

2017/10/31 Tue.

問題解決技法入門

2. Graph Theory
3. 安定結婚問題

堀田 敬介

浮気しない？カップル

- 6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の好き嫌いを考えずに強引にくっつけちゃうと、浮気する人が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？

どうすれば浮気しないの？

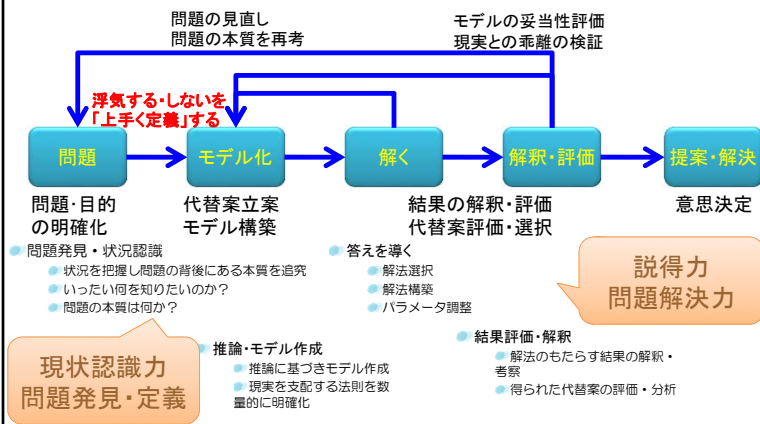
浮気しないってどういうこと？

浮気ってどういう状況で起こる？

浮気する・しないを「上手く定義」する

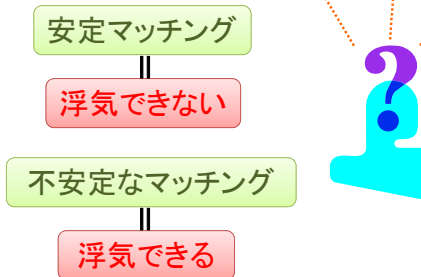
問題解決

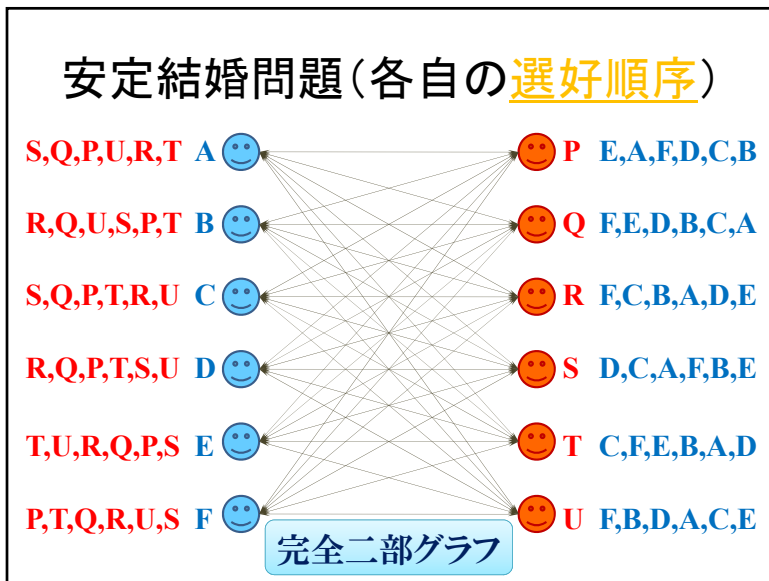
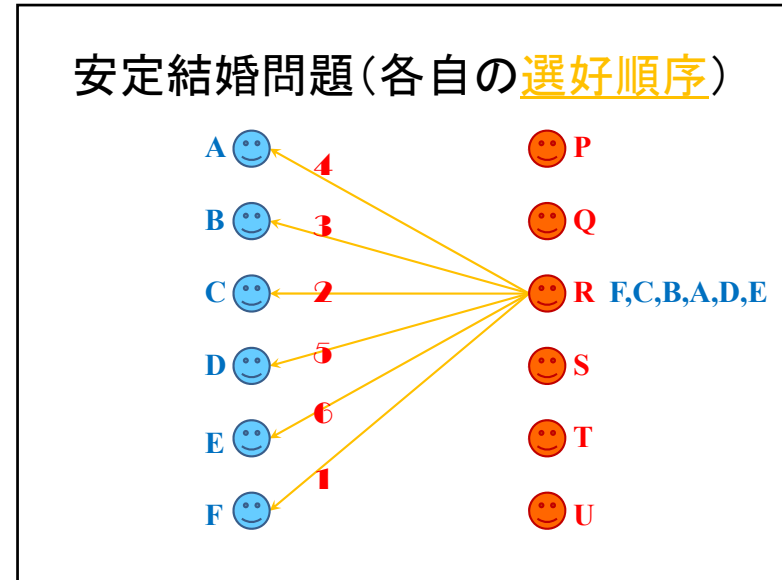
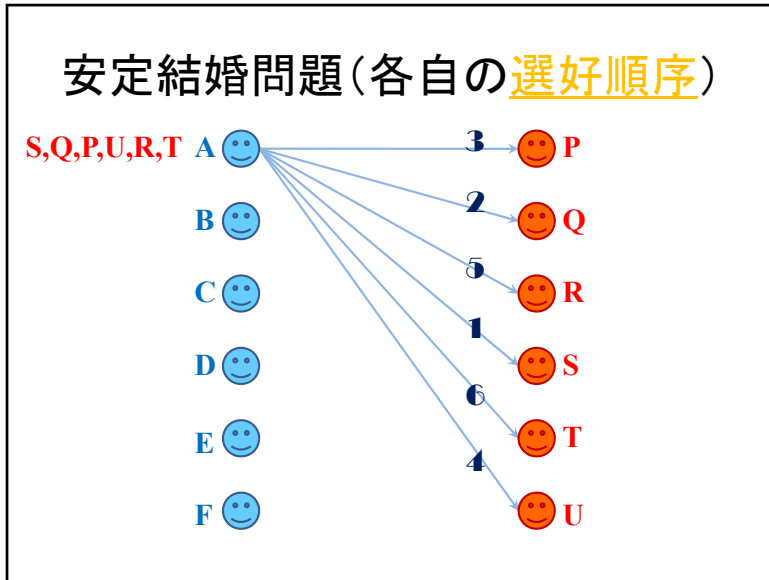
- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



