価
現実との乖離の検証

問題 ⇄ モデル化 → 解く → 解釈･評価 → 提案･解決

問題発見
➢ 目的の明確化
➢ 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈･評価
代替案評価･選択

意思決定

② グラフによるモデル
現実問題の抽象化

①
目的：最短経路を求める

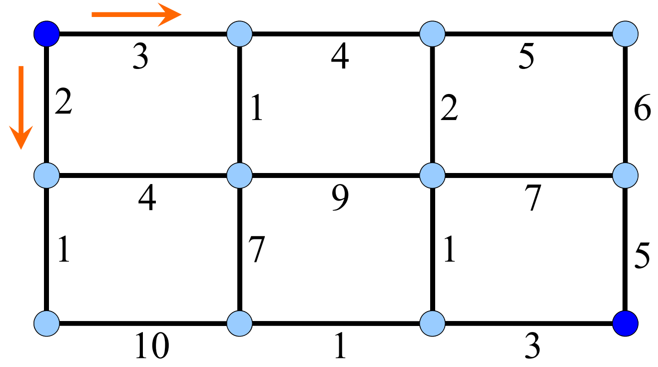
現状：データが与えられている
　　最短経路が求まっていない

解く：どうやって解くか？

youtube
[erato お姉さん]で検索

全ての経路を調べ，
その中から最も短い経路を選べば良い！
〔素朴で素直な方法＝全列挙，しらみつぶし〕

何通りあるか
お姉さんに聞
いてみよう！



難しいなら易しくすればいいのさ！

OR的問題解決のヒント
問題を簡単にする！
問題の一部だけを考える
条件を付加して易しくする

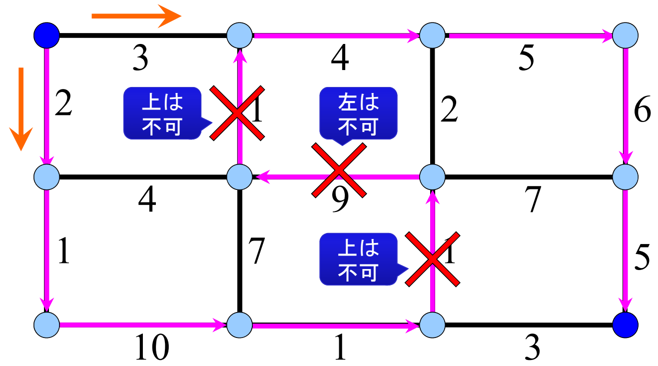
ここだけで考えて上手くいけば，
全体に広げられるかも！

全てのネットワーク上の最短路問題

制限した問題
- 格子状のネットワーク
- 出発地：左上点，目的地：右下点
- 移動は右・下方向へのみ

難しいなら易しくすればいいのさ！

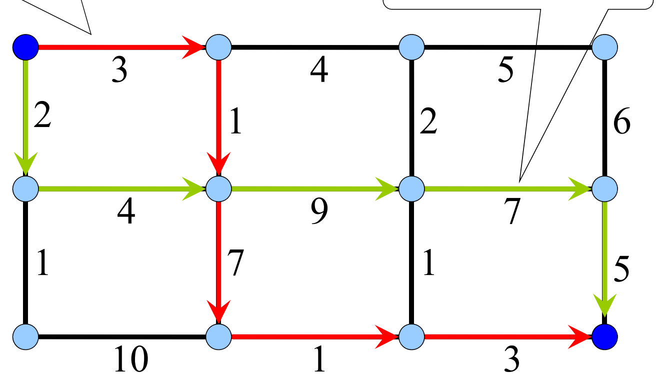
制限した問題
- 格子状のネットワーク
- 出発地：左上点，目的地：右下点
- 移動は右・下方向へのみ



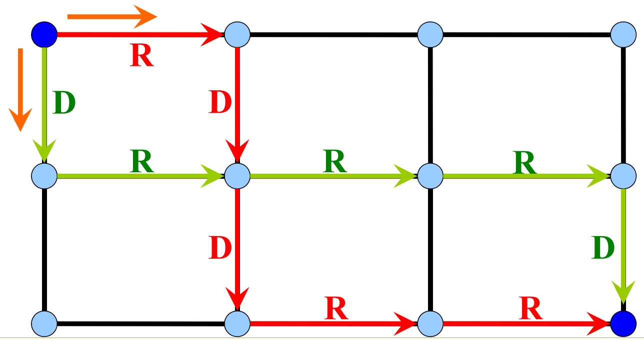
難しいなら易しくすればいいのさ！

3+1+7+1+3 = **15**

2+4+9+7+5 = **27**



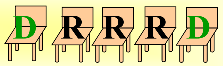
さて，経路は全部で幾つあるのか？



Point: どんな経路も，順番を無視すれば，R=3回，D=2回使う

緑の経路＝DRRRD

赤の経路＝RDDRR



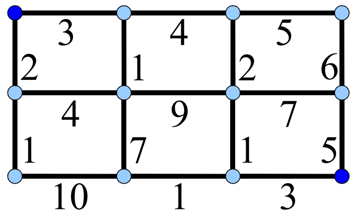
$=\frac{(R+D)!}{R!D!}$通り

i.e., (R+D)の椅子へのDの座らせ方を決めれば良い→ ${}_{R+D}C_D$

例では ${}_{3+2}C_2$= 10 通り

演習：やってみよう！全列挙

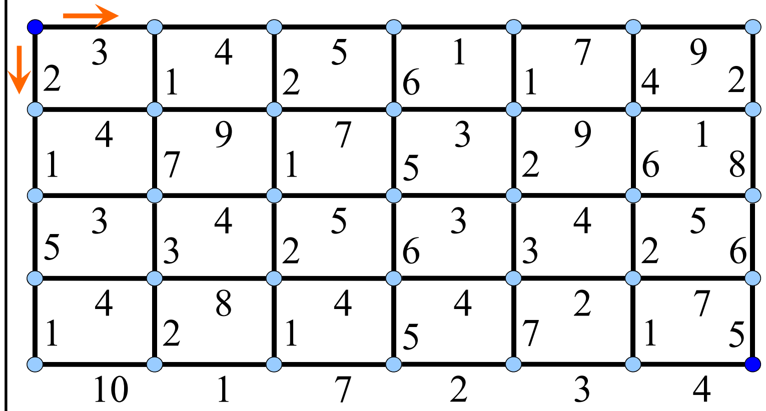
- **Q**: スタート（左上）からゴール（右下）へと至る最短経路を求めなさい．そしてそれが最短だと示しなさい



① **DDRRR:** 2+1+10+1+3=17
② **DRDRR:** 2+4+7+1+3=17
③ **DRRDR:** 2+4+9+1+3=19
④ **DRRRD:** 2+4+9+7+5=27
⑤ **RDDRR:** 3+1+7+1+3=15
⑥ **RDRDR:** 3+1+9+1+3=17
⑦ **RDRRD:** 3+1+9+7+5=25
⑧ **RRDDR:** 3+4+2+1+3=13
⑨ **RRDRD:** 3+4+2+7+5=21
⑩ **RRRDD:** 3+4+5+6+5=23

