

問題解決技法入門

2. Graph Theory

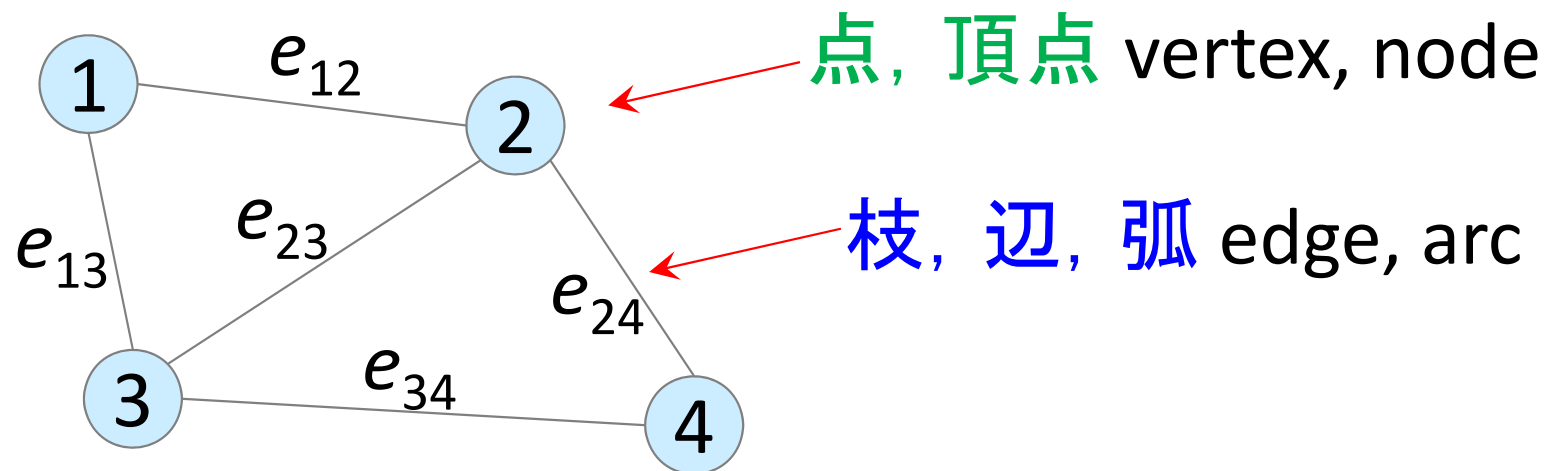
1. グラフの基礎

堀田 敬介

Graph

- グラフ Graph $G=(V,E)$
 - 点と枝, およびその接続関係

厳密には
 $G=(f, V, E)$
 $f: E \rightarrow V \times V$

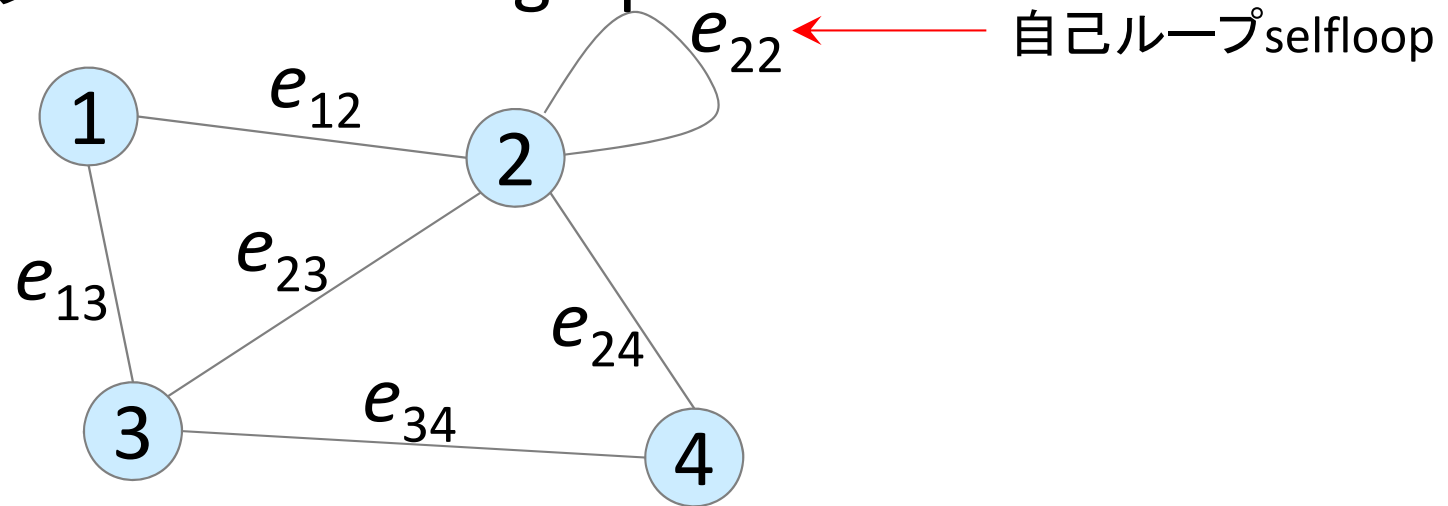


- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\}$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 e_{12} は点1に接続している (An edge e_{12} is incident to 1.)

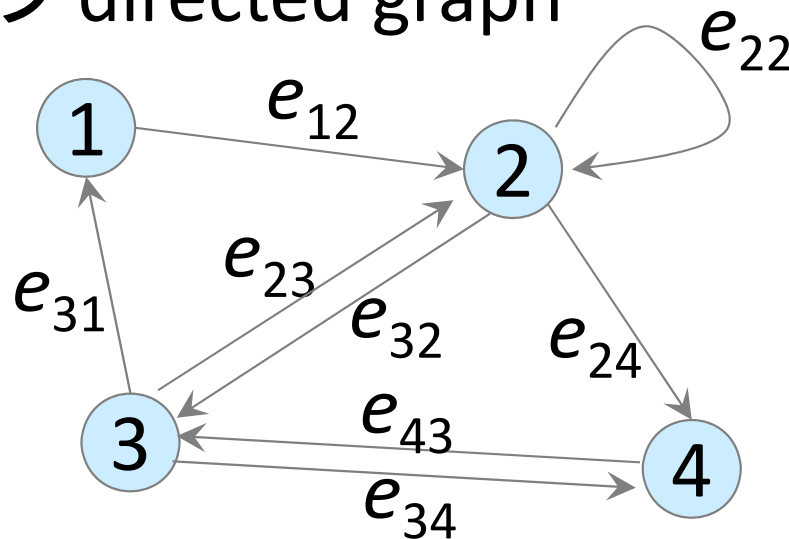
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- 無向グラフ undirected graph



- 有向グラフ directed graph



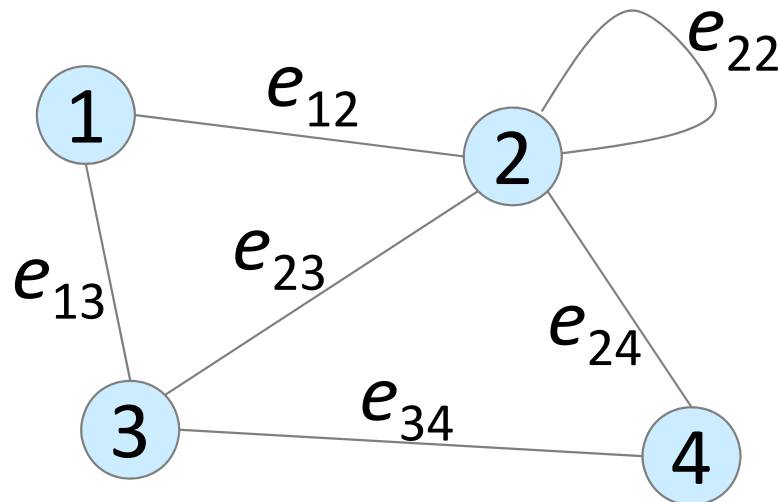
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- **次数** degree ... 点に接続している枝の本数

- Ex) 点1の次数は2

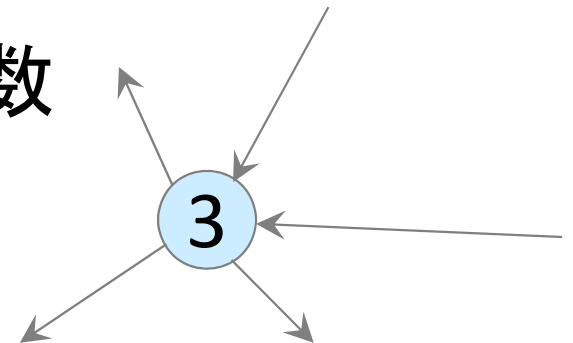
- Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)



- **入次数**...有向グラフで入ってくる枝の本数

- **出次数**...有向グラフで出ていく枝の本数

- Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

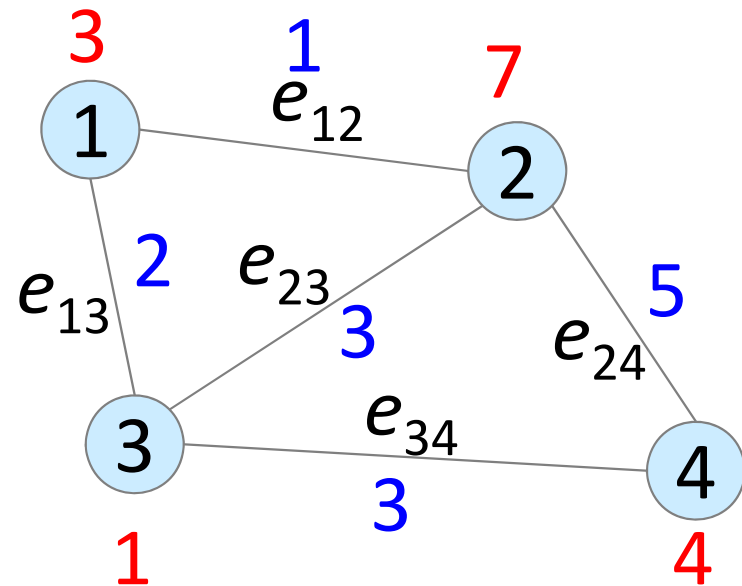


Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト

- コスト cost

- ラベル label
 - ポテンシャル potential
 - 重み weight
 - 流量 flow
 - 容量 capacity
 - 距離 distance
 - etc.



※点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は, コストcostとよばれる. コストには, 上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する

※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが, 別の意味で使われることが多い言葉なので, 「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

Graph

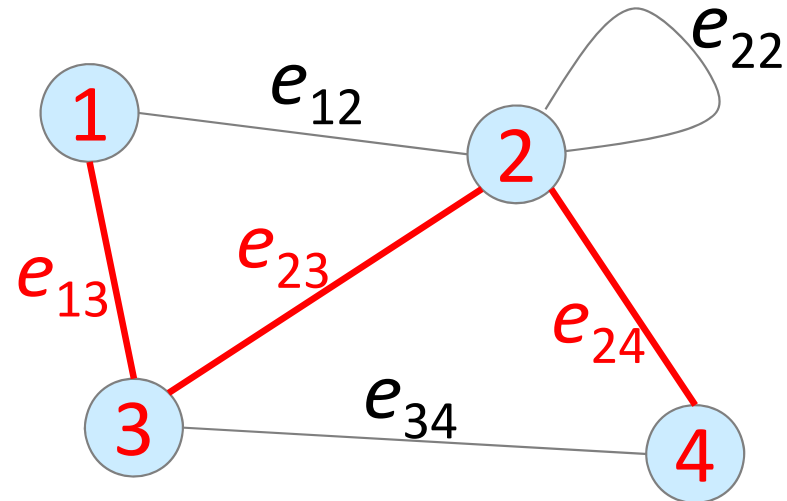
もっと細かい定義...

- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

• グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路

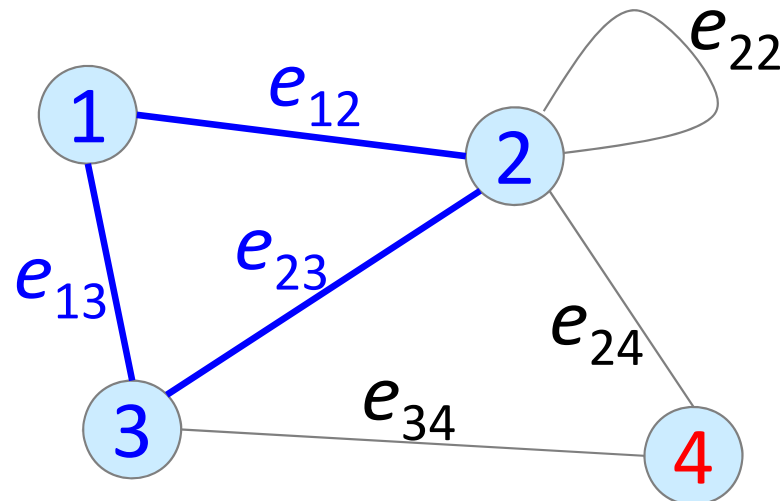
— 路 path

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24}, 4$
- Ex) $1, 3, 2, 4$
- Ex) e_{13}, e_{23}, e_{24}



— 閉路 cycle

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12}, 1$
- Ex) $1, 3, 2, 1$
- Ex) e_{13}, e_{23}, e_{12}

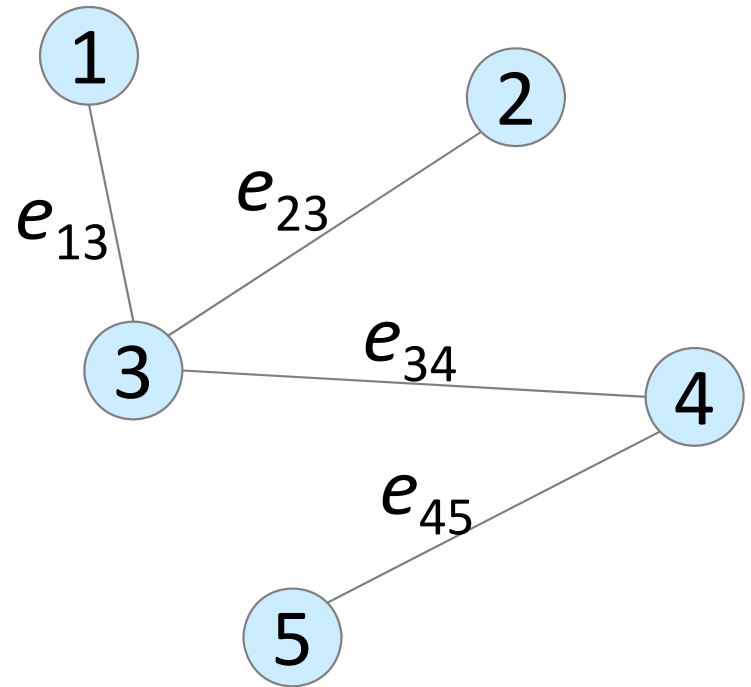


Graph

- 様々なグラフ(1)

