

2017/5/12 Fri.

問題解決技法入門

2. Graph Theory

1. グラフの基礎

堀田 敬介

Graph

厳密には
 $G=(f, V, E)$
 $f: E \rightarrow V \times V$

- グラフ Graph $G=(V,E)$
 - 点と枝, およびその接続関係

- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\}$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 e_{12} は点1に接続している (An edge e_{12} is incident to 1.)

Graph

- グラフ $G=(V,E)$
 - 無向グラフ undirected graph

- 有向グラフ directed graph

Graph

- グラフ $G=(V,E)$
 - 次数 degree ... 点に接続している枝の本数
 - Ex) 点1の次数は2
 - Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)

- 入次数...有向グラフで入ってくる枝の本数
- 出次数...有向グラフで出ていく枝の本数
 - Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト
 - コスト cost
 - ラベル label
 - ポテンシャル potential
 - 重み weight
 - 流量 flow
 - 容量 capacity
 - 距離 distance
 - etc.

※点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は、コストcostとよばれる。コストには、上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する
※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが、別の意味で使われることが多い言葉なので、「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

Graph

もっと細かい定義...

- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

- グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路
 - 路 path
 - Ex) 1, e_{13} , 3, e_{23} , 2, e_{24} , 4
 - Ex) 1, 3, 2, 4
 - Ex) e_{13} , e_{23} , e_{24}
 - 閉路 cycle
 - Ex) 1, e_{13} , 3, e_{23} , 2, e_{12} , 1
 - Ex) 1, 3, 2, 1
 - Ex) e_{13} , e_{23} , e_{12}

Graph

- 様々なグラフ(1)
 - 木 tree
 - 連結で閉路を含まない無向グラフ
 - 森 forest
 - 閉路を含まない無向グラフ

- 連結成分 connected component

Graph

- 様々なグラフ(2)
 - 平面グラフ plane graph※
 - ※平面グラフplane graphと同型なグラフを平面的グラフplanar graphといいます
 - 完全グラフ complete graph
 - K_3 , K_4 , K_5
 - cf. クリーク clique
 - 二部グラフ bipartite graph
 - 完全二部グラフ $K_{3,3}$
 - V_1 , V_2

- ✓ 最大クリーク
- ✓ 友達の集合
- ✓ 点彩色・辺彩色

練習

問:これは何？ 木？ 平面？ 完全？ 二部？

(1)

(2)

(3)

	(1)	(2)	(3)
木	?	?	?
平面	?	?	?
完全	?	?	?
二部	?	?	?

練習(解答)

問:これは何？

(1)

(2)

(3)

	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足: 平面グラフ(平面的グラフ)

定理: グラフが平面に描画できるための必要十分条件は,
 K_5 , $K_{3,3}$ のどちらも位相的マイナーとしてみないこと

(Kuratowski, 1930)

縮約

縮約

縮約

縮約

$K_{3,3}$

参考: Graph を使って何をする？

全域木 spanning tree

- 最小全域木 minimum spanning tree

フロー flow, カット cut

- 最大流 maximum flow
- 最小カット minimum cut
- 最小費用流 minimum cost flow

マッチ match, 被覆 cover

- 最大マッチング maximum matching
- 最小被覆 minimum covering

補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network

増加道 augmenting path

最大フロー・最小カット定理

劣モジュラ関数 submodular function

最大マッチング・最小被覆定理

ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition

マトロイド matroid

幅優先探索 BFS, Breadth-First Search

深さ有線探索 DFS, Depth-First Search

連結性: k 点連結, k 枝連結

強連結 strongly connected, 半順序 partial order

安定集合 stable set, 独立集合 independent set

Confidential

2

2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1) どの枝(点)から始めても構わない

注2) スタート枝(点)とゴール枝(点)が異なる場合は、それぞれ、

- オイラー路 (path)
- ハミルトン路 (path)

とよぶ

2種類の閉路 (解答例)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

問: どちらの問題がより難しいか?