- **A**: 全列挙したよ ①～⑩の10通り計算し⑧が最短だ！

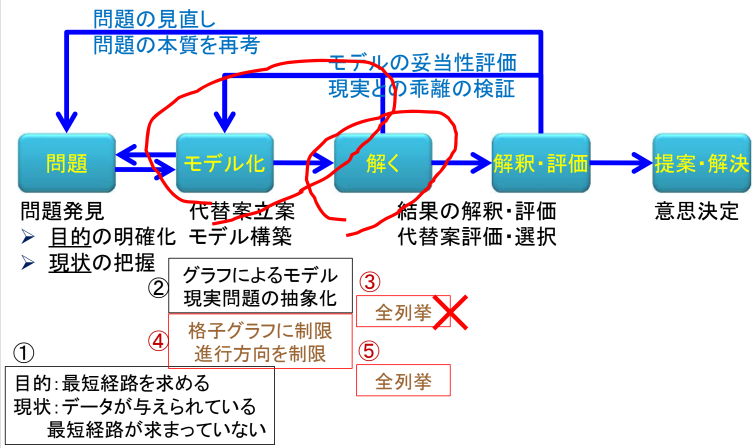
経路は全部で幾つ？



R=6, D=4なので，${}_{6+4}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$ = 210 通り

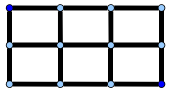
問題解決とは？

- 問題発見･問題解決から意思決定まで



経路は全部で幾つ？【全列挙】

R（横）	D（縦）	全経路
3	2	10
6	4	210
10	5	3,003
20	10	30,045,015
50	50	1.0×10^{29}
100	100	9.1×10^{58}
500	500	2.7×10^{299}
1000	1000	#NUM!



【格子道路の街】
cf.京都市,札幌市
R, D幾つぐらい？

経路は全部で幾つ？【全列挙】

経路がとてもたくさんあるとは言っても，今のコンピュータは
かなりの速さで計算できるんでしょ？　だから大丈夫だよね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
  - Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2GFLOPS** …1秒間に約**512億**回
  - PS3 : **218GFLOPS** …1秒間に約**2180億**回
  - PS4 : **1.84TFLOPS** …1秒間に約**1兆8400億**回
  - 京 : **10.51PFLOPS** …1秒間に約**1京510兆**回
    （※2011年6月, 11月世界最速！　by Top500.org ）
    （※2012年6月=2位，11 月=3位，2013年6月=4位，11月=4位）

〔Wikipedia「FLOPS」より〕
2013/5/1の情報

※**FLOPS = *FLoating-point Operations Per Second***

1つの経路を見つけ，その総コストを計算するのに，たどる経路枝数の浮動小数点演算でできると仮定しよう

例えば，R=10, D=5の経路なら，10+5回の演算で計算可と仮定するということ

K（キロ）≃ × 10^3=千倍
M（メガ）≃ × 10^6=百万倍
G（ギガ）≃ × 10^9=10億倍
T（テラ）≃ × 10^{12}=1兆倍
P（ペタ）≃ × 10^{15}=千兆倍
E（エクサ）≃ × 10^{18}=百京倍

経路は全部で幾つ？【全列挙】

R（横）	D（縦）	全経路	PS4 (1.84TFLOPS)	京 (10.51PFLOPS)
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000000 秒
6	4	210	0.000000001 秒	0.000000000 秒
10	5	3,003	0.000000024 秒	0.000000000 秒
20	10	30,045,015	0.000489864 秒	0.000000086 秒
25	25	1.3×10^{14}	57 分	0.601382523 秒
30	30	1.2×10^{17}	45 日	11 分
40	40	1.1×10^{23}	148,219 年	26 年
50	50	1.0×10^{29}	1.7×10^{11} 年	30,439,996 年
100	100	9.1×10^{58}	2.3×10^{31} 宙齢	4.0×10^{27} 宙齢
500	500	2.7×10^{299}	3.4×10^{272} 宙齢	5.9×10^{268} 宙齢

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら，全列挙（しらみつぶし）では答えを求めることが出来ない！

＃1宙齢＝138億年

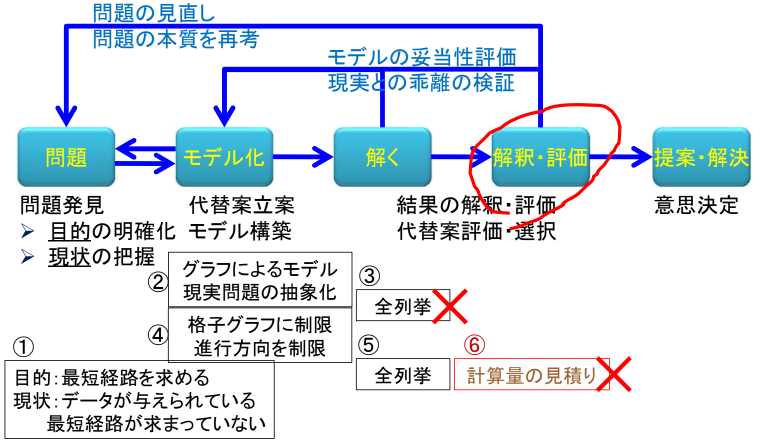
参考：大きい数を表す接頭辞

- 万（まん）　× 10^4
- 億（おく）　× 10^8
- 兆（ちょう）　× 10^{12}
- 京（けい）　× 10^{16}
- 垓（がい）　× 10^{20}
- 杼（じょ）　× 10^{24}
- 穣（じょう）　× 10^{28}
- 溝（こう）　× 10^{32}
- 澗（かん）　× 10^{36}
- 正（せい）　× 10^{40}
- 載（さい）　× 10^{44}
- 極（ごく）　× 10^{48}
- 恒河沙（ごうがしゃ）　× 10^{52}
- 阿僧祇（あそうぎ）　× 10^{56}
- 那由他（なゆた）　× 10^{60}
- 不可思議（ふかしぎ）　× 10^{64}
- 無量大数（むりょうたいすう）　× 10^{68}

【注】「杼」は正しくは「のぎへん」（らしい）
【注】「無量大数」は「無限大∞」とは違う

問題解決とは？

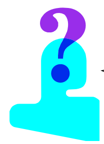
- 問題発見・問題解決から意思決定まで



ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
  - 全経路をしらみつぶしに調べて，最も短い経路を見つける方法

時間が掛かり過ぎ



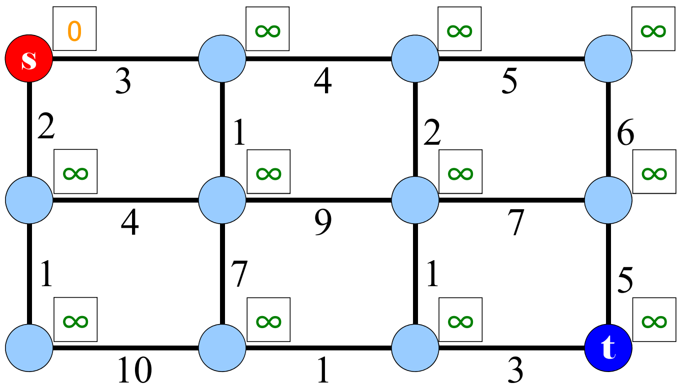
全経路をしらみつぶしに調べずに，最も短い経路を，現実的時間で見つける方法があるか？