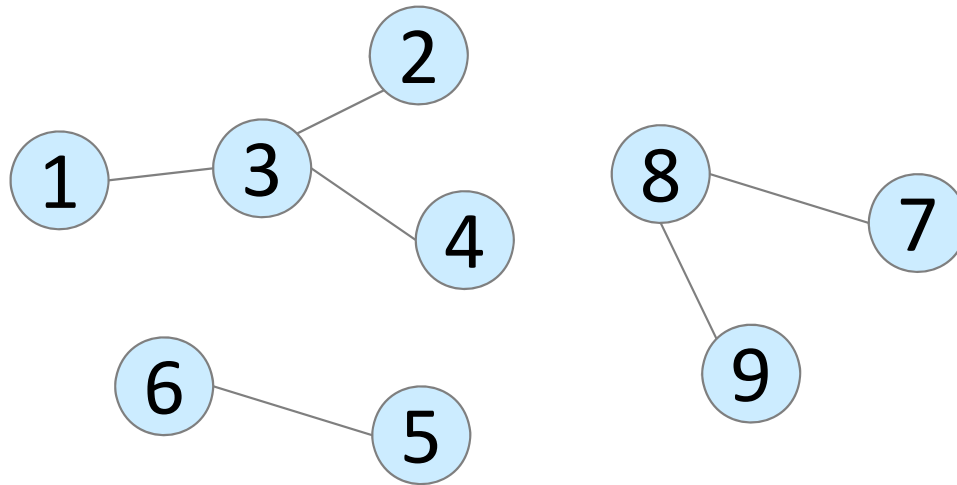
- 木 tree

- 連結で閉路を含まない無向グラフ



- 森 forest

- 閉路を含まない無向グラフ

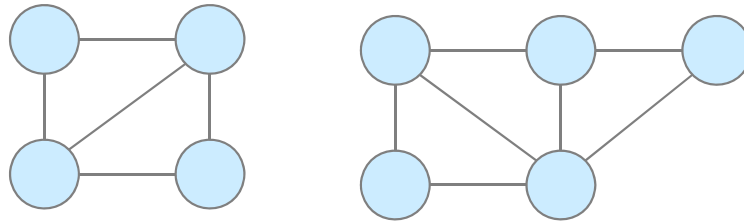


- 連結成分 connected component

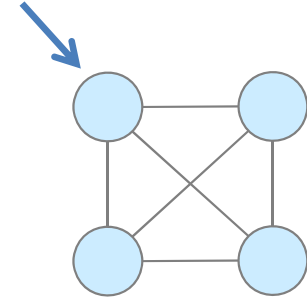
Graph

- 様々なグラフ(2)

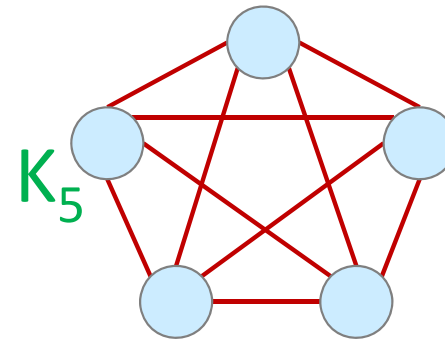
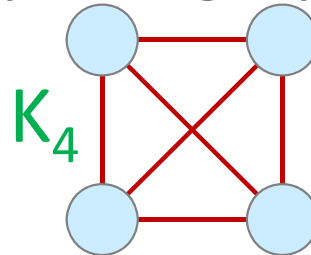
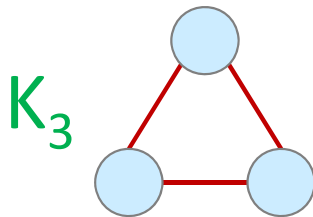
- 平面グラフ plane graph※



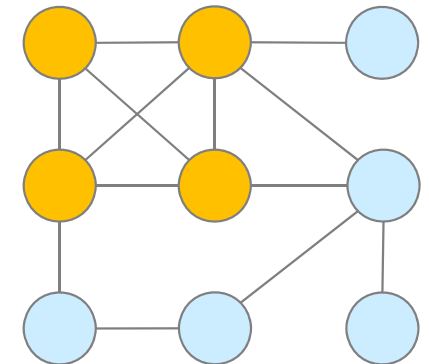
※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graphといいます



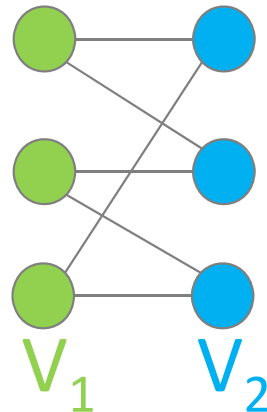
- 完全グラフ complete graph



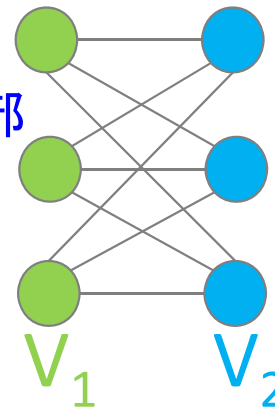
cf. クリーク clique



- 二部グラフ bipartite graph



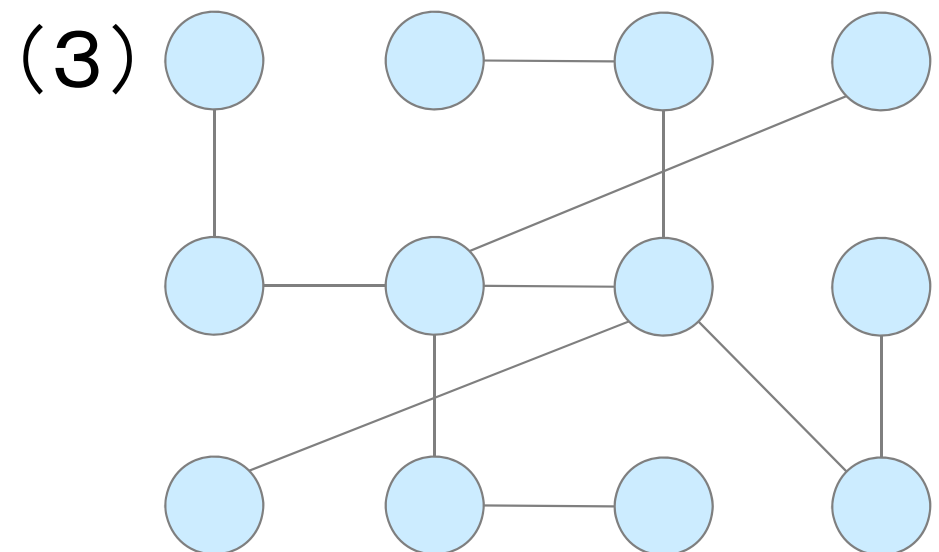
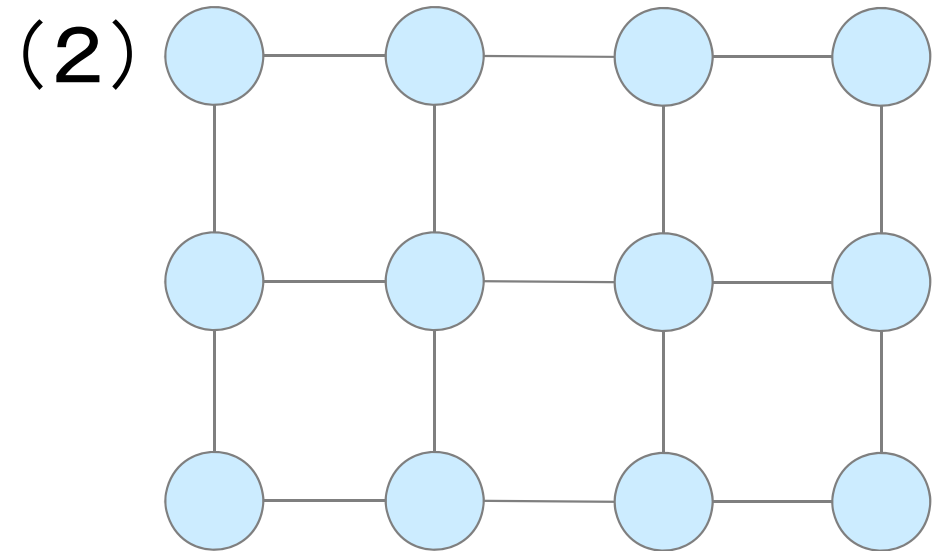
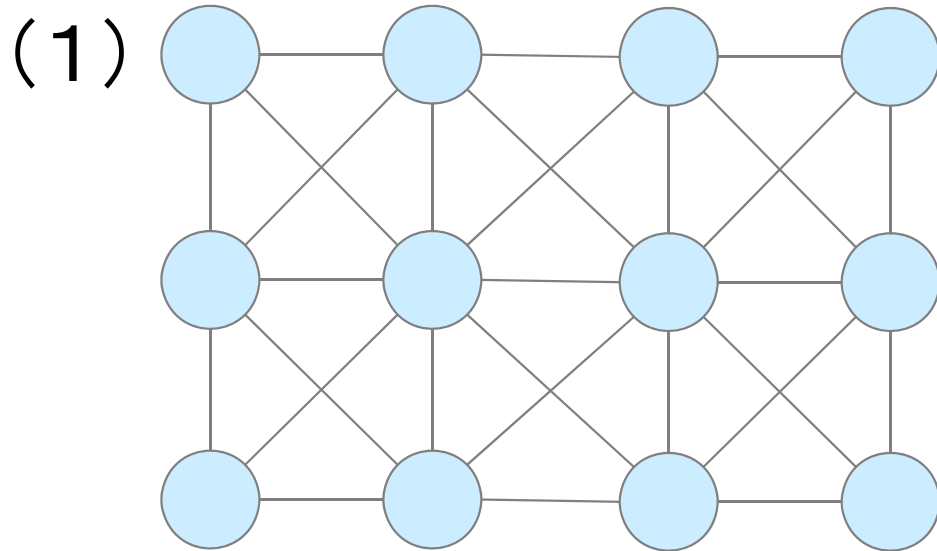
完全二部
グラフ
 $K_{3,3}$



- ✓ 最大クリーク
- ✓ 友達の集合
- ✓ 点彩色・辺彩色

練習

- 問:これは何? 木? 平面? 完全? 二部?

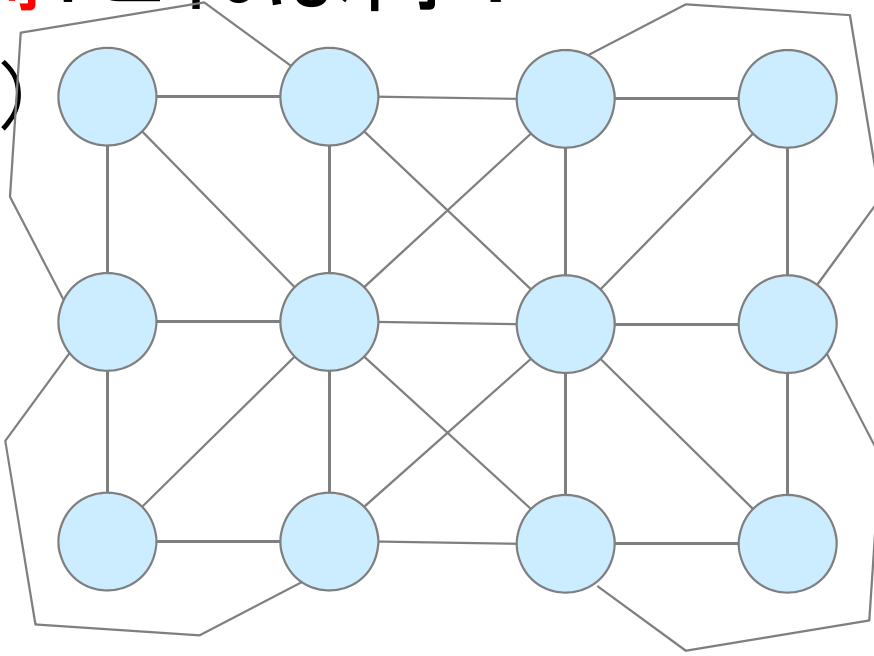


	(1)	(2)	(3)
木	?	?	?
平面	?	?	?
完全	?	?	?
二部	?	?	?

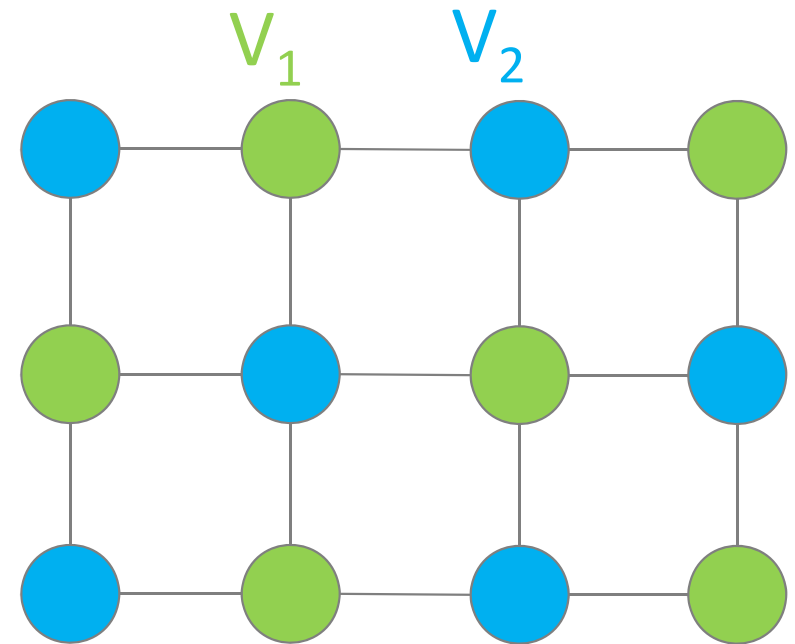
練習(解答)

• 問:これは何?