※与えられたグラフの

オイラー閉路を求める問題は、クラスPに属す(多項式時間で解ける polynomial-time solvable)

ハミルトン閉路を求める問題は、NP完全問題 NP complete problem

※NP完全問題とは、クラスNPに属し、かつ、NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題 polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」未解決(7つのミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ)

※ P = Polynomial ✖ NP ≠ Not Polynomial

※ NP = Non-deterministic Polynomial

2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

問: どちらの問題がより難しいか?

2種類の閉路 (解答例)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

問: どちらの問題がより難しいか?

オイラー閉路は存在しない(奇数次数の点があるから)

2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路は(存在する場合)本当に簡単に見つけれれる？

奇数次数の点があれば(あるときは必ず偶数個)

オイラー閉路は存在しない

次数が全て偶数なら

オイラー閉路は必ず存在し簡単に見つかる

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

※先ほどの例題の奇数次数点に枝を2追加・1削除し、全て偶数にした。オイラー閉路を見つけよう

2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成
 - ① 適当に閉路を見つける
 - ② 見つけた閉路をグラフから取り除く

2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成
 - ③ ①②の繰り返し

2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成
 - ③ ①②の繰り返し

2種類の閉路 (解説)

オイラー閉路 Eulerian cycle

– グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

– グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

オイラー閉路の構成

③①②の繰り返し

2種類の閉路 (解説)

オイラー閉路 Eulerian cycle

– グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

– グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

オイラー閉路の構成

③①②の繰り返し

2種類の閉路 (解説)

オイラー閉路 Eulerian cycle

– グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

– グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

オイラー閉路の構成

④2つの閉路の共有点で再構成し完成

四色定理

【四色定理】

平面グラフは4彩色可能

(高々4色で塗り分けられる)

与えられたグラフは平面

隣接する地域を別の色で塗る

隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、

辺が変わる箇所を点とする

グラフG=(V,E)を考え、4彩色せよ

地図出展: テクノコ白地図イラスト(<http://technocco.jp/>)

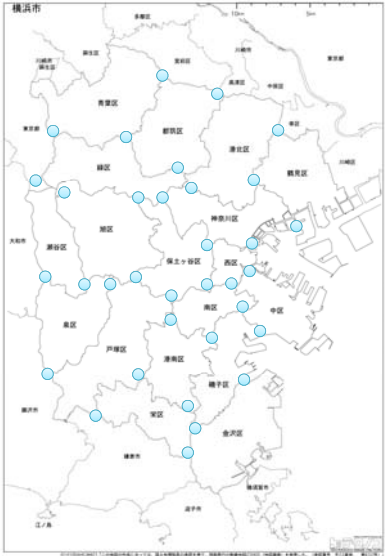
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



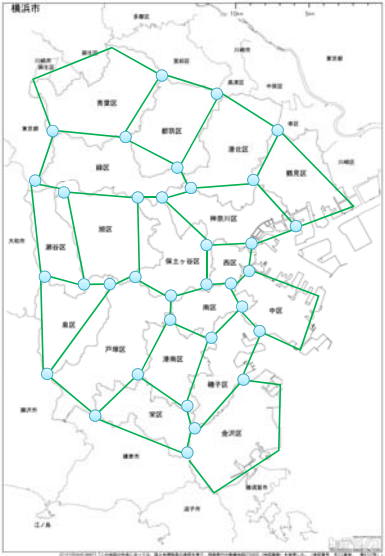
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



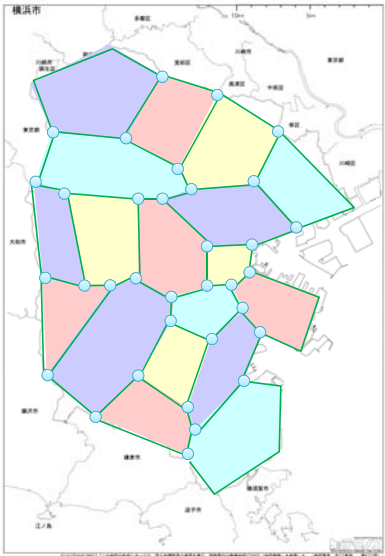
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