Dijkstra法
（ダイクストラ法）

人間の創造的な仕事！

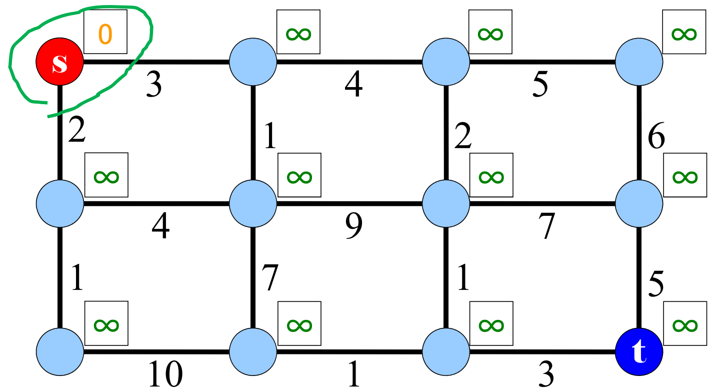
Dijkstra法（初期設定）

step0: start点 s のラベルを0にし，その他のラベルを∞に設定する．未確定点集合 {s,1,2,...,t}(=V) とする



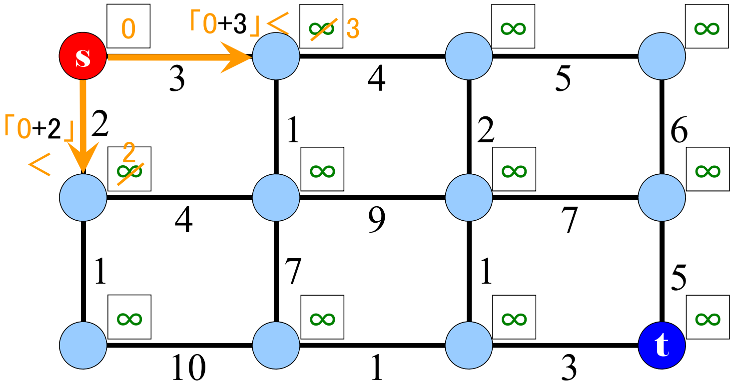
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

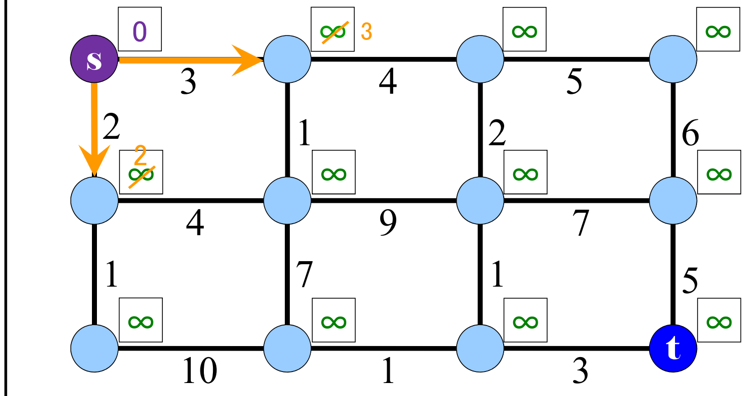
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（＜）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，
枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

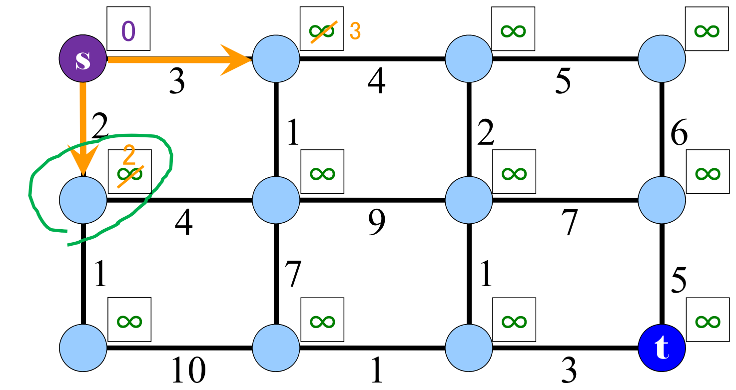
step1-3: その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



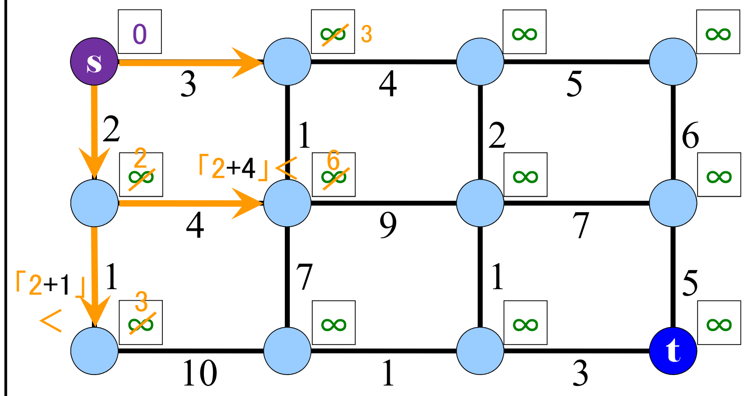
Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

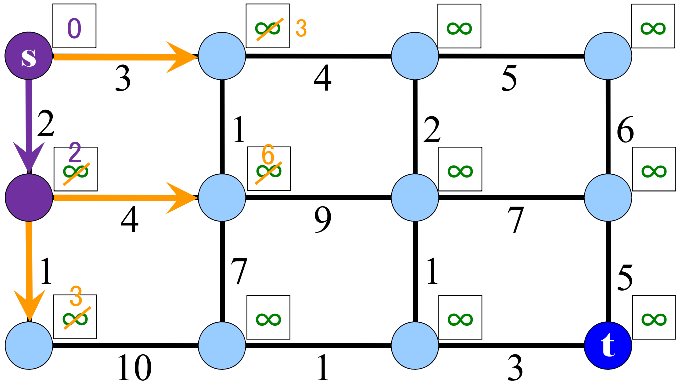
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（＜）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，
枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

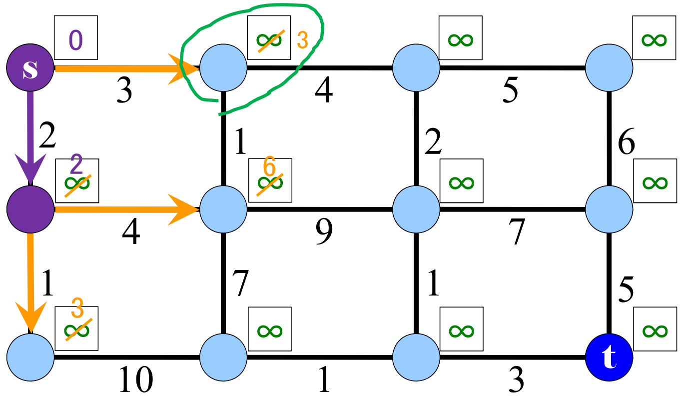
step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



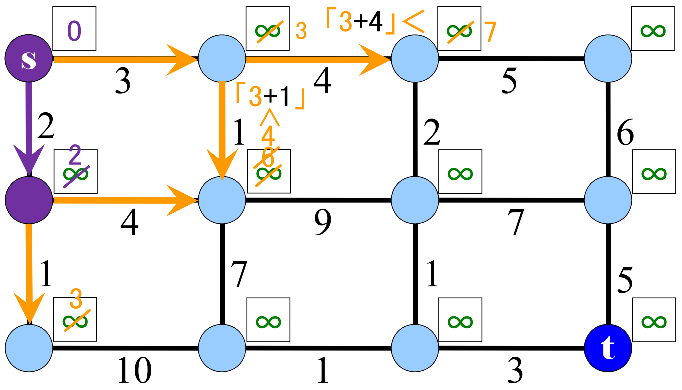
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