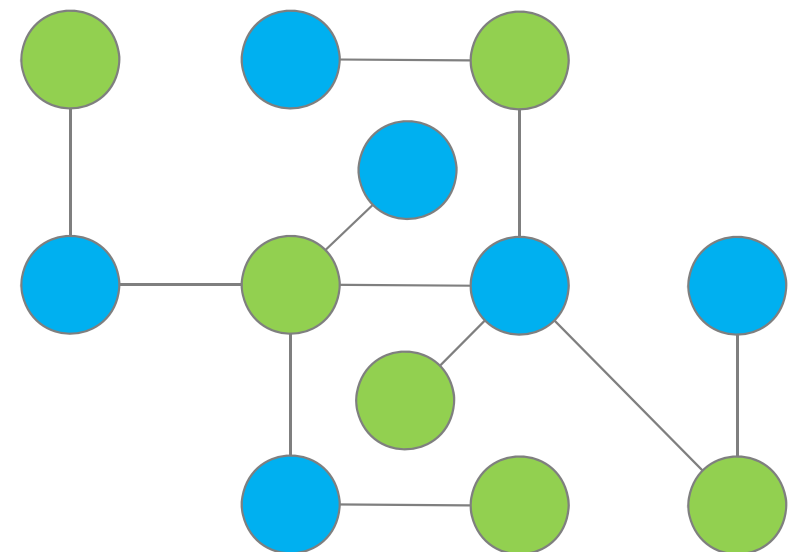
(1)



(2)



(3)

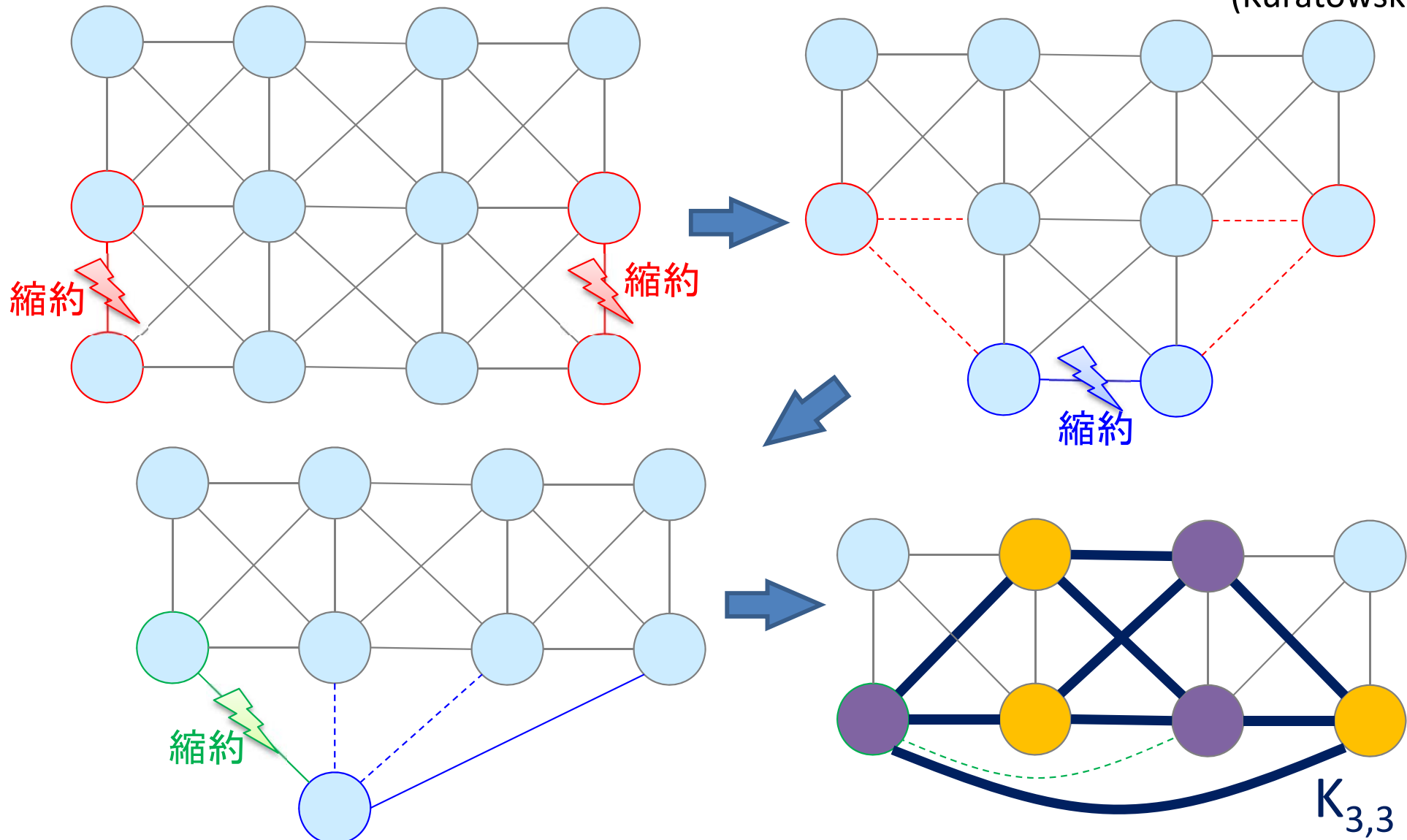


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足：平面グラフ(平面的グラフ)

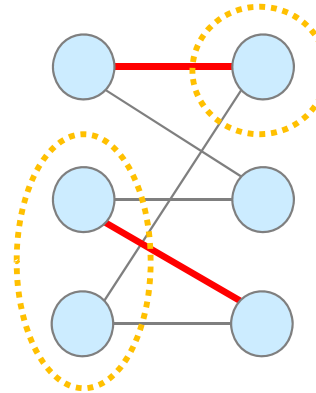
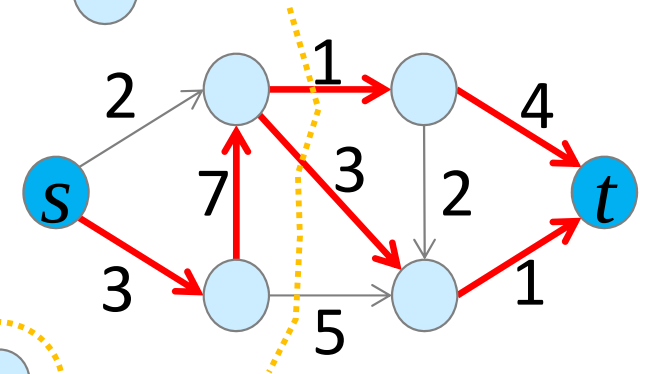
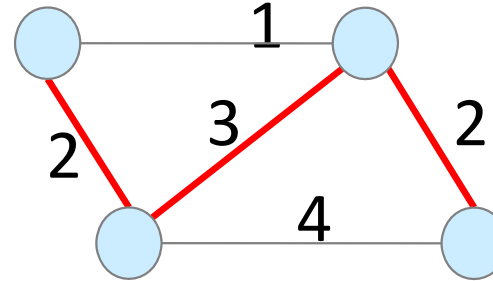
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は、 K_5 , $K_{3,3}$ のどちらも位相的マイナーとして含まないこと

(Kuratowski, 1930)



参考：Graph を使って何をする？

- 全域木 spanning tree
 - 最小全域木 minimum spanning tree
- フロー flow, カット cut
 - 最大流 maximum flow
 - 最小カット minimum cut
 - 最小費用流 minimum cost flow
- マッチ match, 被覆 cover
 - 最大マッチング maximum matching
 - 最小被覆 minimum covering



詳細は、専門科目
「ネットワークモデル
分析」で学ぼう

- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ マトロイド matroid
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ有線探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性: k 点連結, k 枝連結
- ✓ 強連結 strongly connected, 半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

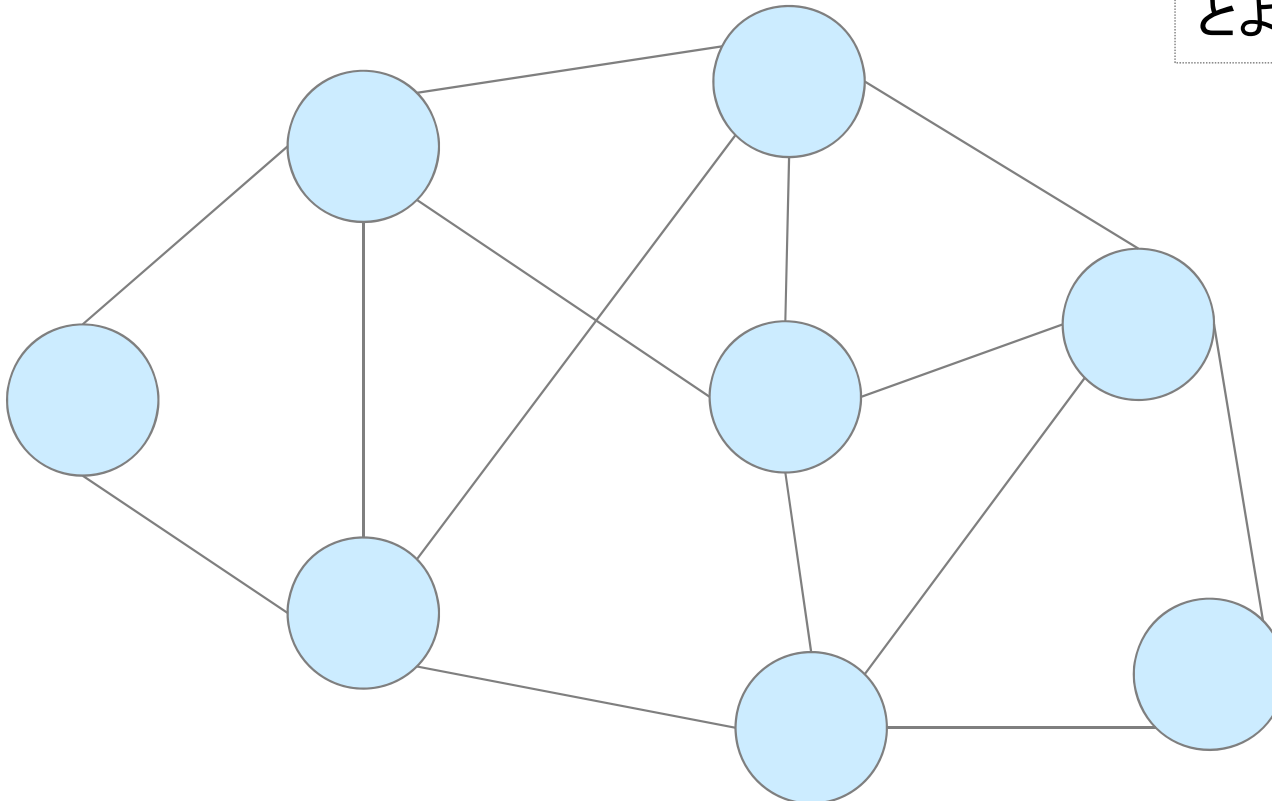
2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1) どの枝(点)から始めても構わない

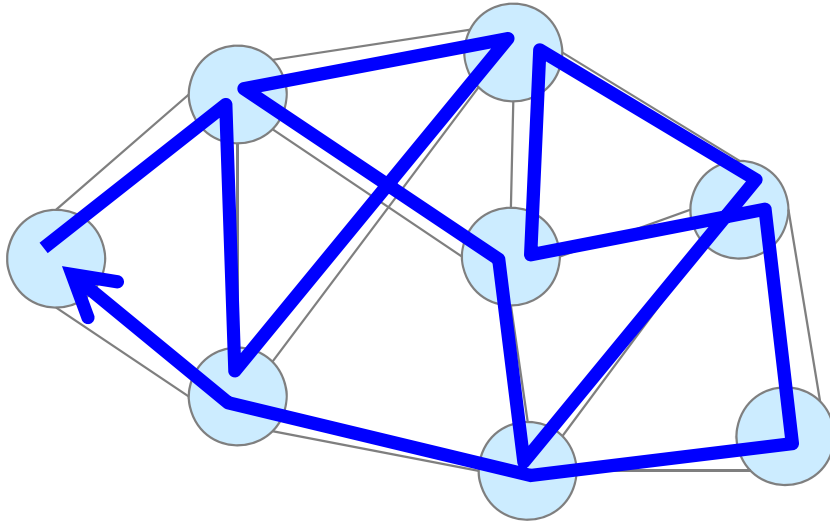
注2) スタート枝(点)とゴール枝(点)が異なる場合は、それぞれ、

- オイラー路(path)
 - ハミルトン路(path)
- とよぶ

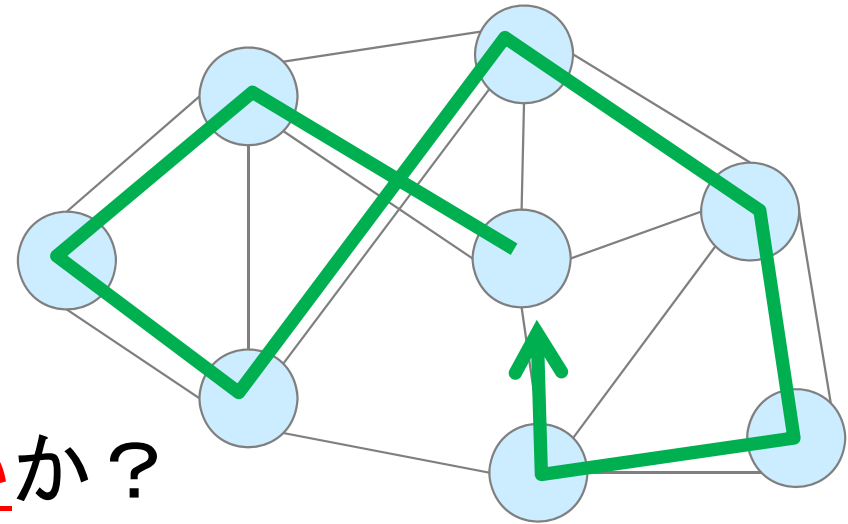


2種類の閉路 (解答例)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路



- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



- **問**: どちらの問題がより難しいか？

※与えられたグラフの

オイラー閉路を求める問題は, クラスPに属す (多項式時間で解ける polynomial-time solvable)