安定結婚問題

- n 人の男性の集合と、 m 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の選好順序をもっている。このとき、安定なマッチングを見つきたい。





安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけたい.

安定マッチング
||
浮気できない

不安定なマッチング
||
浮気できる

男性 女性

二部グラフ
男性: 点集合 V_1
女性: 点集合 V_2

安定結婚問題 (マッチング)

マッチング
端点を共有しない枝の集合
つまり、どの点 (node) も高々1本の枝 (edge) にのみ接続 (incident to) している

完全マッチング
全ての点 (node) が、マッチング (matching) の枝 (edge) に接続しているとき、そのマッチングを完全マッチングという

安定結婚問題 (マッチング)

この枝集合は、マッチング (matching) ではない
なぜだかわかる？

その通り！ マッチングではありません。
なぜなら、端点を共有する枝がある (二股をかけている人がいる) から

安定結婚問題 (マッチング)

この枝集合は、マッチング (matching) だろうか？

マッチング (matching) です。でも、完全マッチング (perfect matching) ではないので、ペアを組んでない人がいるね。

つまり、我々は完全マッチングを求めたいのだよ

※男女が同数でない場合は、完全マッチング (perfect matching) は存在しないので、最大マッチング (maximum matching) を求めます。

安定結婚問題

- n 人の男性の集合と、 m 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つけたい。

安定マッチング
||
浮気できない

不安定なマッチング
||
浮気できる

浮気する(不安定な)カップルとは？

こんな2組のカップル(マッチング)を作ってしまったら...

このマッチングは**不安定!**
なぜなら
ブロッキング・ペア
が存在するから!

そんな~ ひどいわ

浮気

浮気しない(安定な)恋人たち

浮気しない(できない)恋人たち

このマッチングは**安定!**
なぜなら
ブロッキング・ペア
が存在しないから

浮気を試みるも...

拒絶 誘い

安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の**選好順序**をもっている. このとき, **安定なマッチング**を見つきたい.

安定マッチング
||
浮気できない

不安定なマッチング
||
浮気できる

安定結婚問題(まとめ)

浮気しないカップルをつくる(安定結婚問題を解く)ということは,
(ブロッキング・ペアが存在しない)安定な完全マッチングを求めること

※男女が同数でない場合は, 完全マッチング(perfect matching)は存在しないので, 最大マッチング(maximum matching)を求めます.

問題: このマッチングは安定?

S, Q, P, U, R, T A 😊 → 😞 P E, A, F, D, C, B

R, Q, U, S, P, T B 😊 → 😞 Q F, E, D, B, C, A

S, Q, P, T, R, U C 😊 → 😞 R F, C, B, A, D, E

R, Q, P, T, S, U D 😊 → 😞 S D, C, A, F, B, E

T, U, R, Q, P, S E 😊 → 😞 T C, F, E, B, A, D

P, T, Q, R, U, S F 😊 → 😞 U F, B, D, A, C, E

問題解決

・「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

```

    graph LR
        A[問題] --> B[モデル化]
        B --> C[解く]
        C --> D[解釈・評価]
        D --> E[提案・解決]
        
        A -- "問題の見直し  
問題の本質を再考" --> B
        B -- "浮気する・しないを  
「上手に定義」する" --> C
        C -- "安定マッチング  
を求める" --> D
        D -- "モデルの妥当性評価  
現実との乖離の検証" --> E
    
```

安定マッチング

Q1. そんなものあるのか?