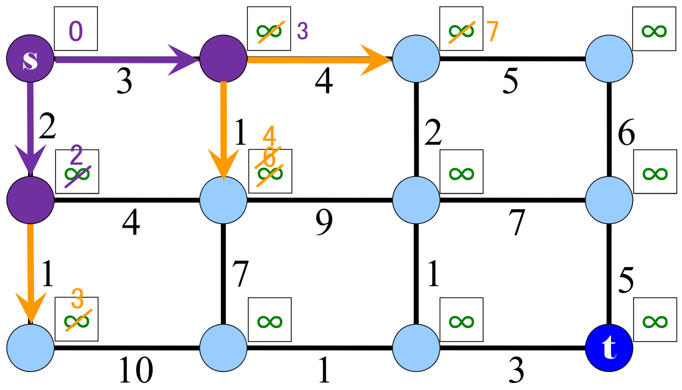
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（＜）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

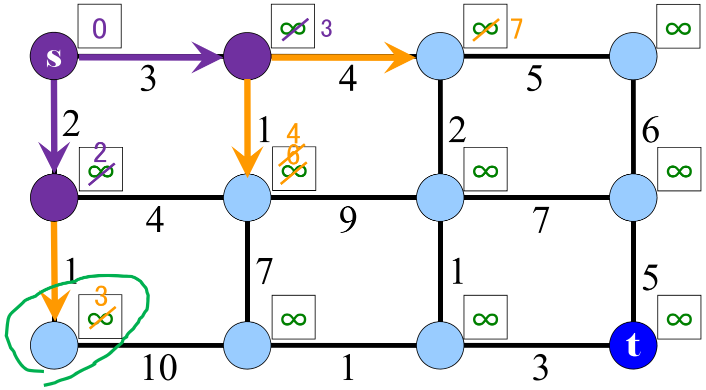
step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



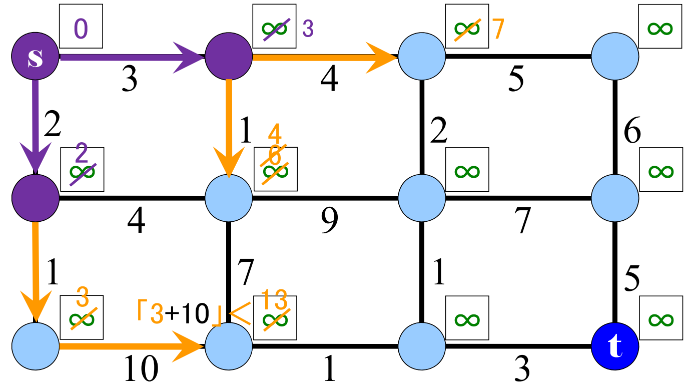
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，もし，小さい（<）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない

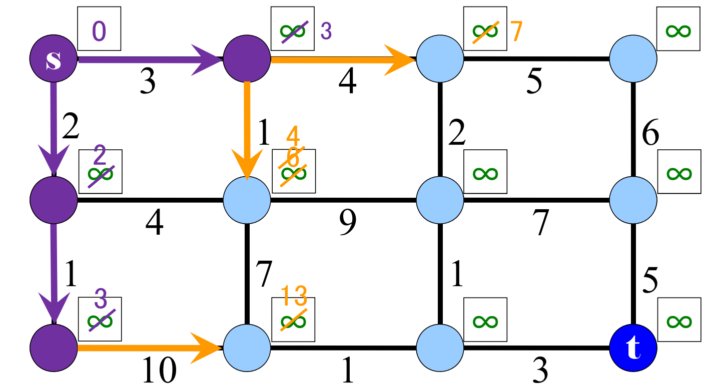


Dijkstra法（更新法）

step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去

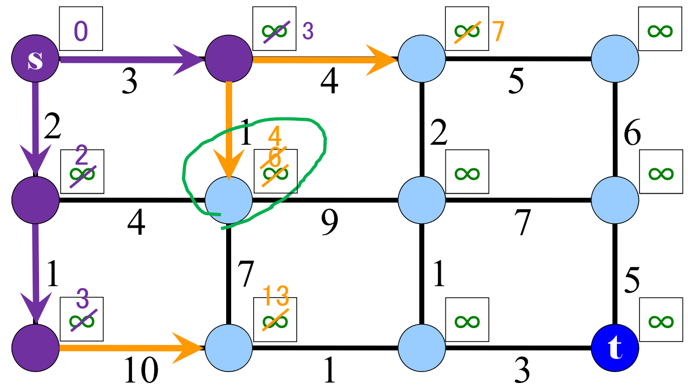
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



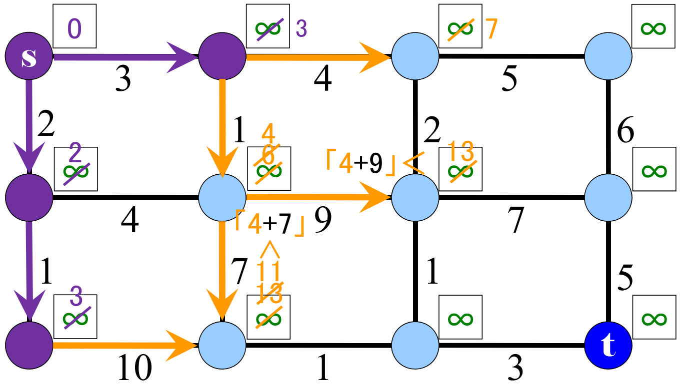
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

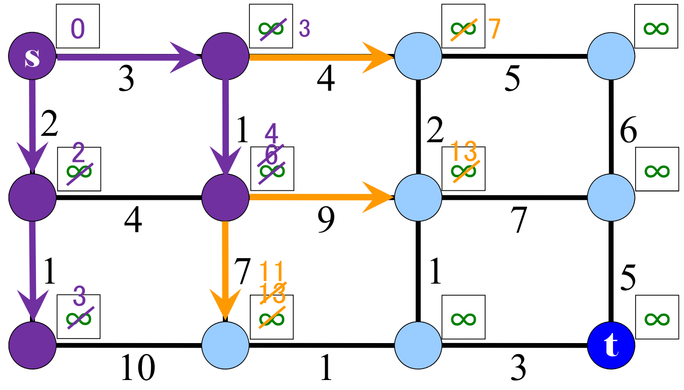
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（<）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

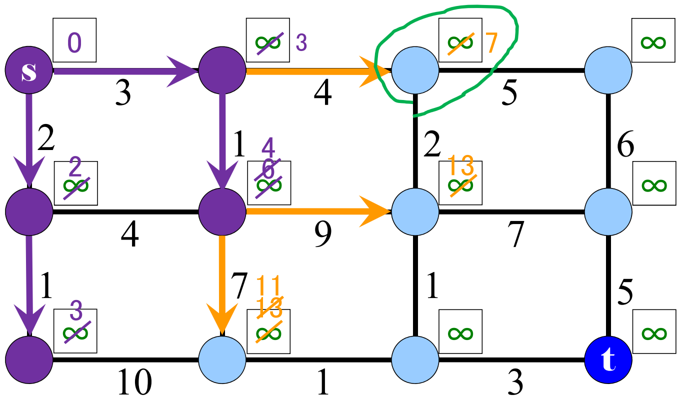
step1-3: その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降**step1-1**～**step1-3**を終了条件を満たすまで繰り返す