ハミルトン閉路を求める問題は, NP完全問題 NP complete problem

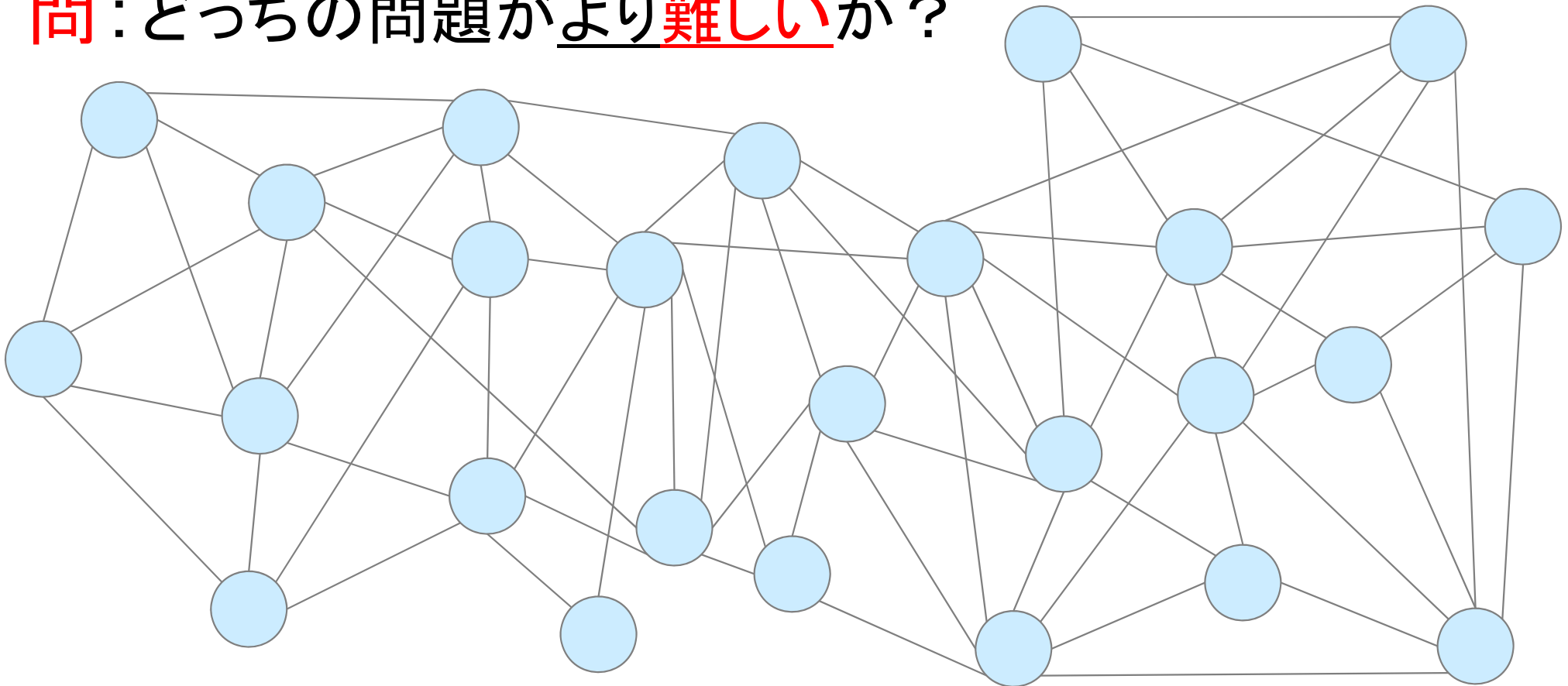
※NP完全問題とは, クラスNPに属し, かつ, NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題
polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」未解決 (7つのミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ)

※ P = Polynomial × NP ≠ Not Polynomial
※ NP = Non-deterministic Polynomial

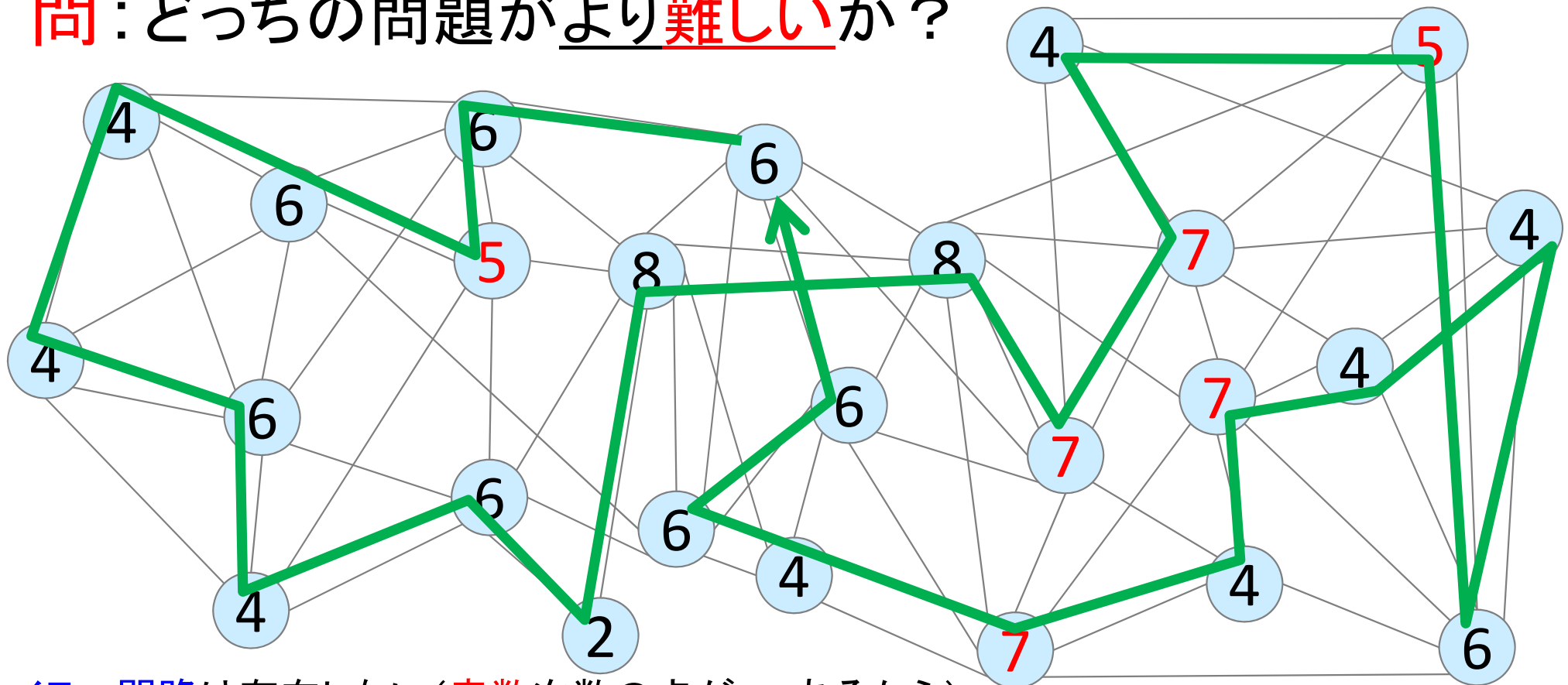
2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- **問**：どっちの問題がより難しいか？



2種類の閉路 (解答例)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- **問**: どちらの問題がより難しいか？



オイラー閉路は存在しない(奇数次数の点が6つあるから)

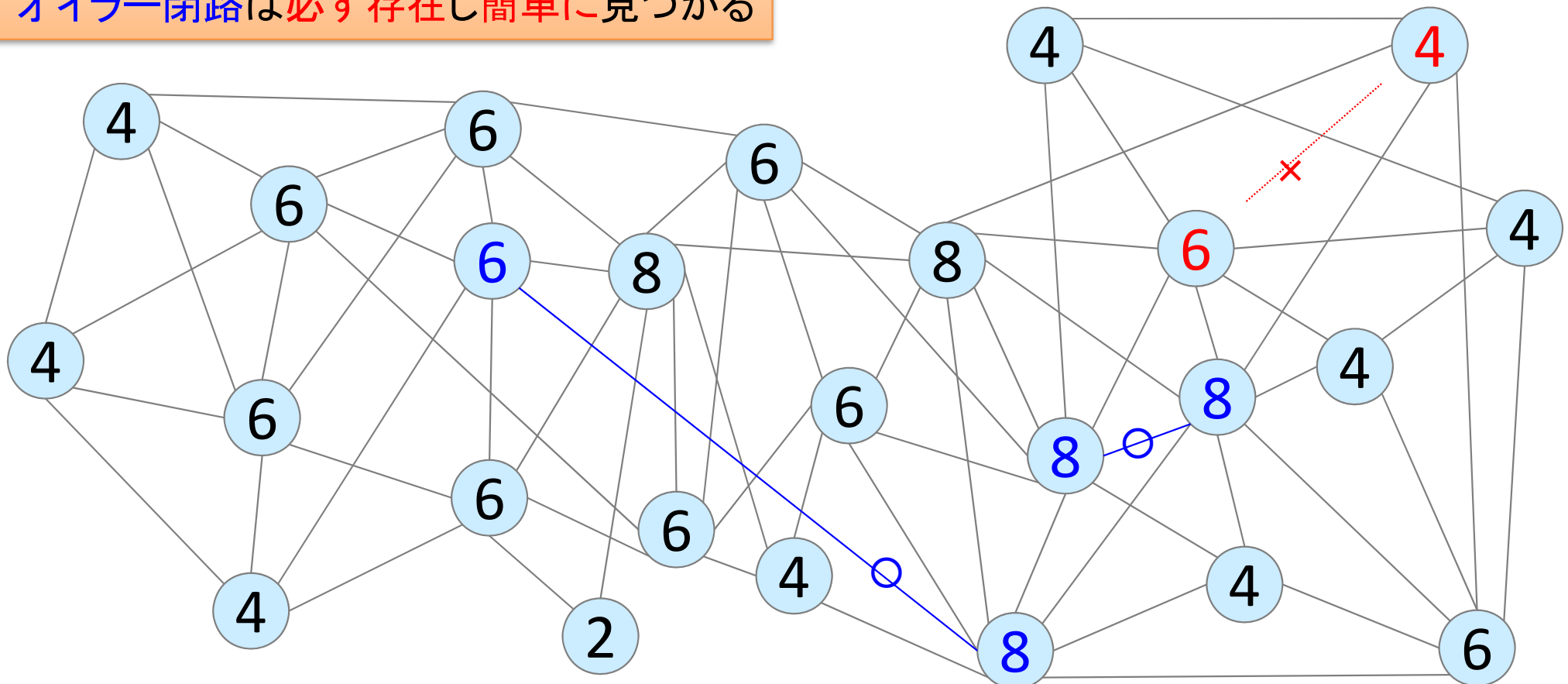
2種類の閉路 (解説)

オイラー閉路は(存在する場合)
本当に簡単に見つけられる？

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

奇数次数の点があれば(あるときは必ず偶数個)
オイラー閉路は存在しない
次数が全て偶数なら
オイラー閉路は必ず存在し簡単に見つかる

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



※先ほどの例題の奇数次数点に枝を2追加・1削除し、全て偶数にした。オイラー閉路を見つけよう

2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle

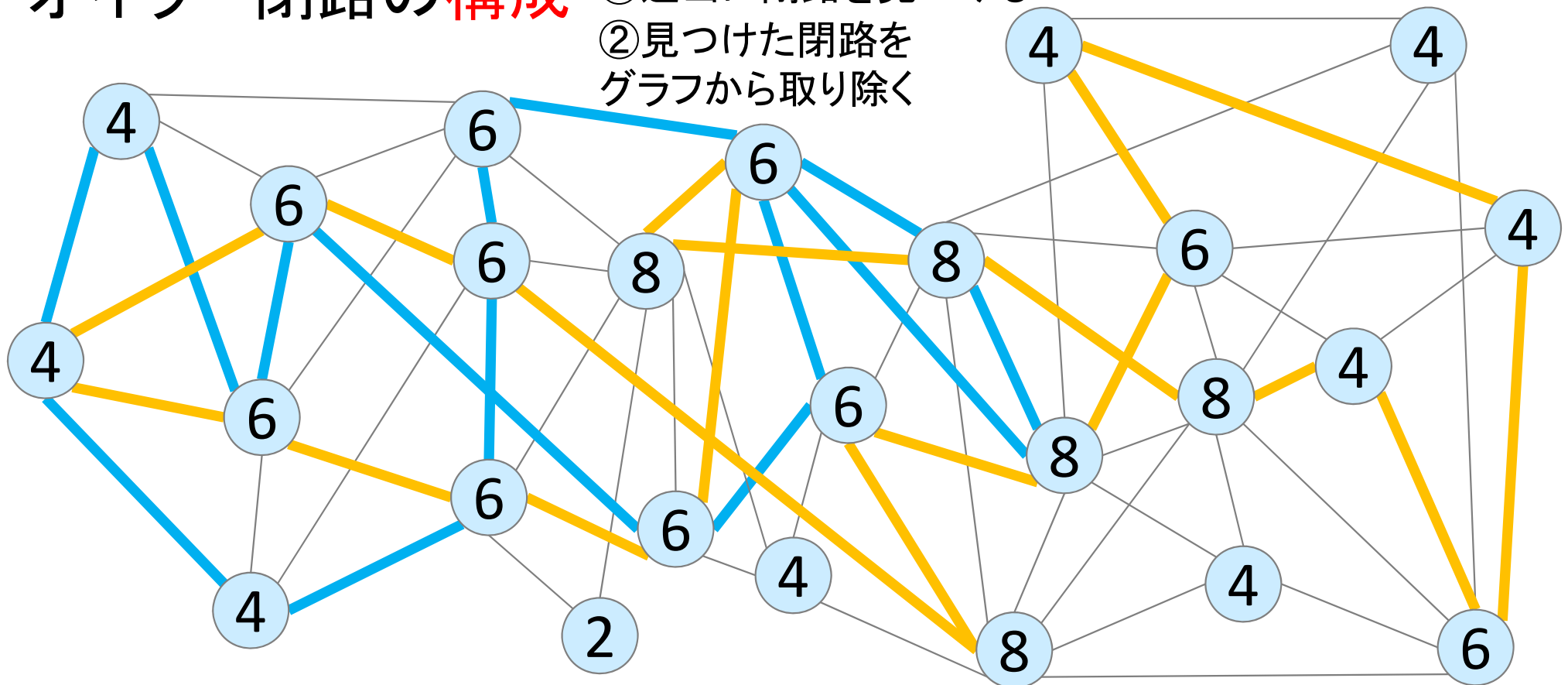
- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成

- ① 適当に閉路を見つける
- ② 見つけた閉路を
グラフから取り除く



2種類の閉路 (解説)