Q2. 求められるのか?

演習: やってみよう

S, Q, P, U, R, T A 😊 → 😞 P E, A, F, D, C, B

R, Q, U, S, P, T B 😊 → 😞 Q F, E, D, B, C, A

S, Q, P, T, R, U C 😊 → 😞 R F, C, B, A, D, E

R, Q, P, T, S, U D 😊 → 😞 S D, C, A, F, B, E

T, U, R, Q, P, S E 😊 → 😞 T C, F, E, B, A, D

P, T, Q, R, U, S F 😊 → 😞 U F, B, D, A, C, E

完全マッチングは全部で幾つ?

男女各人数	完全マッチング数
6	720
10	3,628,800
20	2.4×10^{18}
30	2.7×10^{32}
40	8.2×10^{47}
50	3.0×10^{64}
100	9.3×10^{157}
200	#NUM!

※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが、最悪、一番最後まで見つからないかもしれない。また、そもそも安定解など存在しないかもしれないので、その場合は全部調べなければならない

完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても、今のコンピュータはかなりの速さで計算できるでしょ？ だから大丈夫だね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
 - Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2GFLOPS** ...1秒間に約**512億**回
 - PS3 : **218GFLOPS** ...1秒間に約**2180億**回
 - PS4 : **1.84TFLOPS** ...1秒間に約**1兆8400億**回
 - 京 : **10.51PFLOPS** ...1秒間に約**1京510兆**回
- (※2011年6月, 11月 **世界最速!** by Top500.org)
 (※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)
 ※FLOPS = **F**loating-point **O**perations **P**er **S**econd
 [Wikipedia「FLOPS」より] 2013/5/1の情報

完全マッチングを一つ見つけるのに、男(女)の人数(完全マッチング数)の浮動小数点演算できると仮定しよう
 例えば、n=6(男6人, 女6人)のときは、6回の演算で計算可と仮定するということ

K(キロ) $\approx \times 10^3 =$ 千倍
 M(メガ) $\approx \times 10^6 =$ 百万倍
 G(ギガ) $\approx \times 10^9 =$ 10億倍
 T(テラ) $\approx \times 10^{12} =$ 1兆倍
 P(ペタ) $\approx \times 10^{15} =$ 千兆倍
 E(エクサ) $\approx \times 10^{18} =$ 百京倍

完全マッチングは全部で幾つ？

人数	pm数	51.2GFLOPS	1.84TFLOPS	10.51PFLOPS
		Core i7	PS4	京
6	720	0.0000001秒	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0007088秒	0.0000197秒	0.0000000秒
20	2.4×10^{18}	30年	306日	1.3時間
30	2.7×10^{32}	357,129宙齡	9,938宙齡	1.7宙齡
40	8.2×10^{47}	1.5E+21宙齡	4.1E+19宙齡	7.1E+15宙齡
50	3.0×10^{64}	6.8E+37宙齡	1.9E+36宙齡	3.3E+32宙齡
100	9.3×10^{157}	4.2E+131宙齡	1.2E+130宙齡	2.0E+126宙齡
200	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、**全列挙(しらみつぶし)**では答えを求めることは期待出来ない
 # 1宙齡 = 138億年



補足: スパコンの性能

- Top500** (行列演算: 連立一次方程式を解く速度を評価)

- 京: **10.51PFLOPS** ...1秒間に**1京510兆**回
 - 2011年6月 1位
 - 2011年11月 1位
 - 2012年6月 2位
 - 2012年11月 3位
 - 2013年6月 4位
 - 2013年11月 4位
 - 2014年6月 4位
 - 2014年11月 4位
 - 2015年6月 4位

他に**Green500**なども(エネルギー消費効率の良さを競う FLOPS per Watt)
 2015年6月上位3機は日本
 1位. 島浦, 2位. 青睡蓮, 3位. 睡蓮

※FLOPS = **F**loating-point **O**perations **P**er **S**econd
 ※TEPS = **T**raversed **E**dges **P**er **S**econd