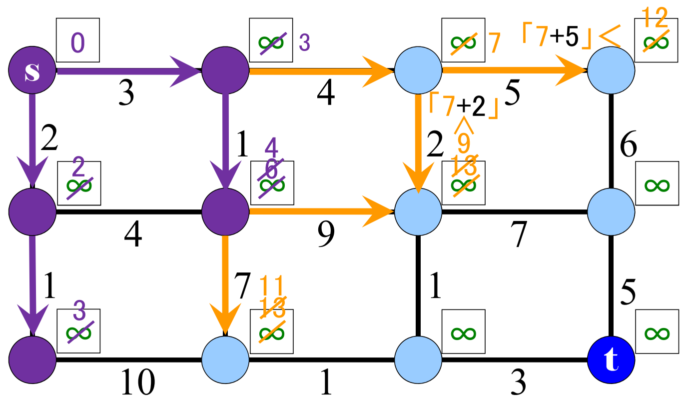
Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

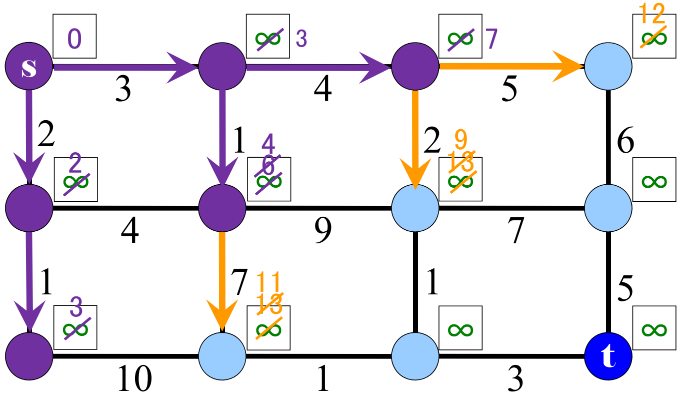
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（<）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

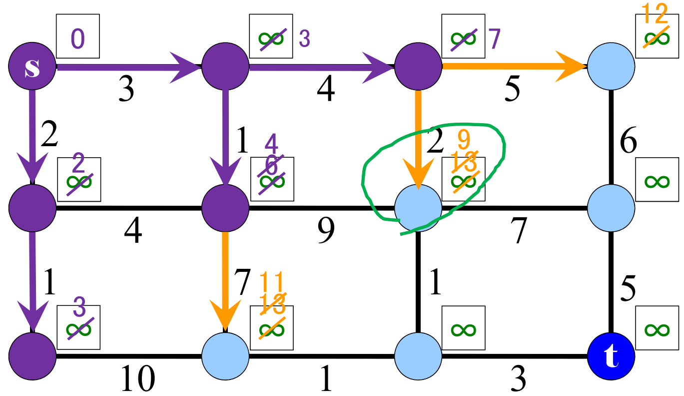
step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



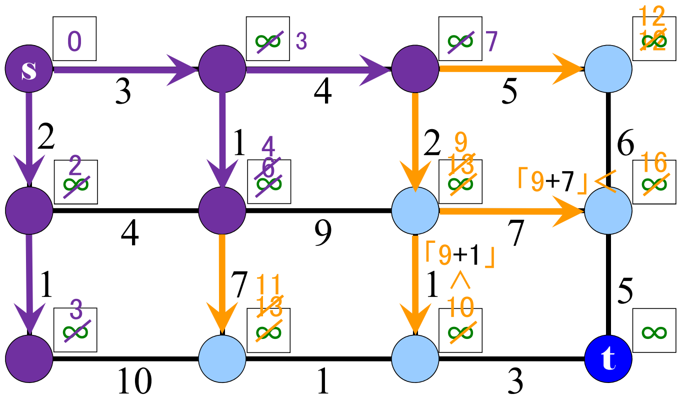
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

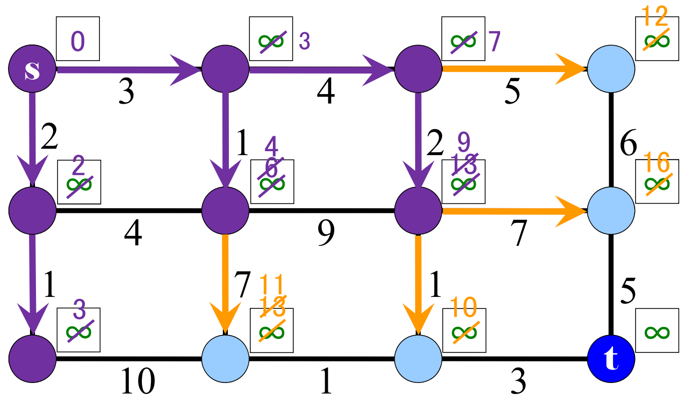
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（＜）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

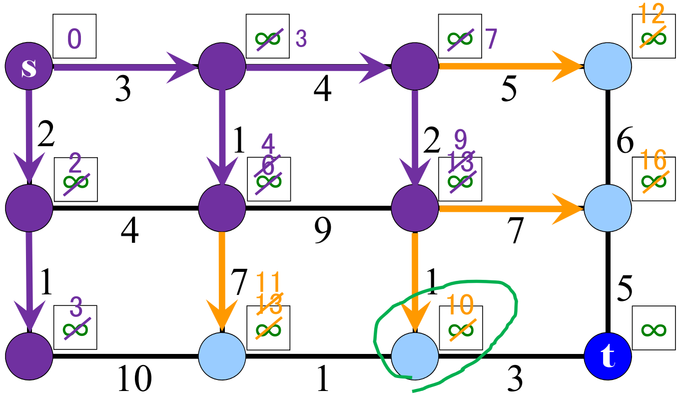
step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



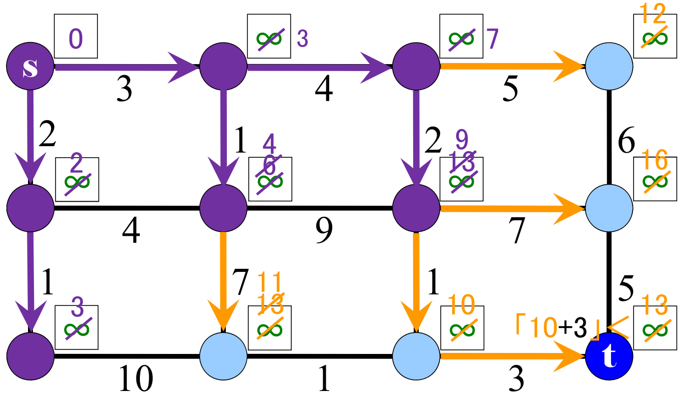
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，<u>ラベル値が最小の点</u>を見つける



