

# 問題解決技法入門

2. Graph Theory
3. 安定結婚問題

堀田 敬介

# 浮気しない？カップル

- 6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の好き嫌いを考えずに強引にくっつけちゃうと、浮気する人が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？



どうすれば浮気しないの？

浮気しないってどういうこと？

浮気ってどういう状況で起こる？



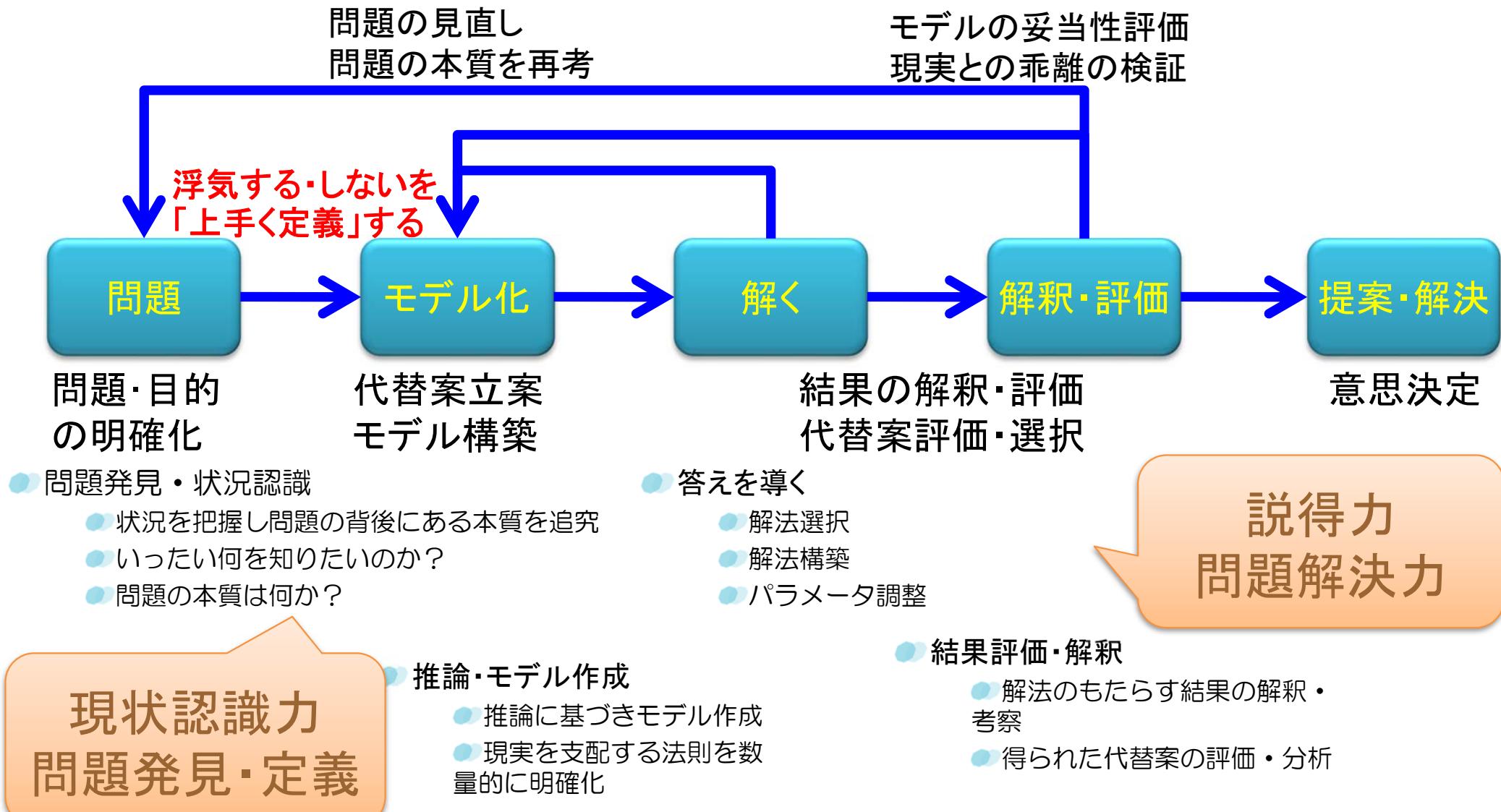
浮気する・しないを「上手く定義」する