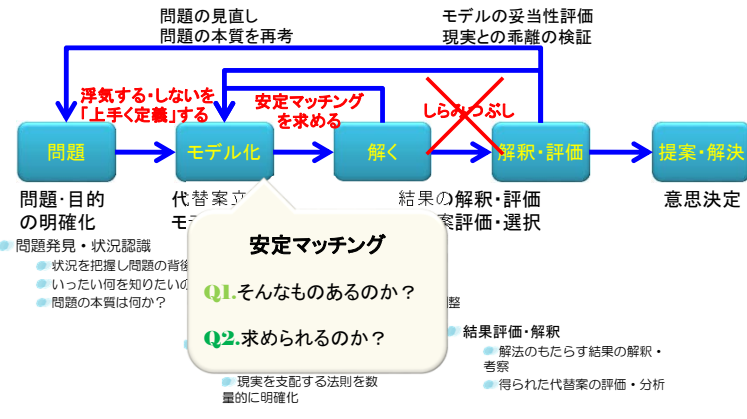
- Graph500** (大規模グラフ解析の性能を評価)

- 京: **38,621GTEPS** ...1秒間に**38兆6210億**個
 - 2014年6月 1位
 - 2014年11月 2位
 - 2015年6月 1位(約1兆個の点, 約16兆個の枝からなるグラフの幅優先探索を0.45秒で処理)

- ✓ 計算速度
- ✓ アルゴリズム
- ✓ プログラム
- などの総合力の競争

問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
 - 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて、安定解を探す

時間が掛かり過ぎる！

全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べずに、
 安定解を、現実的時間で見つける方法があるか？

人間の創造的な仕事！

安定結婚問題を解く

Gale-Shapley アルゴリズム