Dijkstra法（更新法）

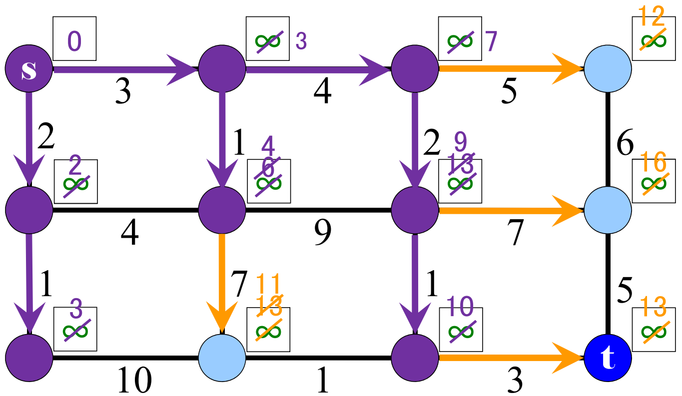
step1-2: その点から出る全枝について<u>「ラベル＋枝コスト」</u>を計算し，<u>枝先点のラベル値と比較</u>し，もし，小さい（<）→枝先点の<u>ラベル更新</u>（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

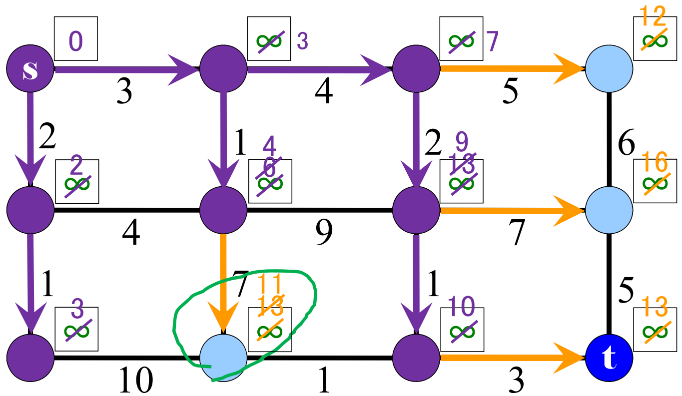
step1-3:その点から出る<u>全枝の作業が終了</u>したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点の<u>ラベル値</u>＝その点までの最短距離）

以降**step1-1**〜**step1-3**を<u>終了条件</u>を満たすまで<u>繰り返す</u>



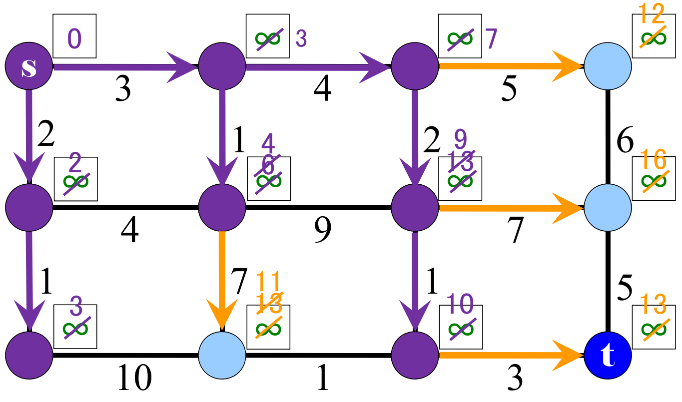
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，<u>ラベル値が最小の点</u>を見つける



Dijkstra法（更新法）

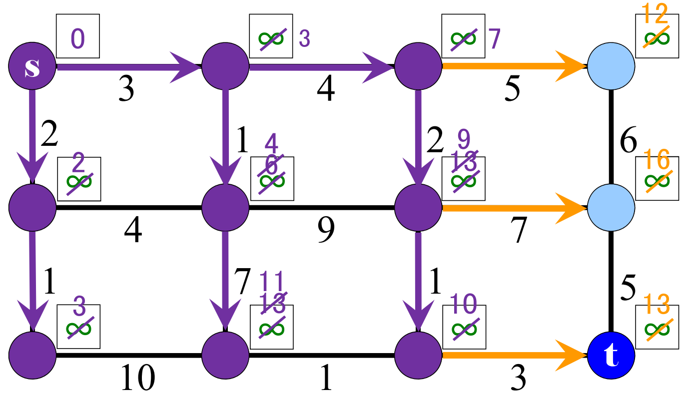
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（<）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，
枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

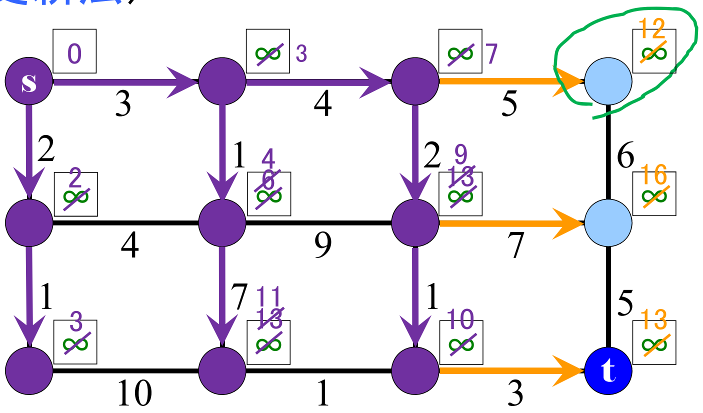
step1-3: その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



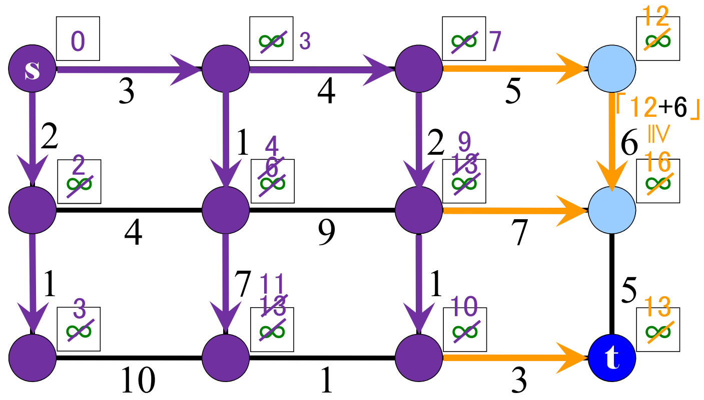
Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

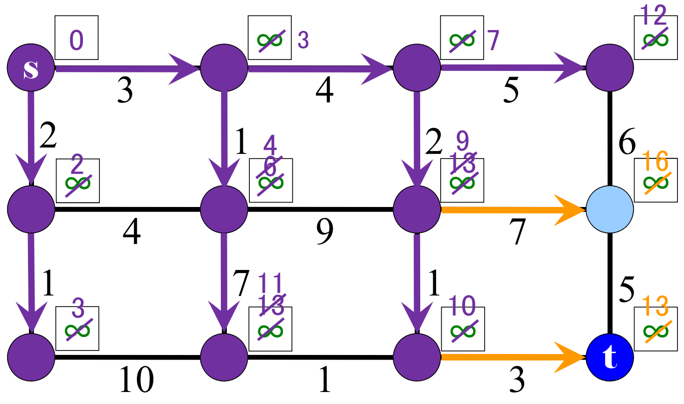
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（<）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，
枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

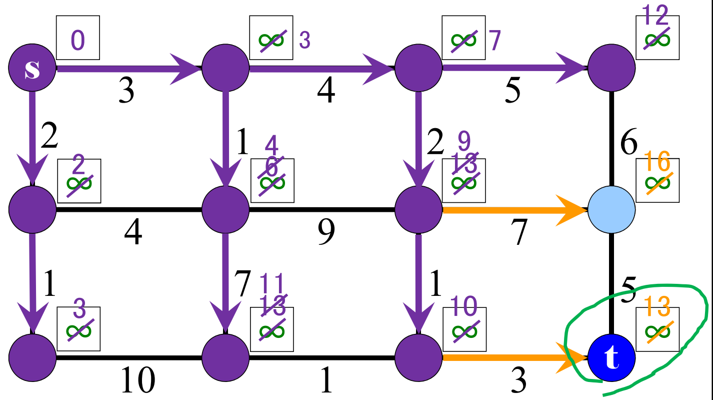
step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降**step1-1**～**step1-3**を終了条件を満たすまで繰り返す