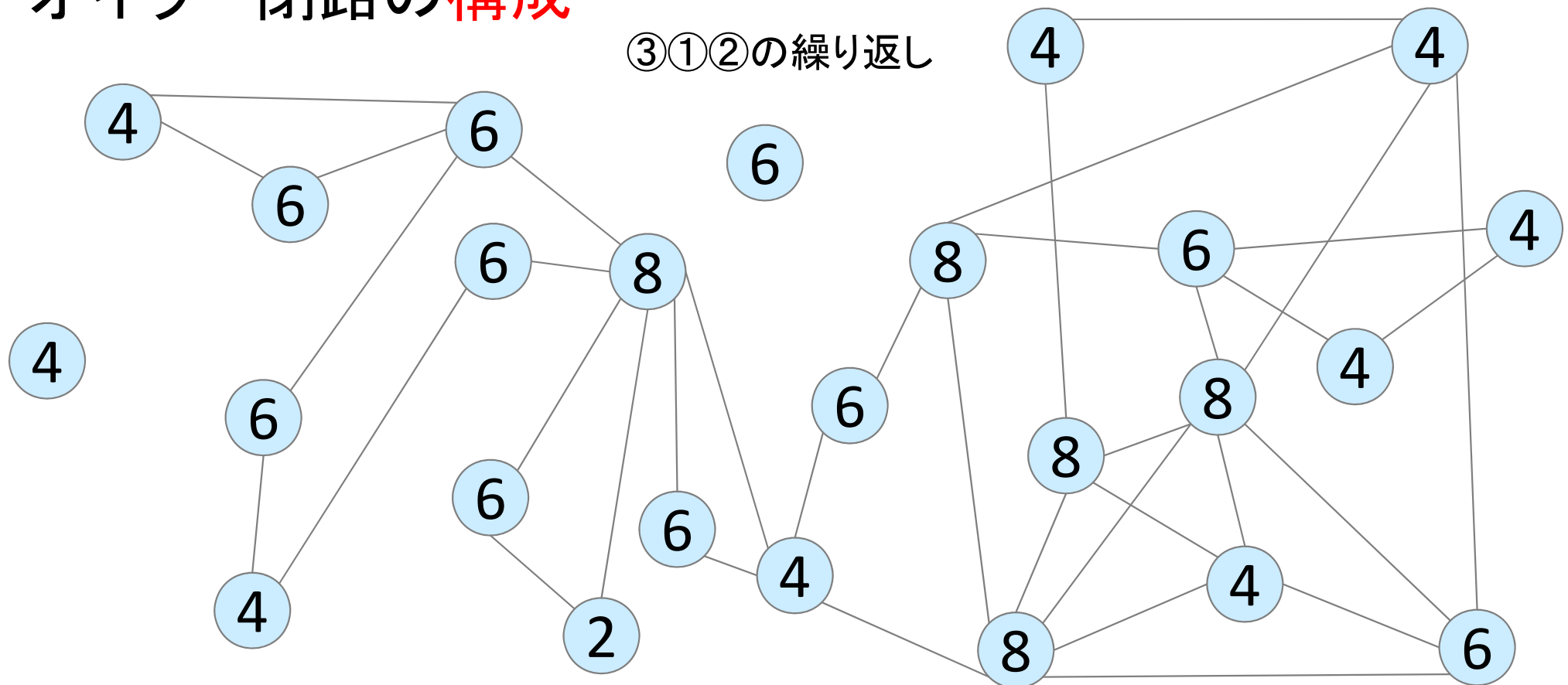
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成



2種類の閉路 (解説)

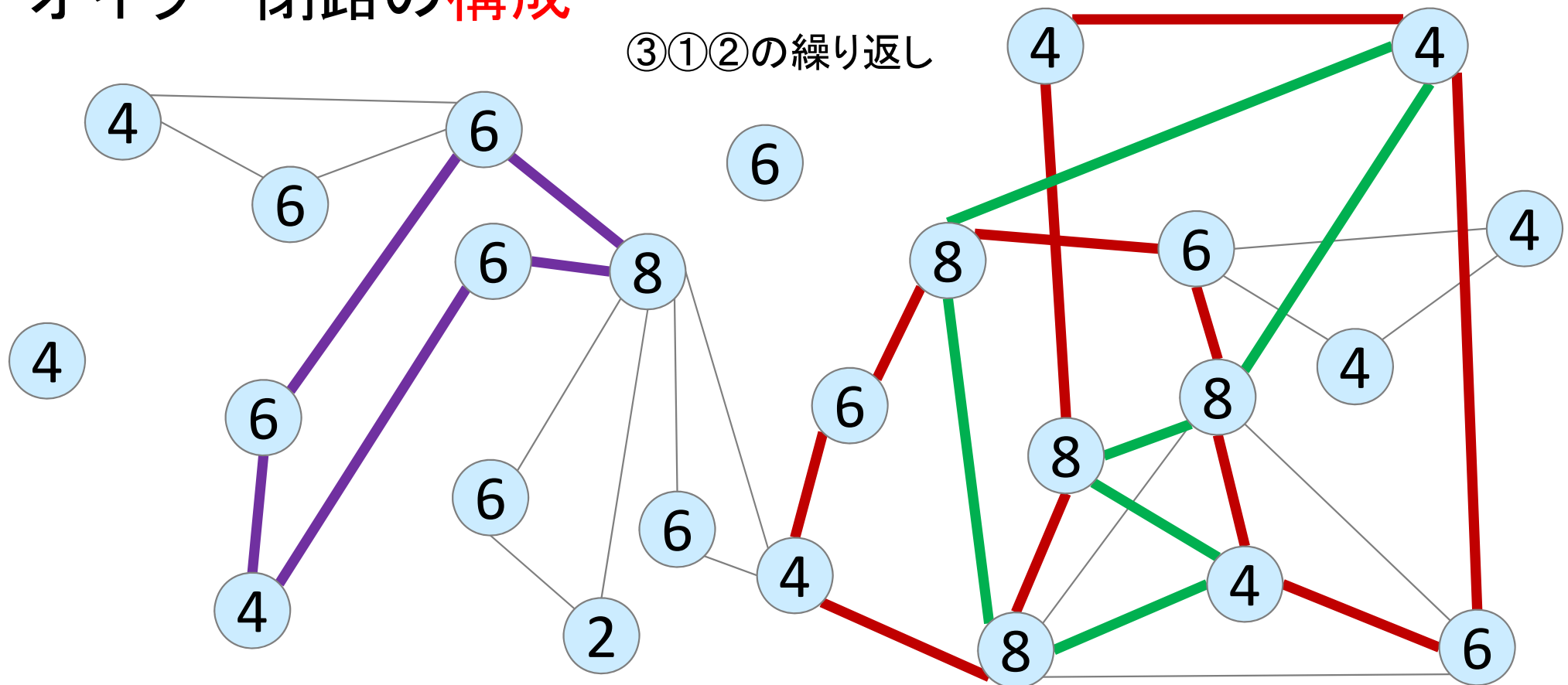
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

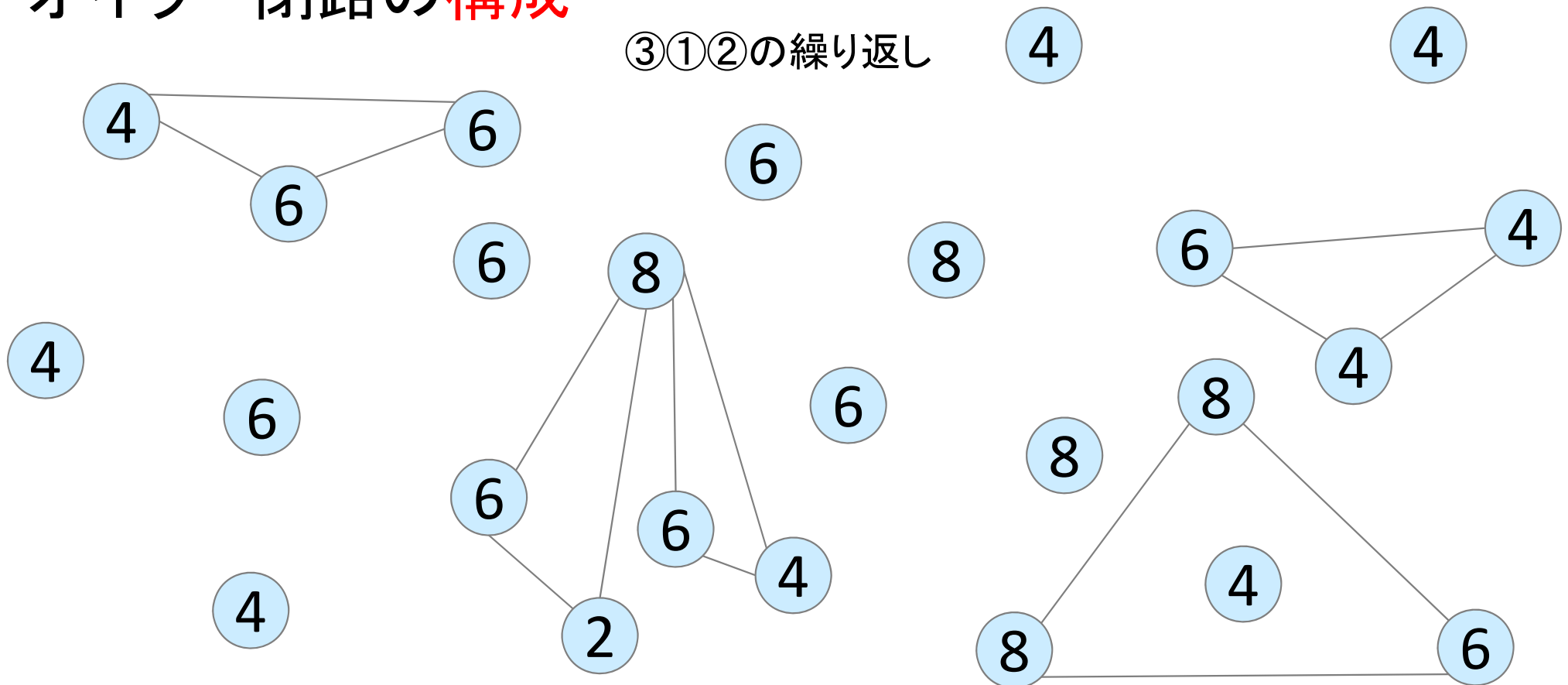
- オイラー閉路の構成



2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の**構成**

③①②の繰り返し



2種類の閉路 (解説)

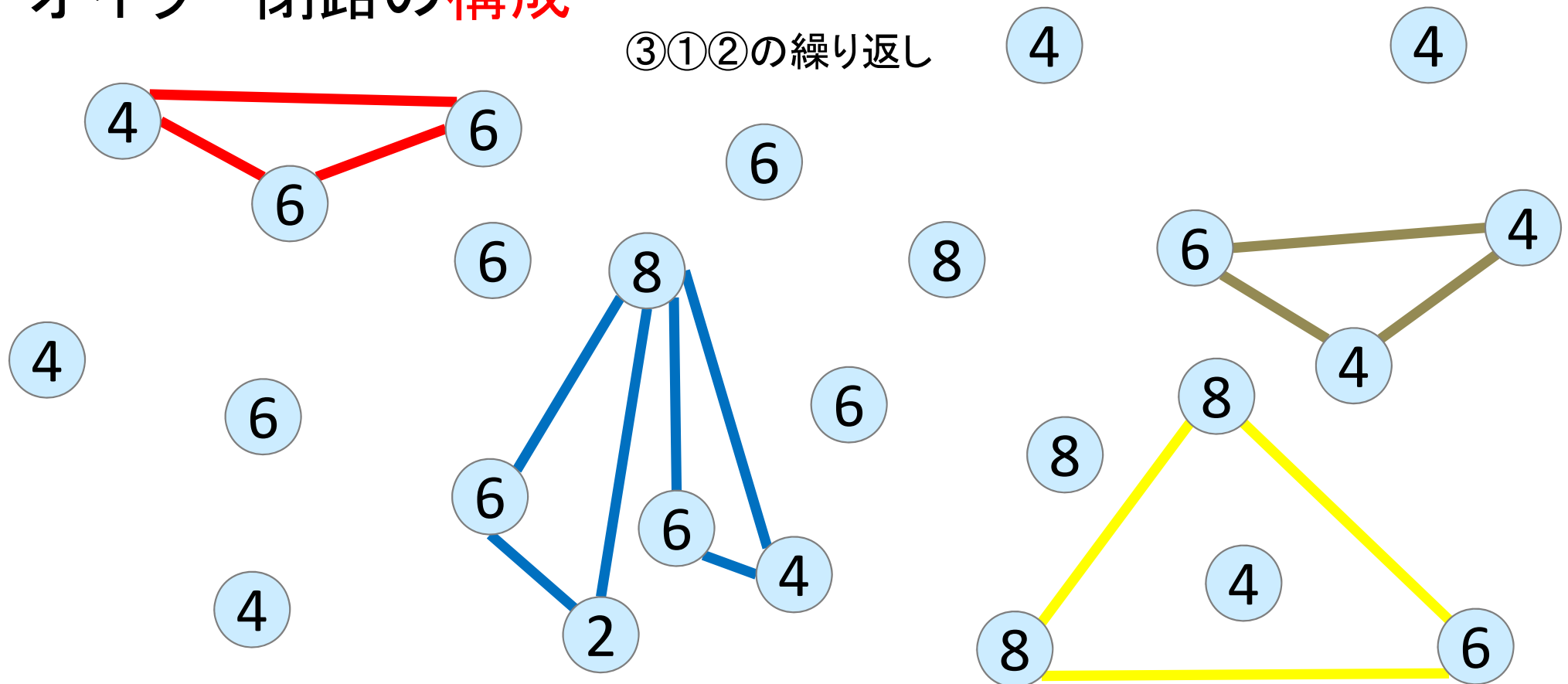
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