D.Gale & L.S.Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム

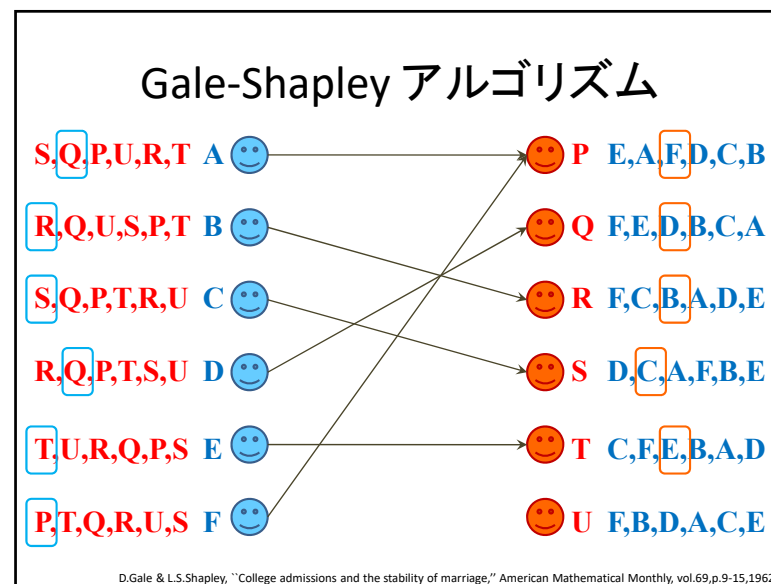
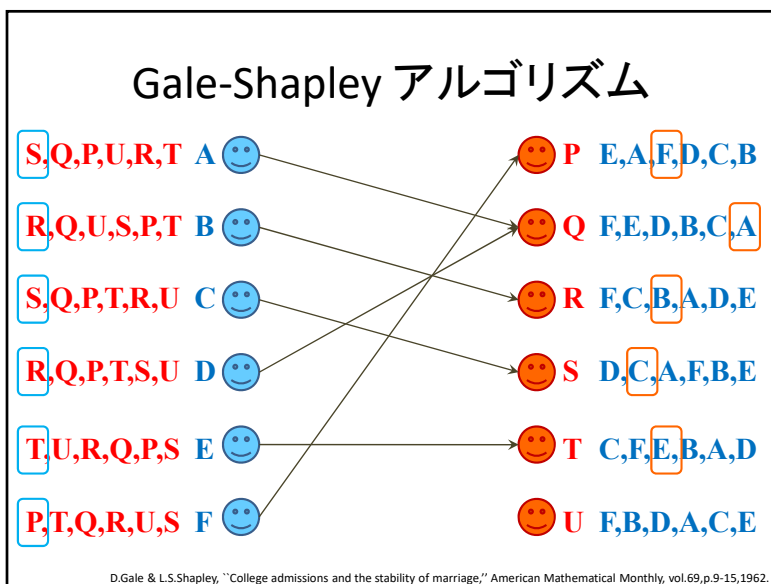
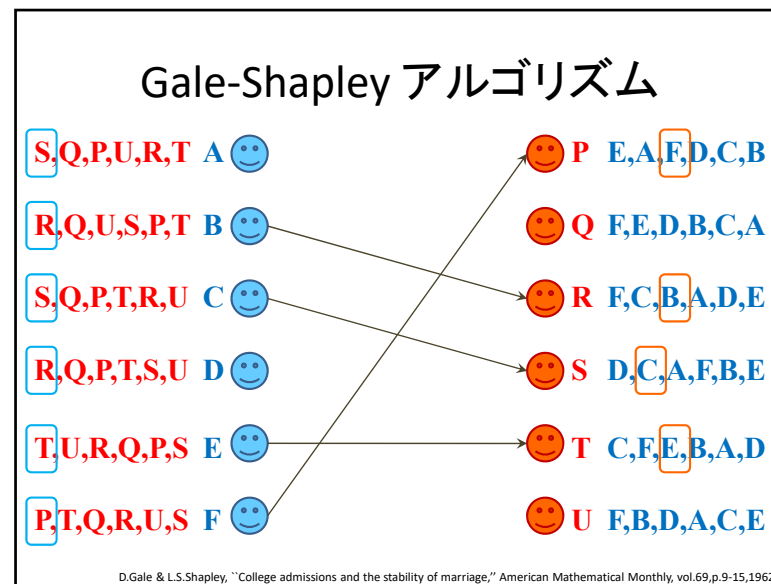
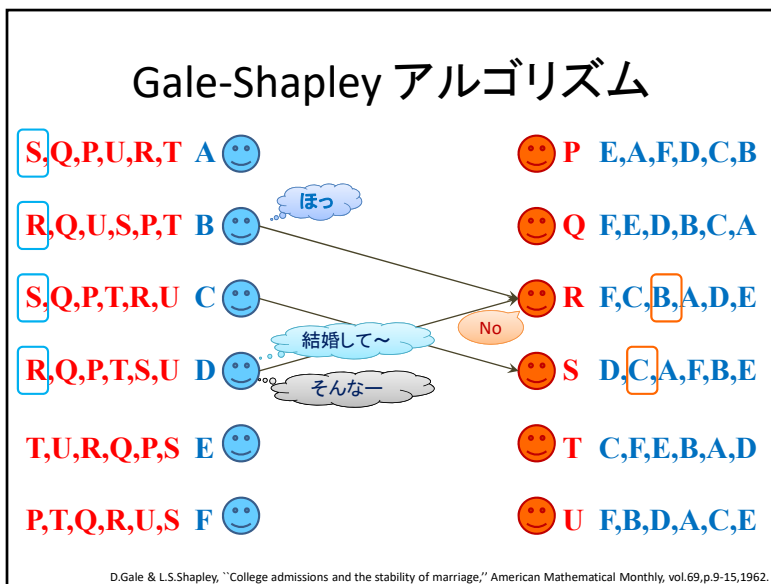
S, Q, P, U, R, T A ☺	結婚して~	☺	P	E, A, F, D, C, B
R, Q, U, S, P, T B ☺	結婚して~	☺	Q	F, E, D, B, C, A
S, Q, P, T, R, U C ☺	結婚して~	☺	R	F, C, B, A, D, E
R, Q, P, T, S, U D ☺		☺	S	D, C, A, F, B, E
T, U, R, Q, P, S E ☺		☺	T	C, F, E, B, A, D
P, T, Q, R, U, S F ☺		☺	U	F, B, D, A, C, E