# 問題解決

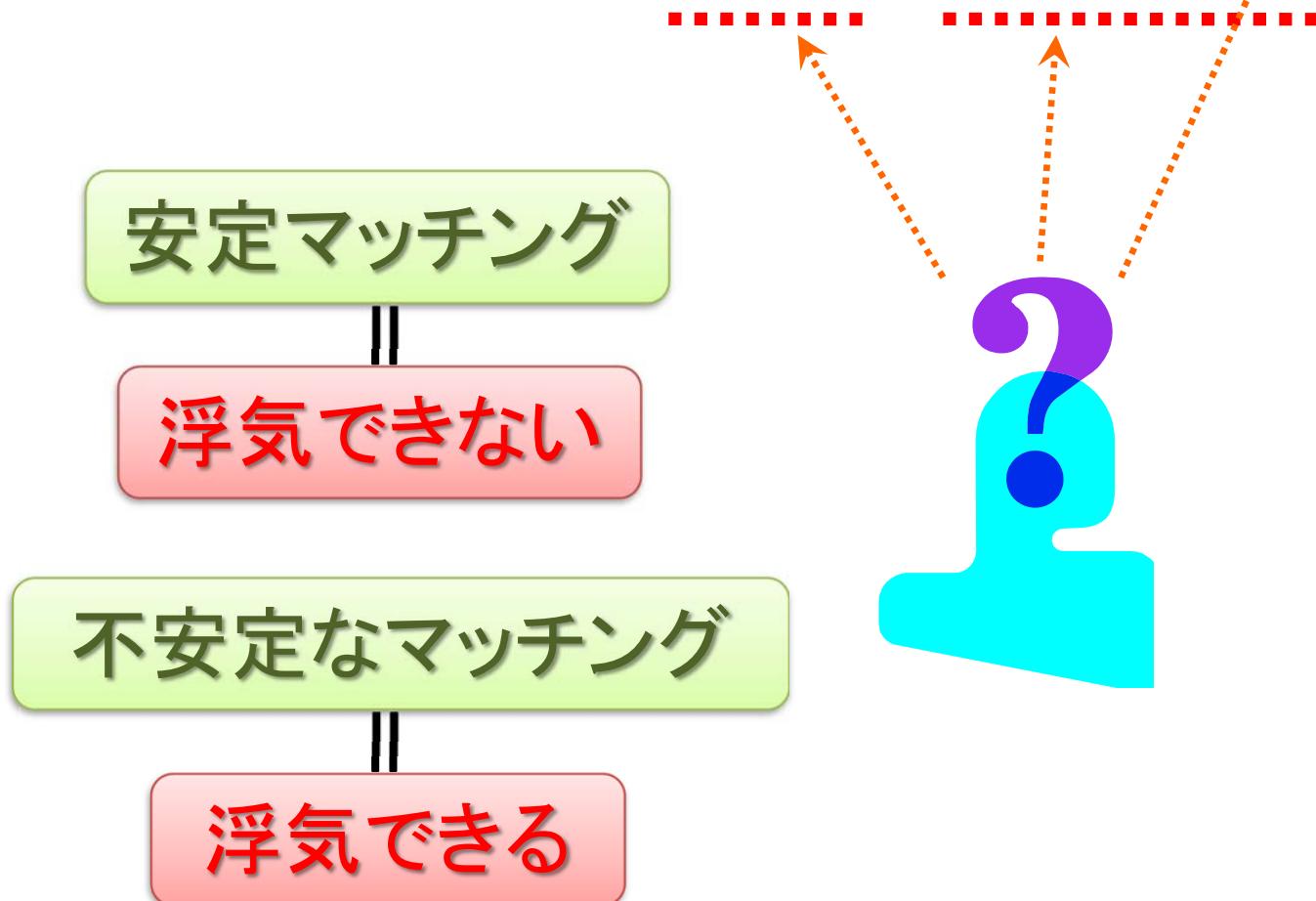
論理的思考力  
データ分析、統計学  
数理的アプローチ

## ・「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