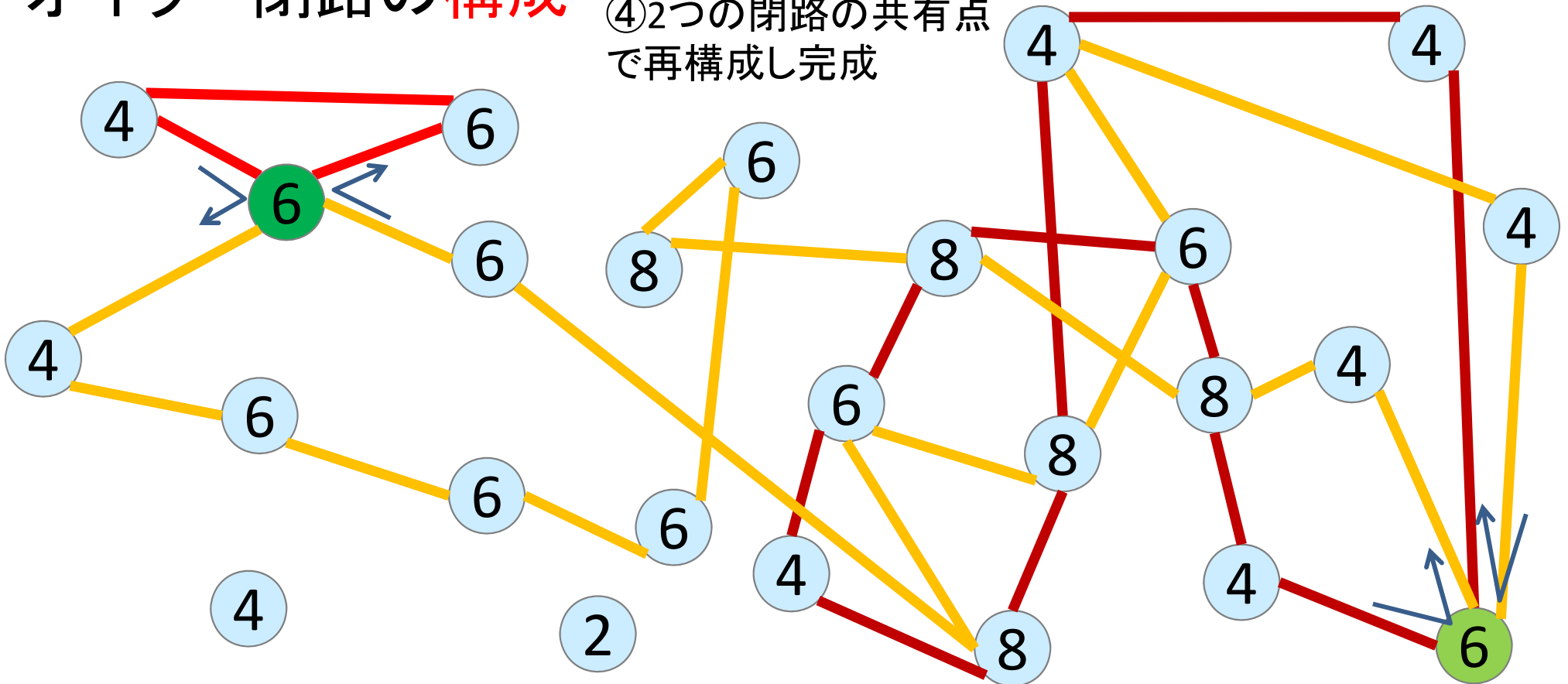
- オイラー閉路の構成



2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の**構成** ④2つの閉路の共有点

④2つの閉路の共有点
で再構成し完成



四色定理

【四色定理】

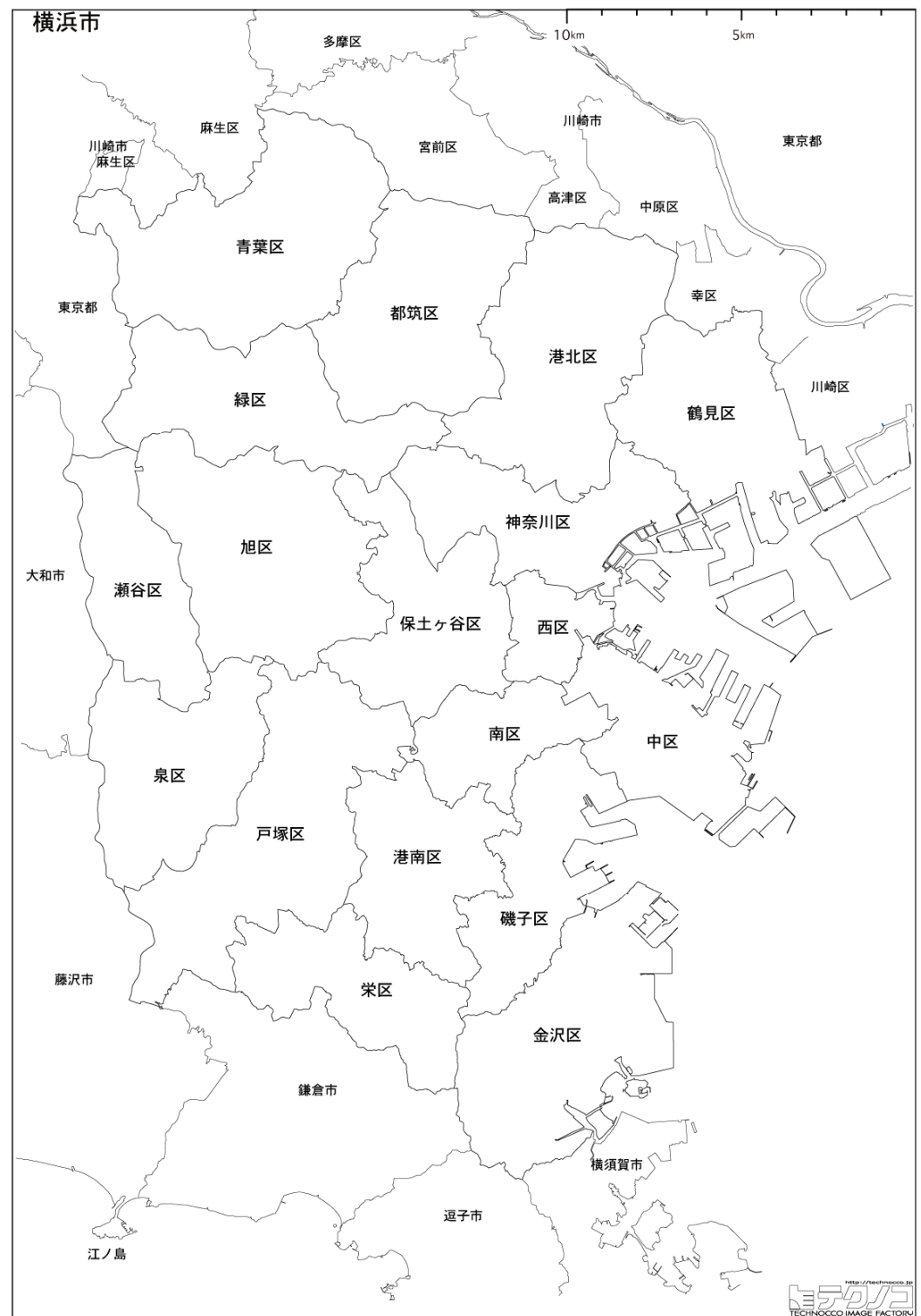
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



四色定理

【四色定理】

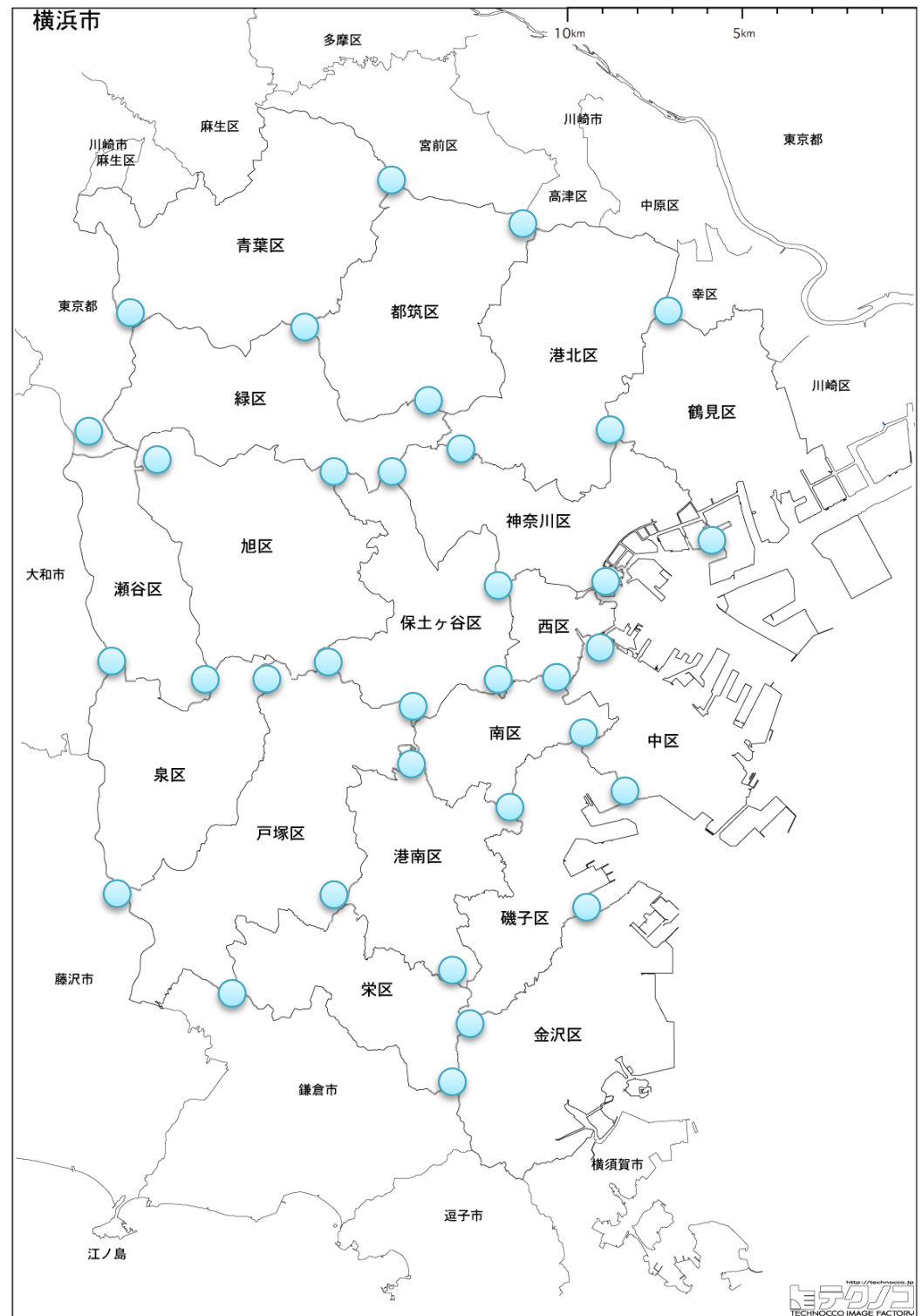
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



四色定理

【四色定理】

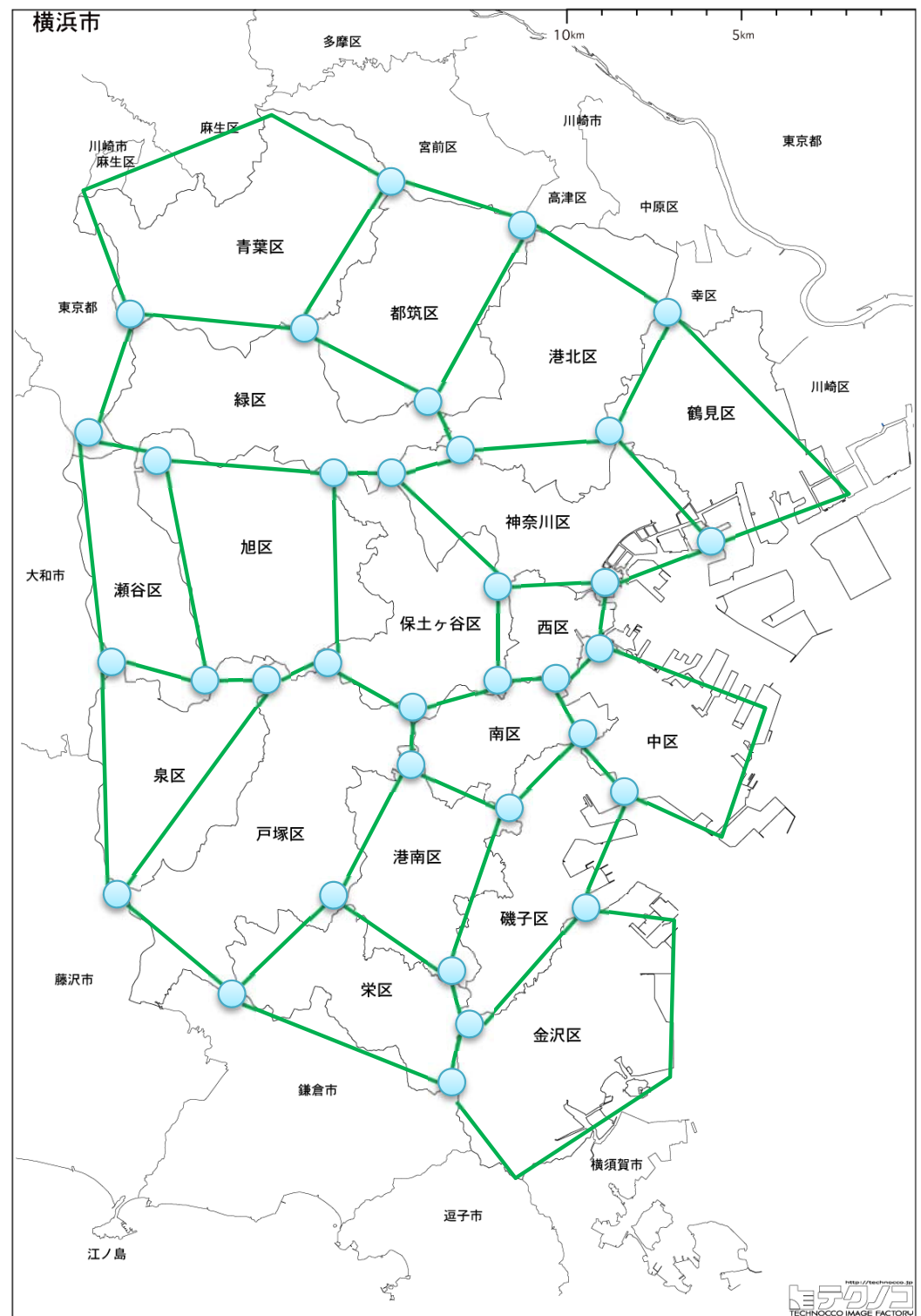
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