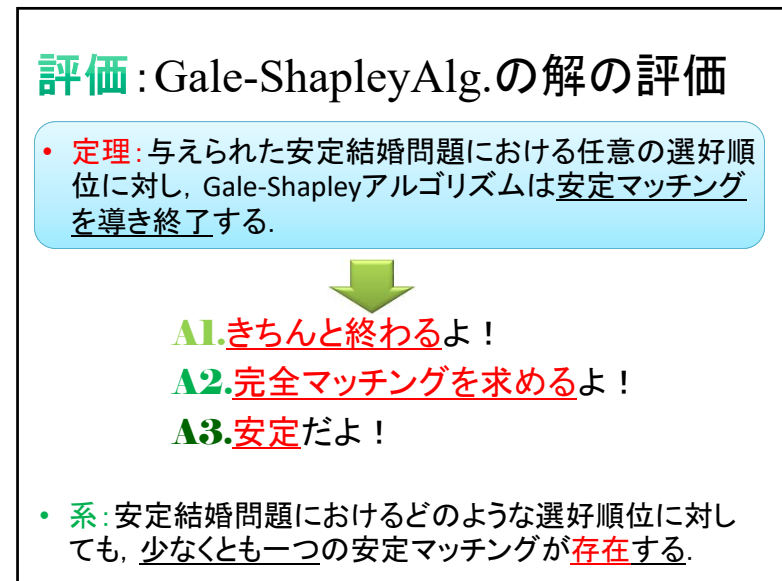
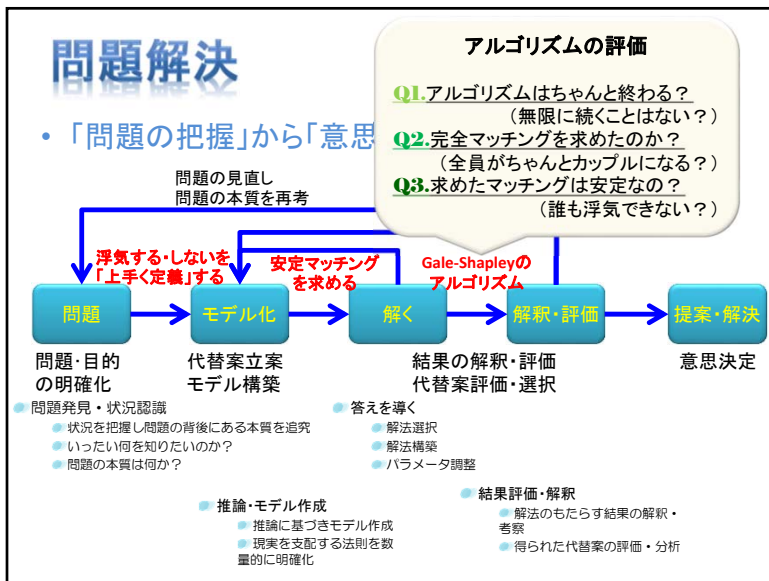
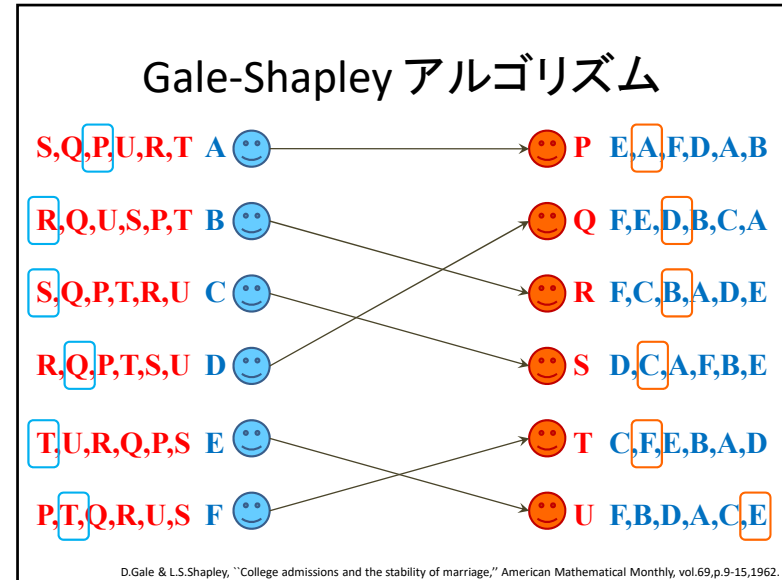
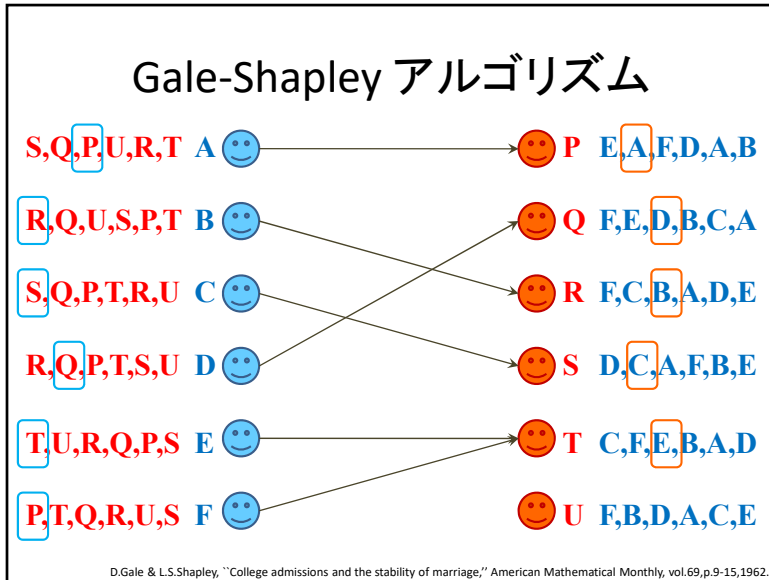
D.Gale & L.S.Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム