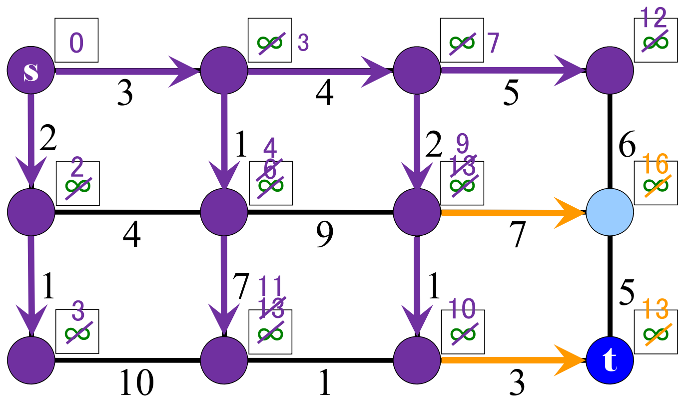
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

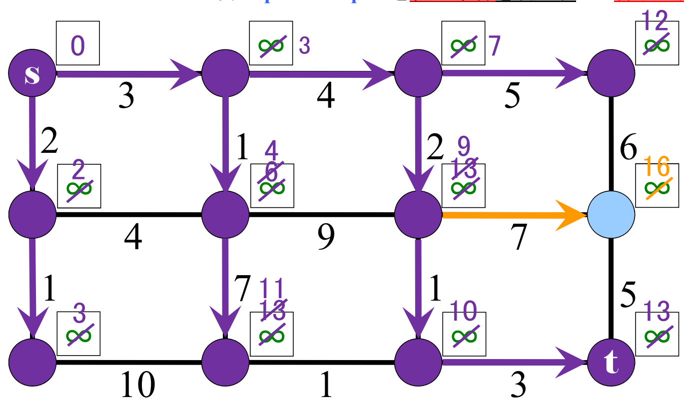
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，
もし，小さい（＜）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

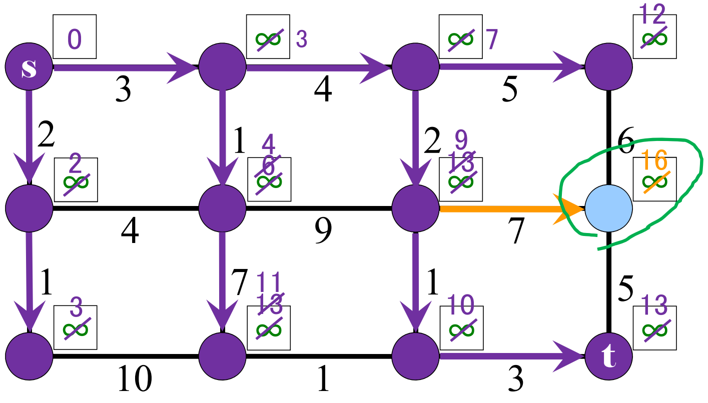
step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降**step1-1**～**step1-3**を終了条件を満たすまで繰り返す



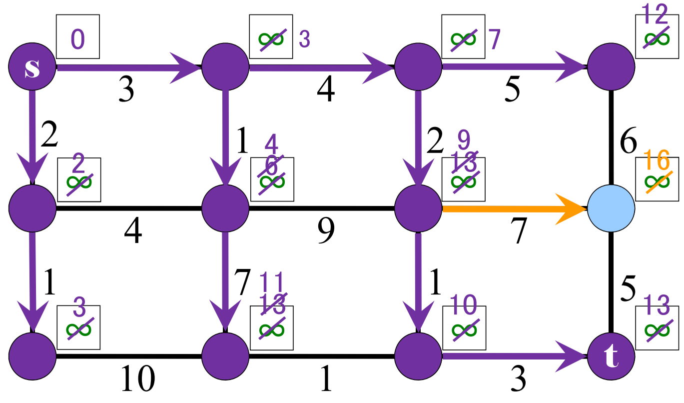
Dijkstra法（更新法）

step1-1:未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける



Dijkstra法（更新法）

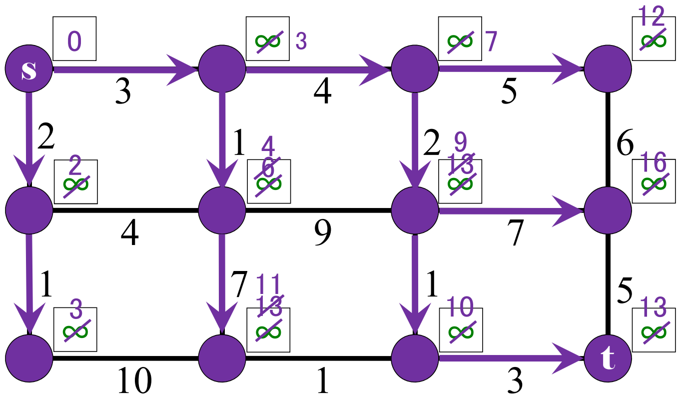
step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，もし，小さい（<）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない



Dijkstra法（更新法）

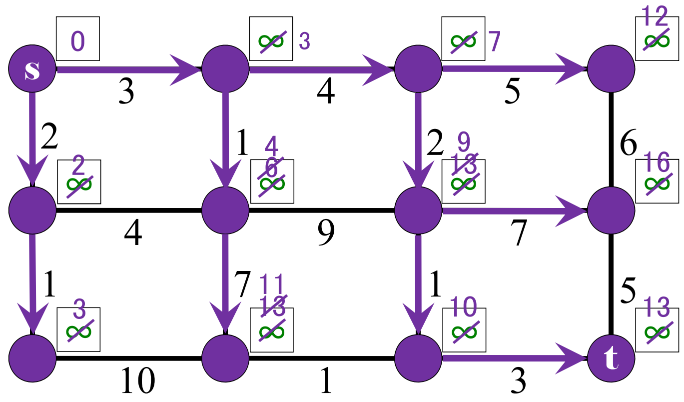
step1-3:その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

以降step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す



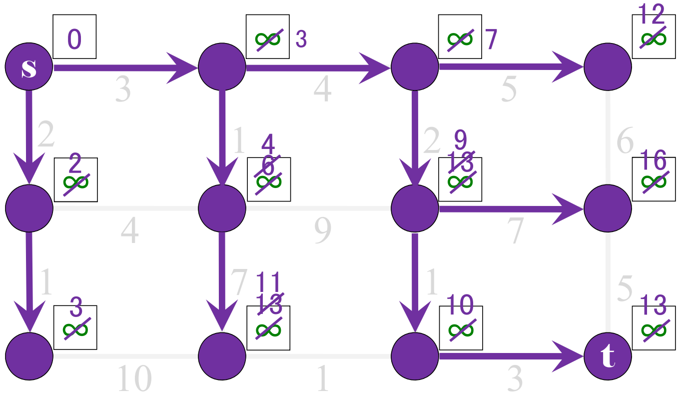
Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合が空になったら終了