四色定理

【四色定理】

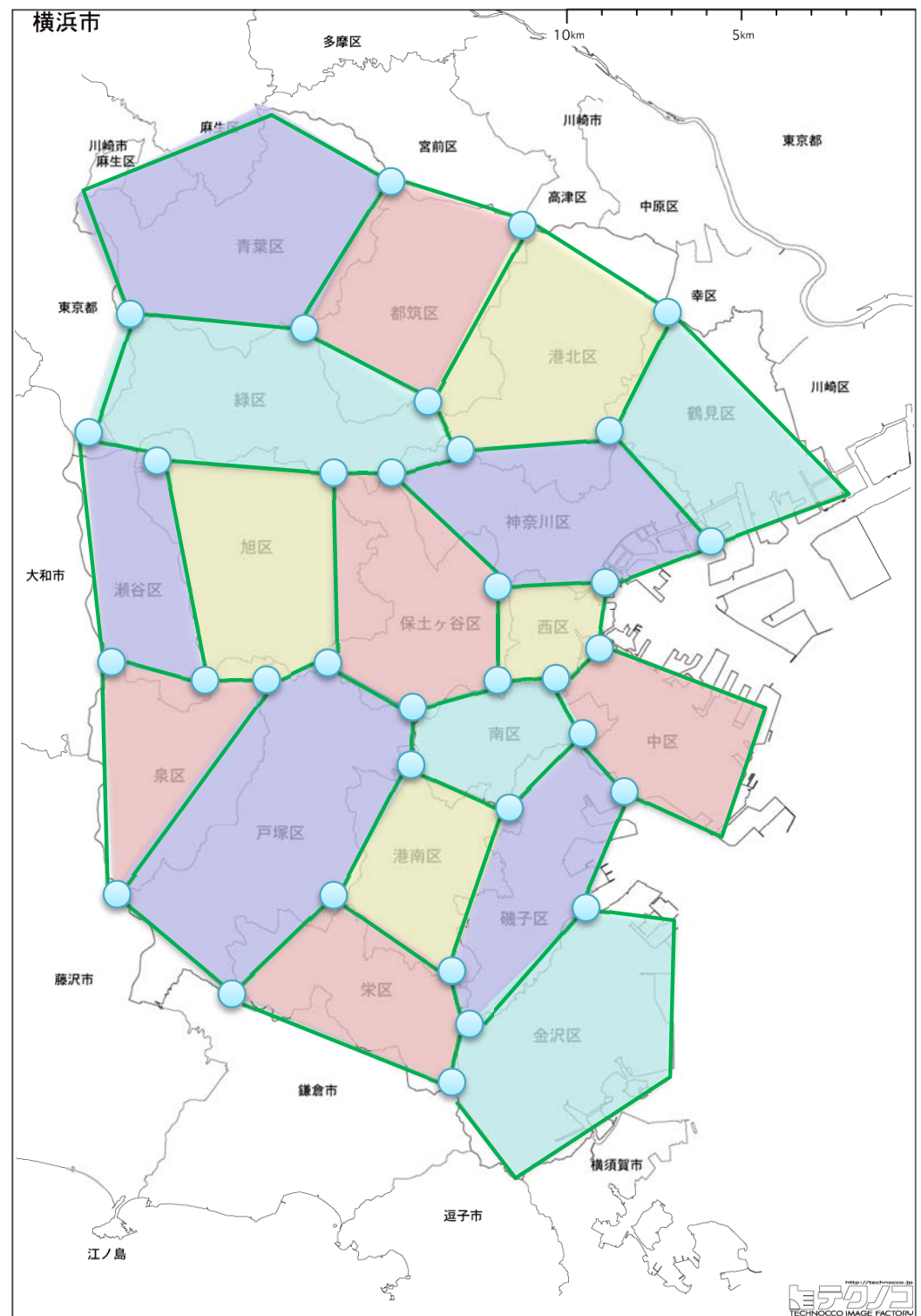
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

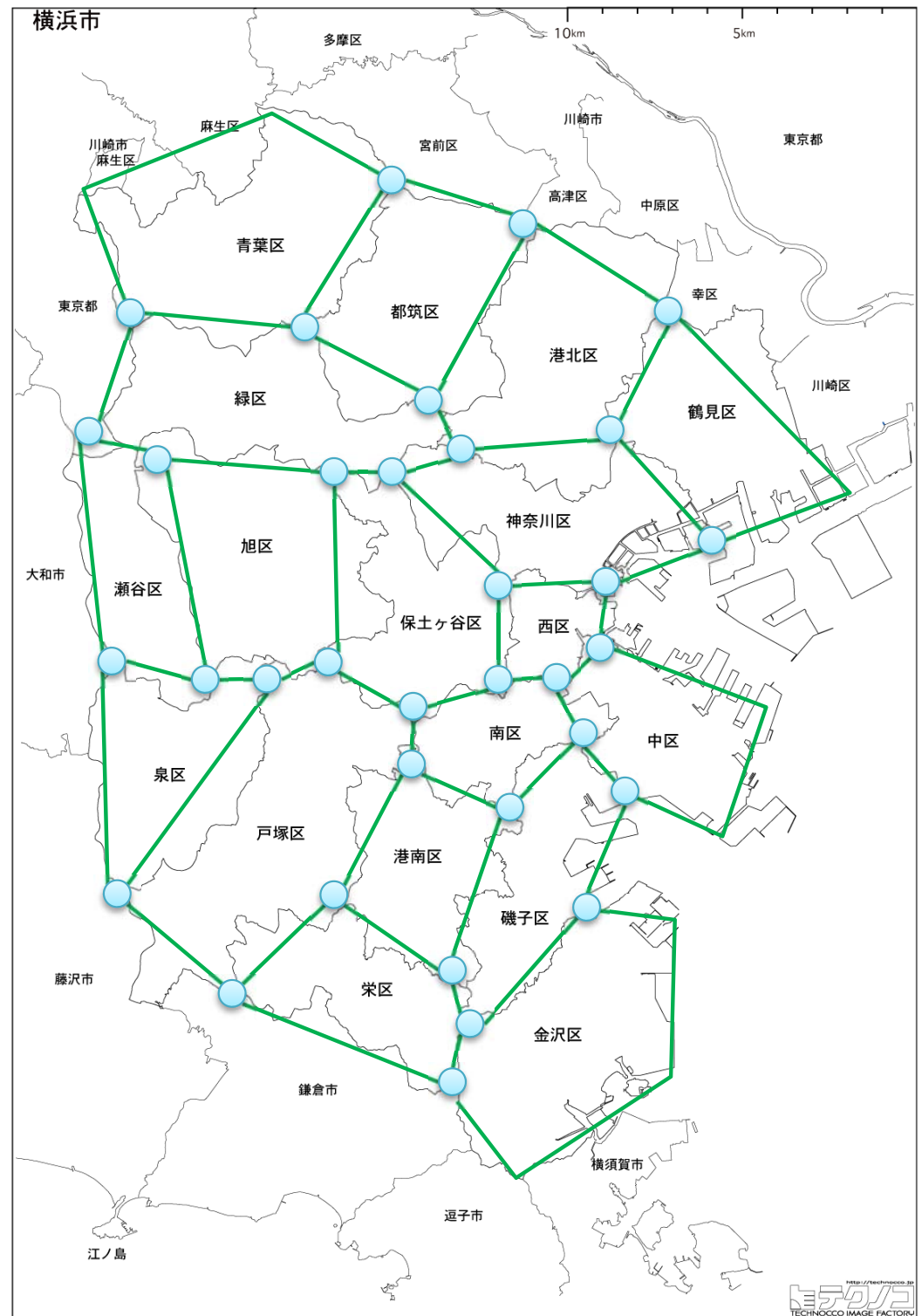
区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

〔練習〕
横浜市(18区)のグラフについて、
ハミルトン閉路が**存在する**なら、
それを求めよ



【ハミルトン閉路】 全ての点を通る閉路

[illegible]

四色定理 と ハミルトン閉路

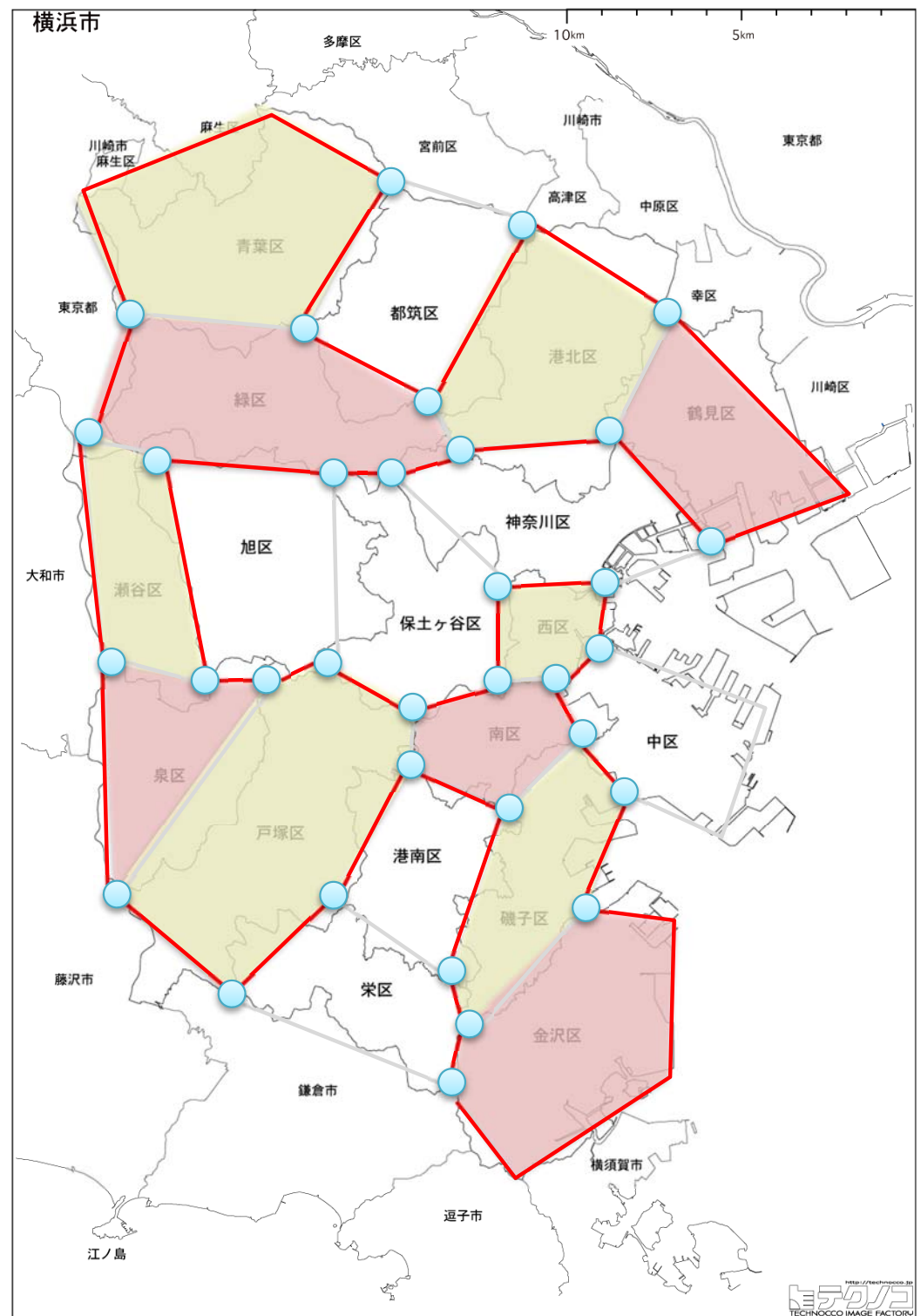
【四色定理】

平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路
が存在すれば、閉路の内側
と外側が出来る。内側を2色
交互に、外側を2色交互に
塗れば4彩色ができる

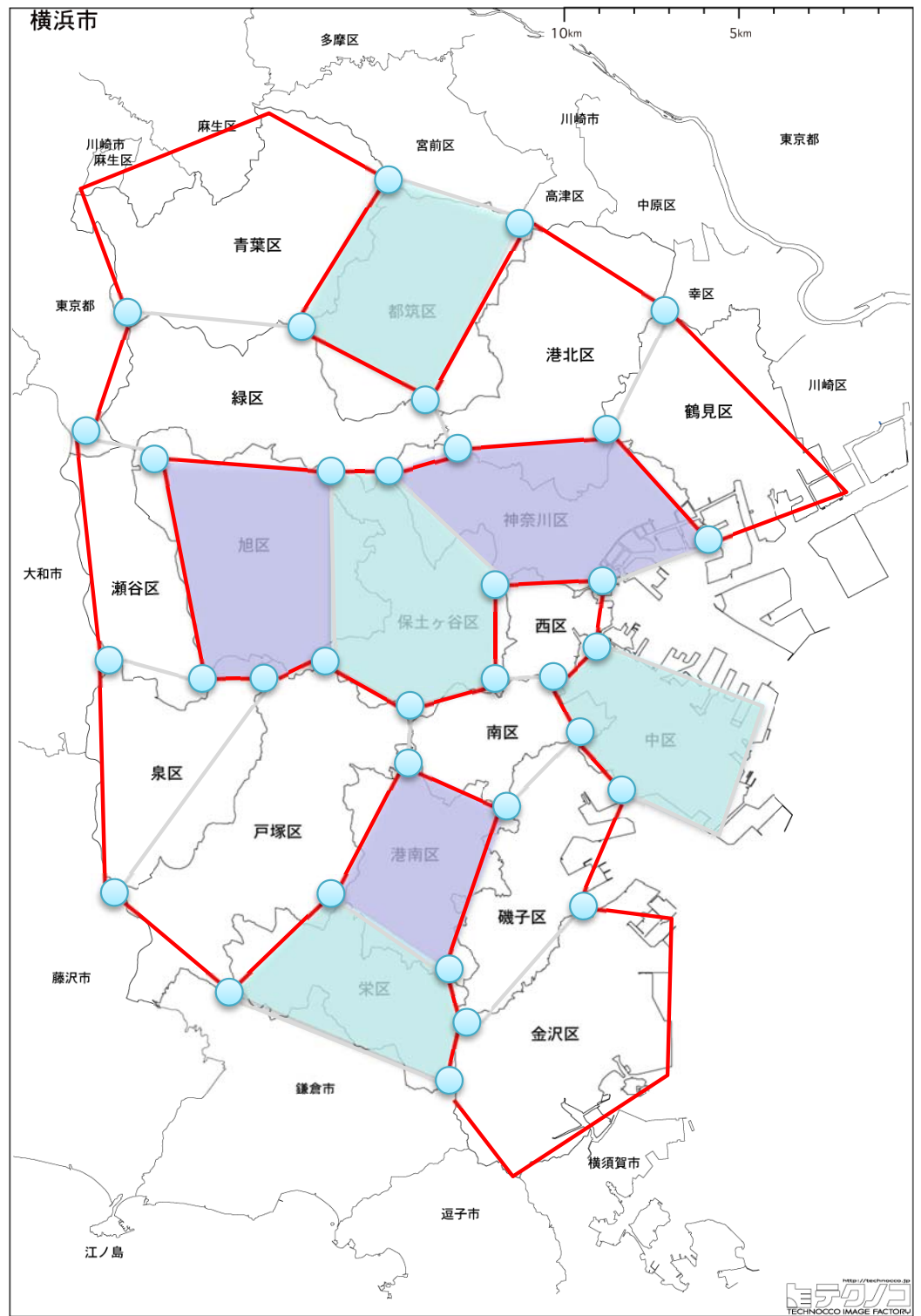


ハミルトン閉路

平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば、閉路の内側と外側が出来る。内側を2色交互に、外側を2色交互に塗れば4彩色ができる