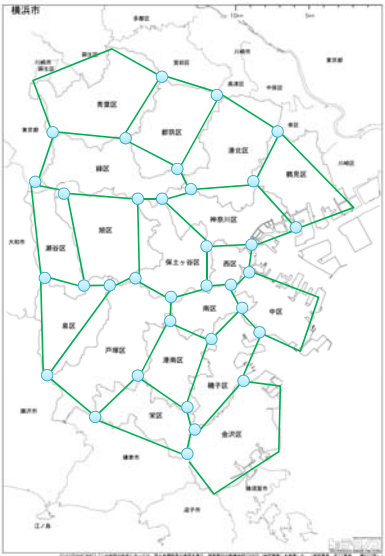
区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

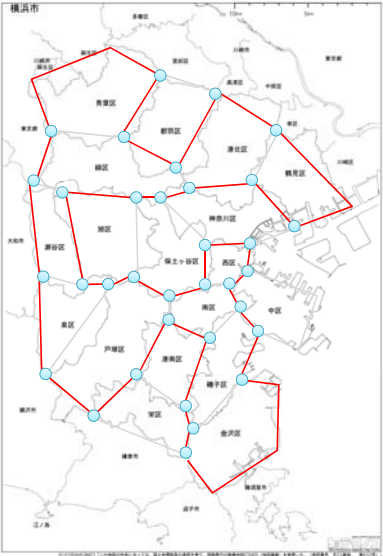
〔練習〕
横浜市(18区)のグラフについて、
ハミルトン閉路が存在するなら、
それを求めよ



ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

〔練習〕
横浜市(18区)のグラフについて、
ハミルトン閉路が存在するなら、
それを求めよ

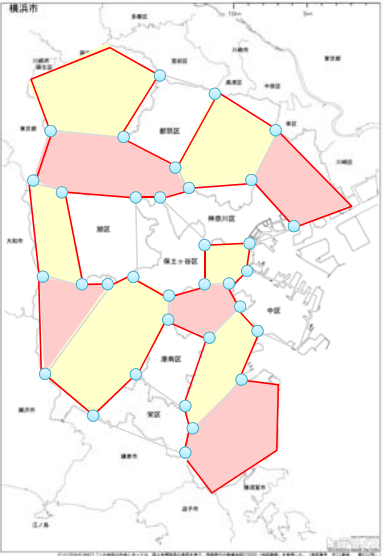


四色定理 と ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路
が存在すれば、閉路の内側
と外側が出来る。内側を2色
交互に、外側を2色交互に
塗れば4彩色ができる

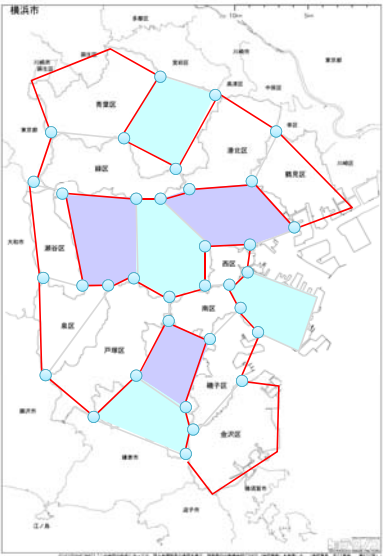


四色定理 と ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路
が存在すれば、閉路の内側
と外側が出来る。内側を2色
交互に、外側を2色交互に
塗れば4彩色ができる