S, Q, P, U, R, T A ☺	そんな~	☺	P	E, A, F, D, C, B
R, Q, U, S, P, T B ☺		☺	Q	F, E, D, B, C, A
S, Q, P, T, R, U C ☺	結婚して~	☺	R	F, C, B, A, D, E
R, Q, P, T, S, U D ☺		☺	S	D, C, A, F, B, E
T, U, R, Q, P, S E ☺		☺	T	C, F, E, B, A, D
P, T, Q, R, U, S F ☺		☺	U	F, B, D, A, C, E

D.Gale & L.S.Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.





評価: Gale-Shapley Alg. って速いの?



- 男(女)の数を n とすると, 大雑把な見積もりで,

$O(n^2)$ **多項式オーダー**

コンピュータに計算させてみよう!

簡単のため $10n^2$ の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

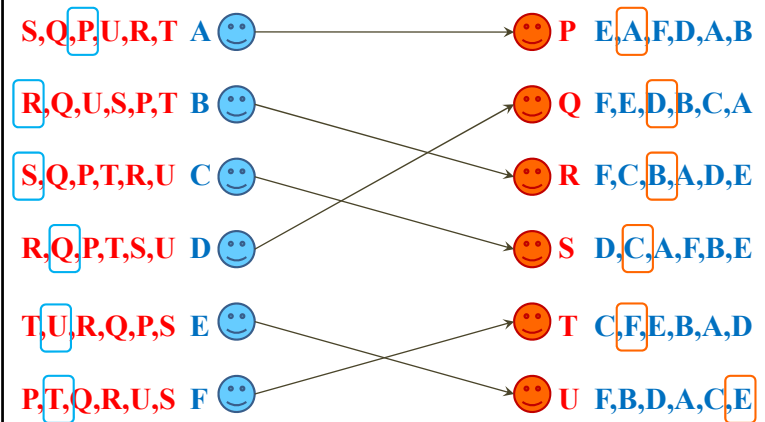
人数	pm数	京 & しらみつぶし	Core i7 & GS Alg
6	720	0.0000000 秒	0.0000000 秒
10	3,628,800	0.0000000 秒	0.0000000 秒
20	2.4×10^{18}	1.3 時間	0.0000001 秒
30	2.7×10^{32}	1.7 宙齡	0.0000002 秒
40	8.2×10^{47}	7.1E+15 宙齡	0.0000003 秒
50	3.0×10^{64}	3.3E+32 宙齡	0.0000005 秒
100	9.3×10^{157}	2.0E+126 宙齡	0.0000020 秒
200	#NUM!	#NUM!	0.0000078 秒
1000	#NUM!	#NUM!	0.0001953 秒
10000	#NUM!	#NUM!	0.0195313 秒
100000	#NUM!	#NUM!	1.9531250 秒
1000000	#NUM!	#NUM!	195.3125000 秒

世界最速 SuperComp + 力技 (しょぼい方法) <<< そこのPC + 人間の知恵

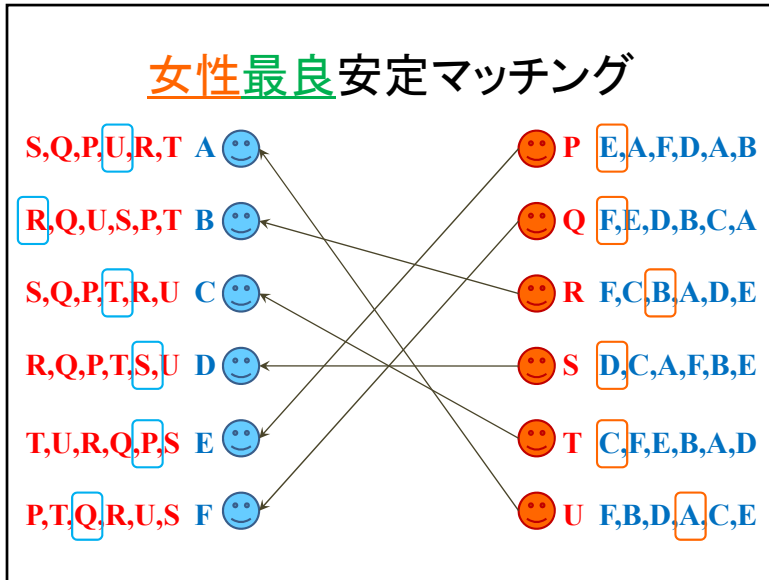
評価: Gale-Shapley Alg. の解の評価2

- 定理:** 男性側のプロポーズの順番に関係なく, Gale-Shapley アルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く.
- 系:** 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapley アルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば **男性最良安定マッチング** を導く.

男性最良安定マッチング



D.Gale & L.S.Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-15,1962.