四色定理 と ハミルトン閉路

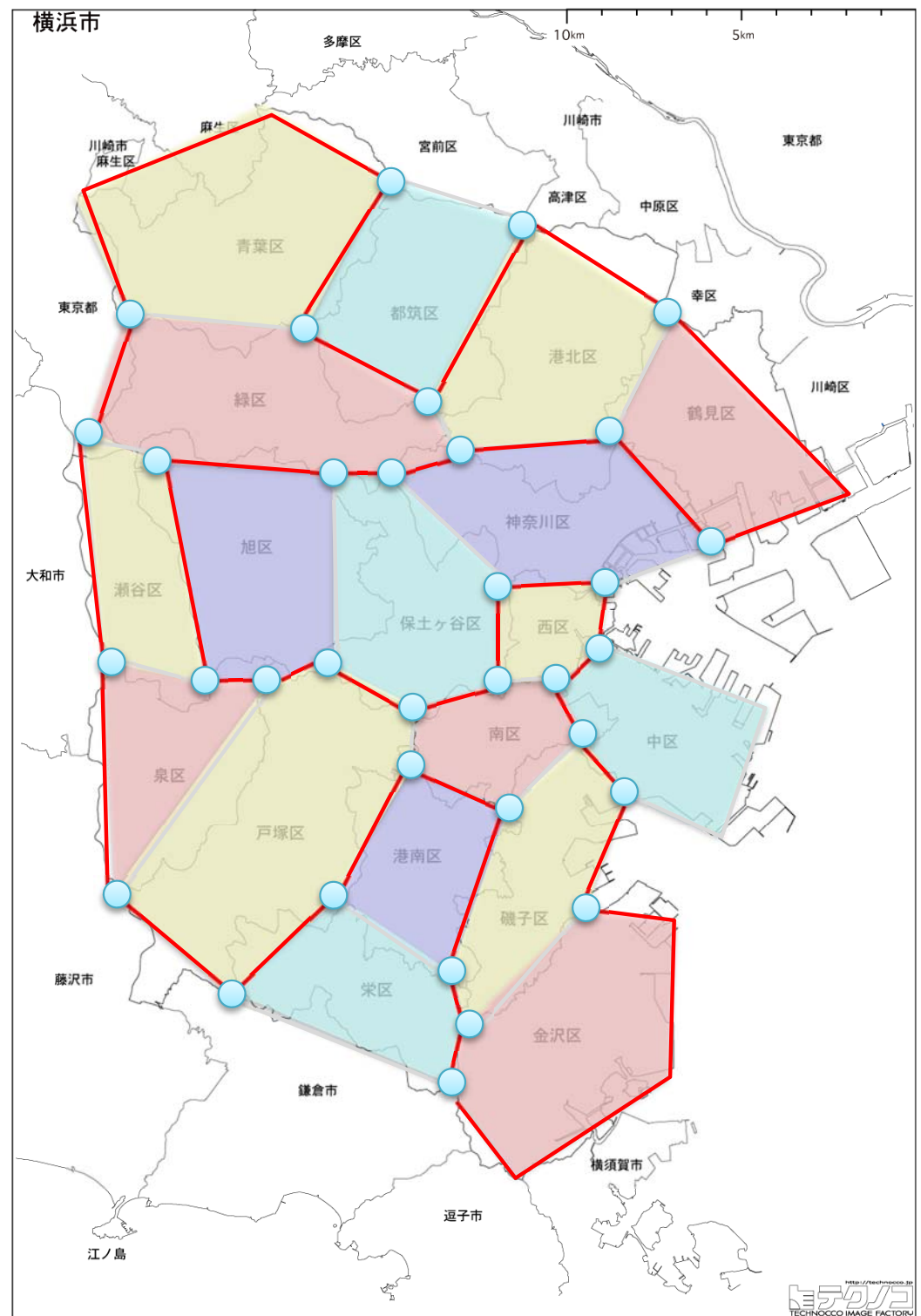
【四色定理】

平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

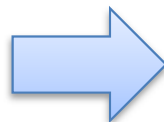
平面グラフでハミルトン閉路
が存在すれば、閉路の内側
と外側が出来る。内側を2色
交互に、外側を2色交互に
塗れば4彩色ができる



参考文献

- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'',
Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'',
CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」
産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展: テクノコ白地図イラスト (<http://technocco.jp/>) 2015.5.4

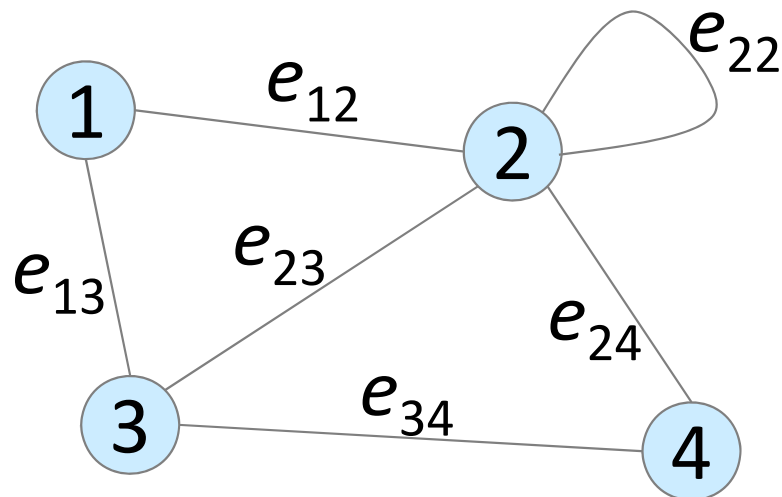
もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！



- ✓ 「ネットワークモデル分析」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

Graph

• グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



注) どんなグラフも表現出来るわけではない

- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

有向グラフの場合はどうなるか考えてみよう

- 枝が出る $\rightarrow -1$
- 枝が入る $\rightarrow +1$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

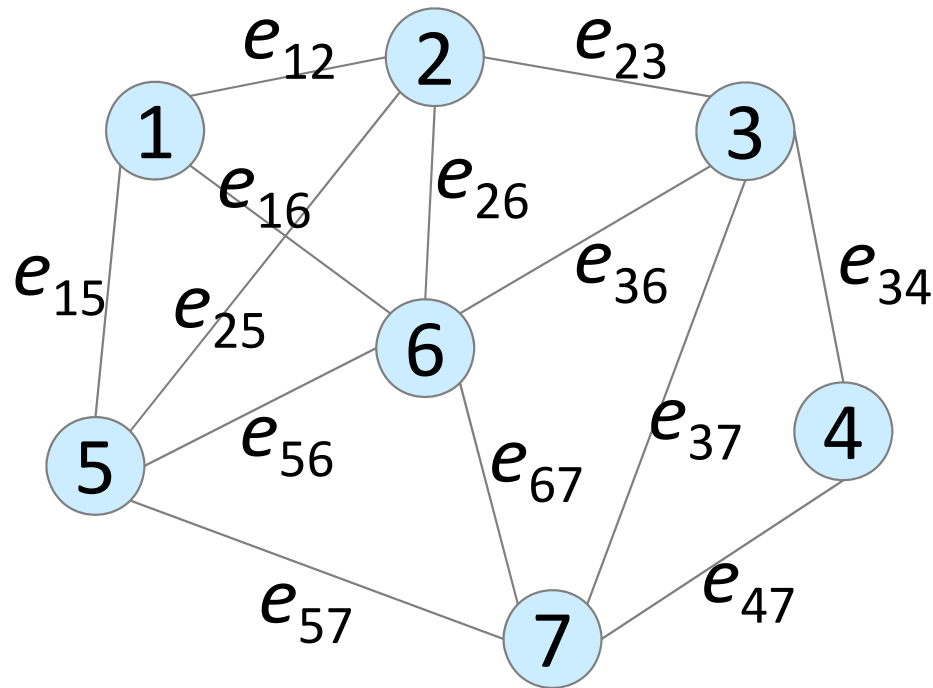
接続行列

incidence matrix

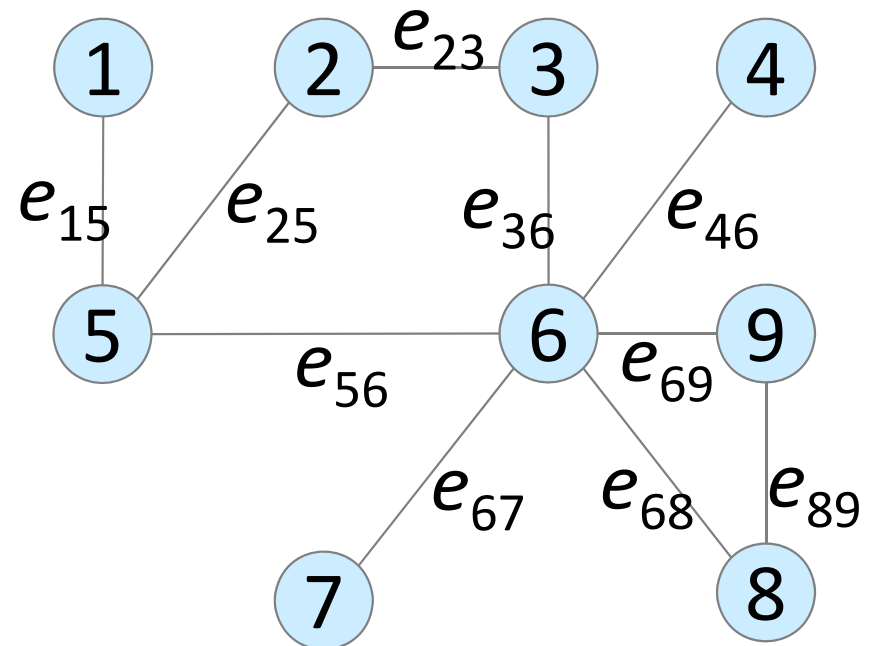
練習1

- **問**: 次のグラフ $G=(V,E)$ の点集合 V と枝集合 E を示せ.
また, グラフを接続行列と隣接行列で表せ.
さらに, 各点の次数を求めよ

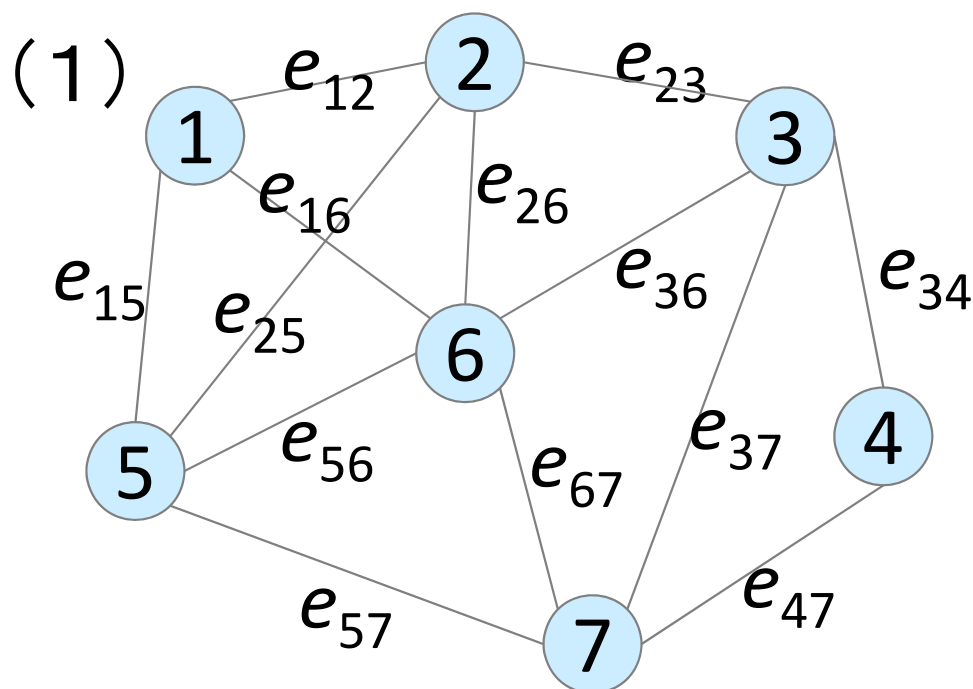
(1)



(2)



練習1(解答)



隣接行列

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	1	1	0
2	1	0	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1	1	0

接続行列

点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

枝集合 $E = \{e_{12}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{36}, e_{37}, e_{47}, e_{56}, e_{57}, e_{67}\}$

各点の次数 degree

点1(3), 点2(4), 点3(4), 点4(2),

点5(4), 点6(5), 点7(4)

	e_{12}	e_{15}	e_{16}	e_{23}	e_{25}	e_{26}	e_{34}	e_{36}	e_{37}	e_{47}	e_{56}	e_{57}	e_{67}
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1

練習2

- 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

(2) 接続行列

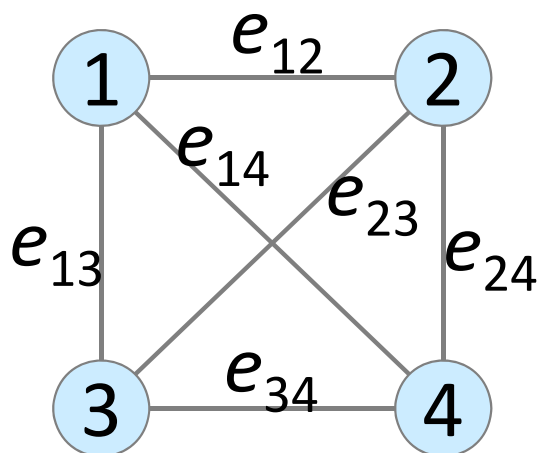
$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} e_{12} \ e_{13} \ e_{14} \ e_{23} \ e_{24} \ e_{34} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

練習2(解答)

- 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$



(2) 接続行列

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{23} \quad e_{24} \quad e_{34} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