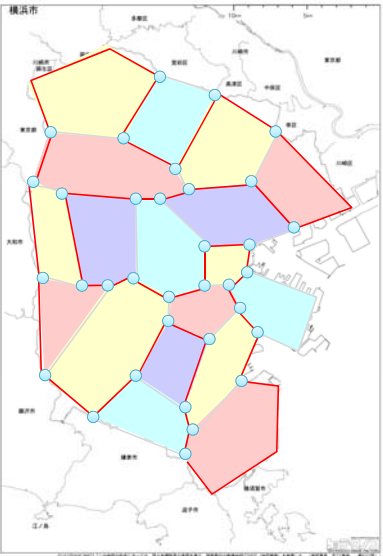


四色定理 と ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路
が存在すれば、閉路の内側
と外側が出来る。内側を2色
交互に、外側を2色交互に
塗れば4彩色ができる



参考文献

- D.Jungnickel, ``Graph, Networks and Algorithms'', Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``Graph Theory and Its Applications'', CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展: テクノコ白地図イラスト (<http://technocco.jp/>) 2015.5.4

もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

➡

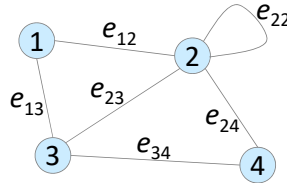
✓ 「ネットワークモデル分析」
✓ 「最適化モデル分析」
✓ etc.

補足: コンピュータ上で処理するため

Graph

注) どんなグラフも表現出来るわけではない
✓ 多重辺
✓ 自己ループ
✓ etc.

• グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



1 2 3 4

1 2 3 4

隣接行列
adjacency matrix

$e_{12} \ e_{13} \ e_{22} \ e_{23} \ e_{24} \ e_{34}$

1 2 3 4

接続行列
incidence matrix

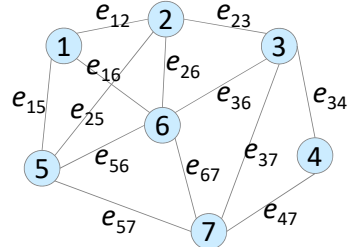
有向グラフの場合はどうなるか考えてみよう
➢ 枝が出る→-1
➢ 枝が入る→+1

補足

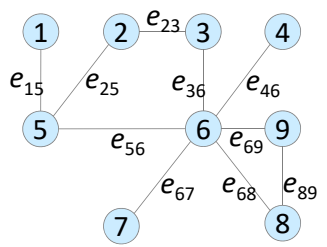
練習1

• 問: 次のグラフ $G=(V,E)$ の点集合 V と枝集合 E を示せ。
また、グラフを接続行列と隣接行列で表せ。
さらに、各点の次数を求めよ

(1)



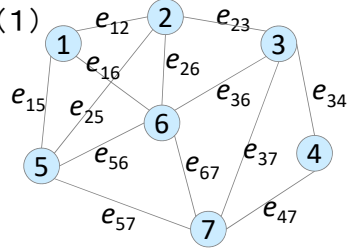
(2)



補足

練習1(解答)

(1)



隣接行列

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

接続行列

$$\begin{matrix} & e_{12} & e_{15} & e_{16} & e_{23} & e_{25} & e_{26} & e_{34} & e_{36} & e_{37} & e_{47} & e_{56} & e_{57} & e_{67} & e_{69} & e_{74} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
枝集合 $E = \{e_{12}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{36}, e_{37}, e_{47}, e_{56}, e_{57}, e_{67}, e_{69}, e_{74}\}$

各点の次数 degree
点1(3), 点2(4), 点3(4), 点4(2),
点5(4), 点6(5), 点7(4)

練習2

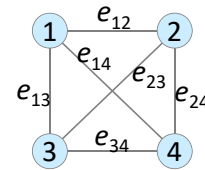
- 問:隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(2) 接続行列

$$\begin{array}{c} \mathbf{e}_{12} \quad \mathbf{e}_{13} \quad \mathbf{e}_{14} \quad \mathbf{e}_{23} \quad \mathbf{e}_{24} \quad \mathbf{e}_{34} \\ \begin{array}{l} \text{1} \\ \text{2} \\ \text{3} \\ \text{4} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$



補足

練習2(解答)

- 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(2) 接続行列

	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{23}	e_{24}	e_{34}
1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	0	1	0	1	1