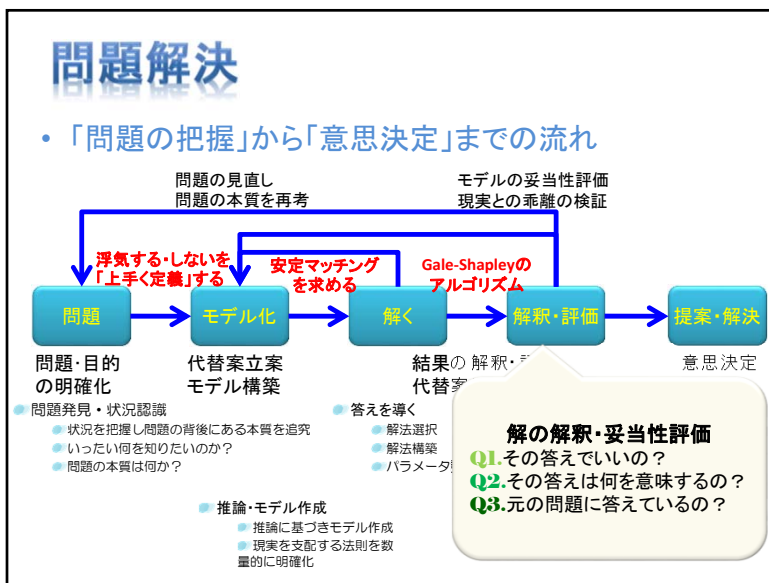


評価: Gale-Shapley Alg.の解の評価3

• 与えられた安定結婚問題について、いくつかの安定マッチングが存在する場合、男性にとってより好ましい安定マッチング、女性にとってより好ましい安定マッチングなど、安定マッチングの**好ましさにある種の順序付け**ができる。

• **定理:** 与えられた安定結婚問題について、
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング
 である。

➡ 教訓! 『待ってちゃダメ! 好きになったら自分から告白しなさい!』



もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書
 - 久保, 松井「**組合せ最適化『短編集』**」朝倉書店(1999)
 - 山本, 久保「**巡回セールスマン問題への招待**」朝倉書店(1997)
 - グリッツマン, ブランデンベルグ「**最短経路の本**」シュプリンガー(2008)
 - 松井, 根本, 宇野「**入門オペレーションズ・リサーチ**」東海大出版(2008)
 - W.J.クック「**驚きの数学 巡回セールスマン問題**」青土社(2013)
 - さらに詳しい内容を勉強したい人は
 - 根本「**安定結婚問題**」(久保, 田村, 松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)
 - 関連する経営学科の授業
 - 「**ネットワークモデル分析**」(4セメ)
 - 「**最適化モデル分析**」(5セメ)
 - 「**意思決定科学**」(6セメ)
- etc...

練習:
男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S

A ☺

選好順

1	2	3	4
P	B	A	C

☺ P

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	→
2	→
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

選好順

P	S	Q	R
---	---	---	---

B ☺

選好順

☺	Q	A	C
---	---	---	---

☺ Q

選好順

Q	S	R	P
---	---	---	---

C ☺

選好順

☺	R	A	D
---	---	---	---

☺ R

選好順

R	Q	P	S
---	---	---	---

D ☺

選好順

☺	S	B	C
---	---	---	---

☺ S

練習:解答例
男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S

A ☺

選好順

1	2	3	4
P	B	A	C

☺ P

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

選好順

P	S	Q	R
---	---	---	---

B ☺

選好順

☺	Q	A	C
---	---	---	---

☺ Q

選好順

Q	S	R	P
---	---	---	---

C ☺

選好順

☺	R	A	D
---	---	---	---

☺ R

選好順

R	Q	P	S
---	---	---	---

D ☺

選好順

☺	S	B	C
---	---	---	---

☺ S

練習:解答例
男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

P	Q	R	S
--------------	---	---	---

A ☺

選好順

1	2	3	4
B	A	C	D

☺ P

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

選好順

P	S	Q	R
---	---	---	---

B ☺

選好順

☺	Q	A	C
---	---	---	---

☺ Q

選好順

Q	S	R	P
---	---	---	---

C ☺

選好順

☺	R	A	D
---	---	---	---

☺ R

選好順

R	Q	P	S
---	---	---	---

D ☺

選好順

☺	S	B	C
---	---	---	---

☺ S

練習:解答例
男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

P	Q	R	S
--------------	---	---	---

A ☺

選好順

1	2	3	4
B	A	C	D

☺ P

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	A → Q
6	C → S
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

選好順

P	S	Q	R
--------------	---	---	---

B ☺

選好順

☺	Q	A	C
---	---	---	---

☺ Q

選好順

Q	S	R	P
--------------	---	---	---

C ☺

選好順

☺	R	A	D
---	---	---	---

☺ R

選好順

R	Q	P	S
---	---	---	---

D ☺

選好順

☺	S	B	C
---	---	---	---

☺ S