Dijkstra法終了後

【注】「スタートから全頂点への最短路が求まっている」ことに注意



Dijkstra法

（初期設定） step0: start点 s のラベルを0にし，その他のラベルを∞に設定する．未確定点集合{S,1,2,...,T}(=V) とする

（更新法） step1-1: 未確定点中，ラベル値が最小の点を見つける

step1-2: その点から出る全枝について「ラベル＋枝コスト」を計算し，枝先点のラベル値と比較し，もし，小さい（<）→枝先点のラベル更新（暫定最短路）し，枝先点を調査中に追加，そうでないなら何もしない

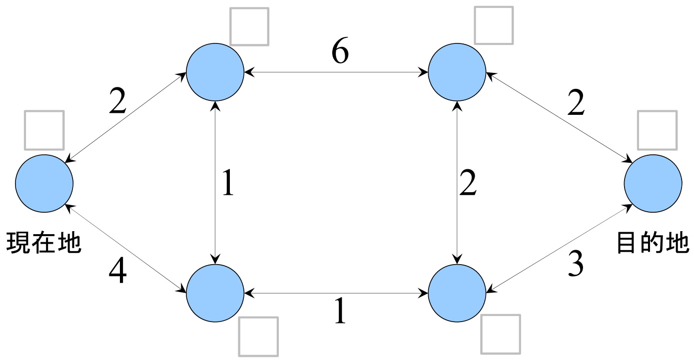
step1-3: その点から出る全枝の作業が終了したら，その点を未確定点集合から除去
（確定点のラベル値＝その点までの最短距離）

step1-1～step1-3を終了条件を満たすまで繰り返す

（終了判定） step2: 未確定点集合が空になったら終了

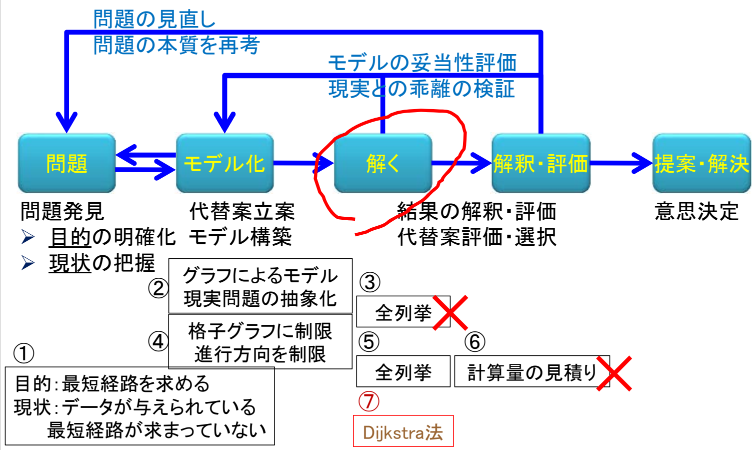
Dijkstra法

練習） 一緒にやってみよう



問題解決とは？

➢ 問題発見・問題解決から意思決定まで



評価：Dijkstra法って速いのか？

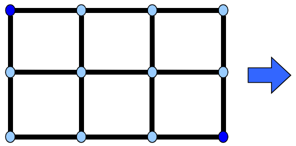
- 点の数を n とすると，大雑把な見積もりで，

$$O(n^2)$$ 多項式オーダー

$O(m+n\log n)$

- 点の数 n を右向枝数R，下向枝数Dで表すと

$$n=(R+1)\times(D+1)$$



$$n=(3+1)\times(2+1)=12$$
$$n^2=12^2=144$$

コンピュータに計算させてみよう！
簡単のため n^2 の5倍の浮動小数点演算回数で計算できると仮定.

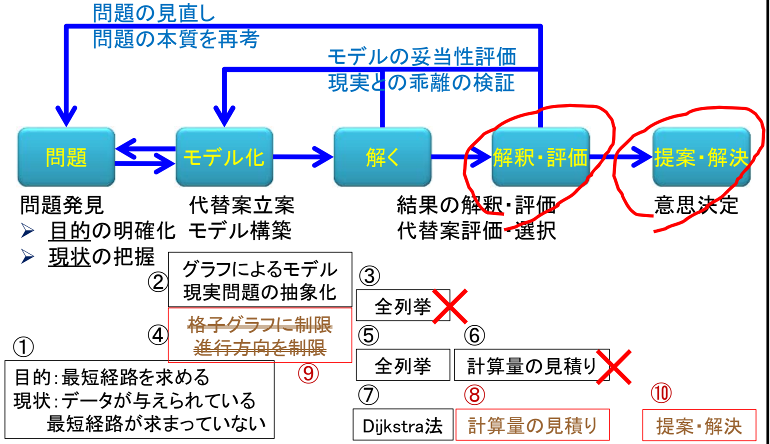
評価：Dijkstra法って速いのか？

R(横)	D(縦)	全経路	京 & しらみつぶし (10.51PFLOPS)	Core i7 & Dijkstra (51.2GFLOPS)
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000001 秒
6	4	210	0.000000000 秒	0.000000003 秒
10	5	3,003	0.000000000 秒	0.000000006 秒
20	10	30,045,015	0.000000086 秒	0.000000023 秒
25	25	1.3×10^{14}	0.601382523 秒	0.000000066 秒
30	30	1.2×10^{17}	11 分	0.000000094 秒
40	40	1.1×10^{23}	26 年	0.000000164 秒
50	50	1.0×10^{29}	30,439,996 年	0.000000254 秒
100	100	9.1×10^{58}	4.0×10^{27} 宙齢	0.000000996 秒
500	500	2.7×10^{299}	5.9×10^{268} 宙齢	0.000024512 秒

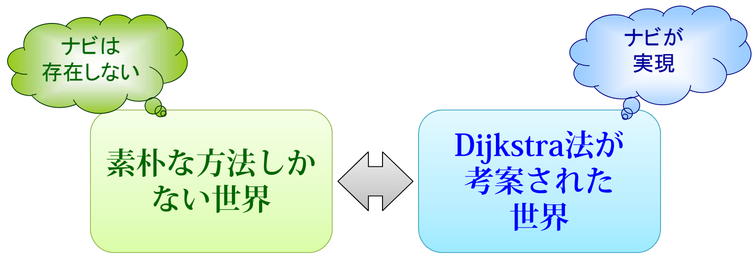
世界最速SuperComp ＋力技（しょぼい方法） <<< そこらのPC ＋人間の知恵

問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで



意思決定支援・ビジネスサポート



人類の創造的な仕事！

参考文献
コンピュータに仕事を奪われつつある人類…

[1] 新井紀子
「コンピュータが仕事を奪う」日経新聞社(2010)

[2] E. Brynjolfsson, A. McAfee, 村井章子訳
「機械との競争」日経BP社(2013)

もっと知りたい人へ

- 参考文献
  - グリッツマン, ブランデンベルク**「最短経路の本」** シュプリンガー(2008)
  - W.J.クック**「驚きの数学 巡回セールスマン問題」** 青土社(2013)
  - 山本, 久保**「巡回セールスマン問題への招待」** 朝倉書店(1997)
  - 久保, 松井**「組合せ最適化『短編集』」** 朝倉書店(1999)
  - 松井, 根本, 宇野**「入門オペレーションズ・リサーチ」**東海大出版(2008)

- 関連する授業
  - 「**ネットワークモデル分析**」(4セメ)
  - 「**最適化モデル分析**」(5セメ) etc…