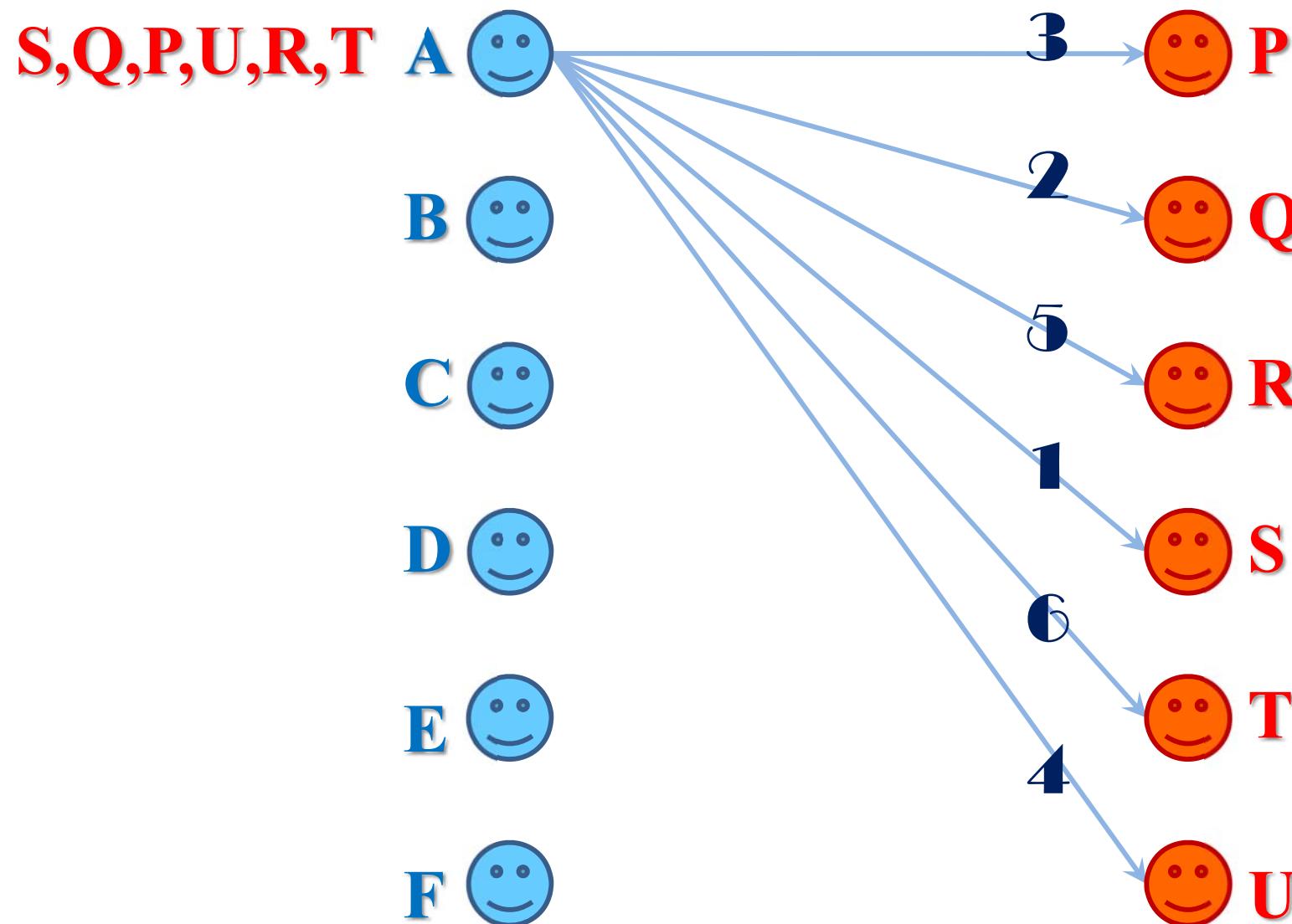


# 安定結婚問題

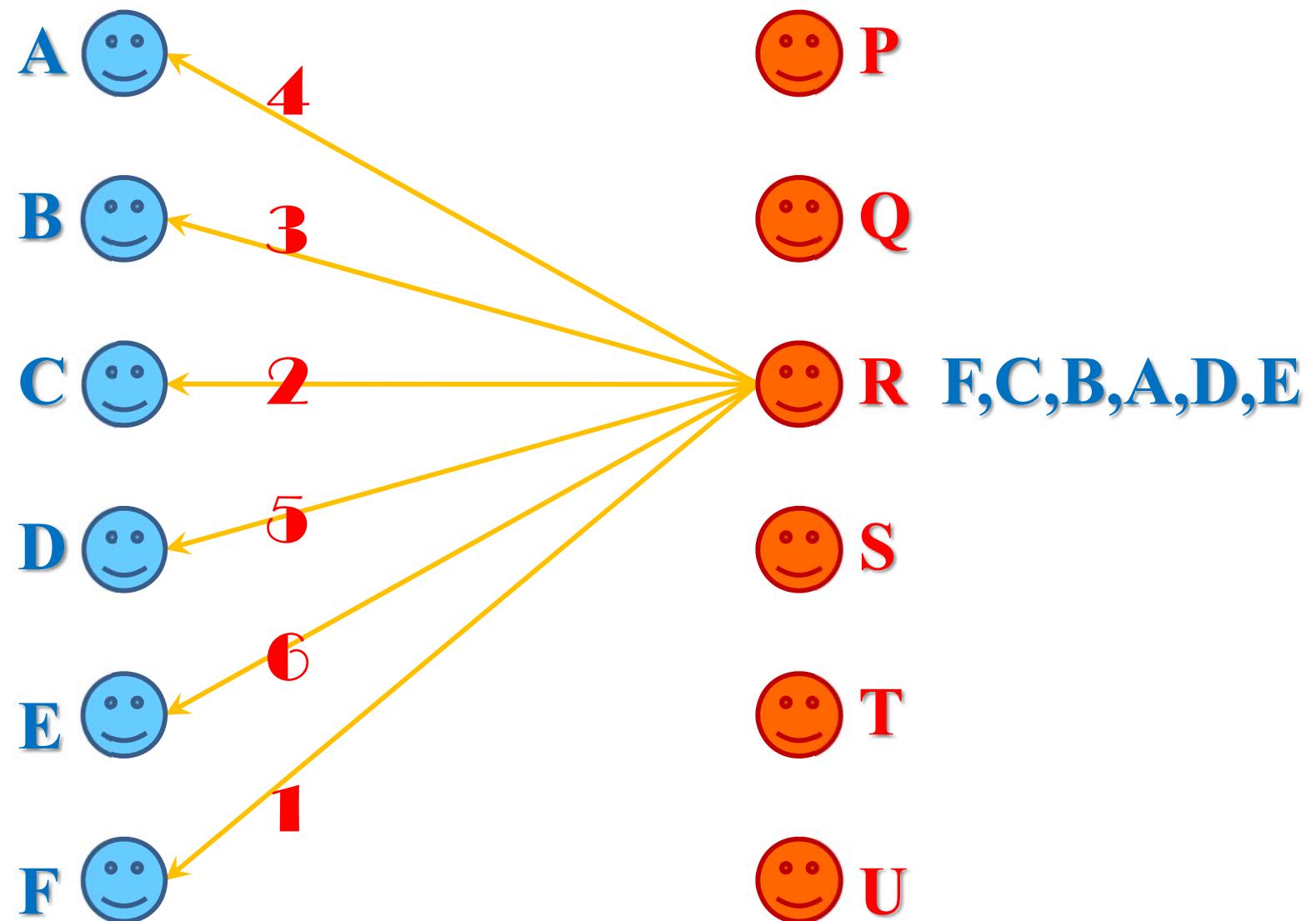
- $n$ 人の男性の集合と,  $m$ 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけたい.



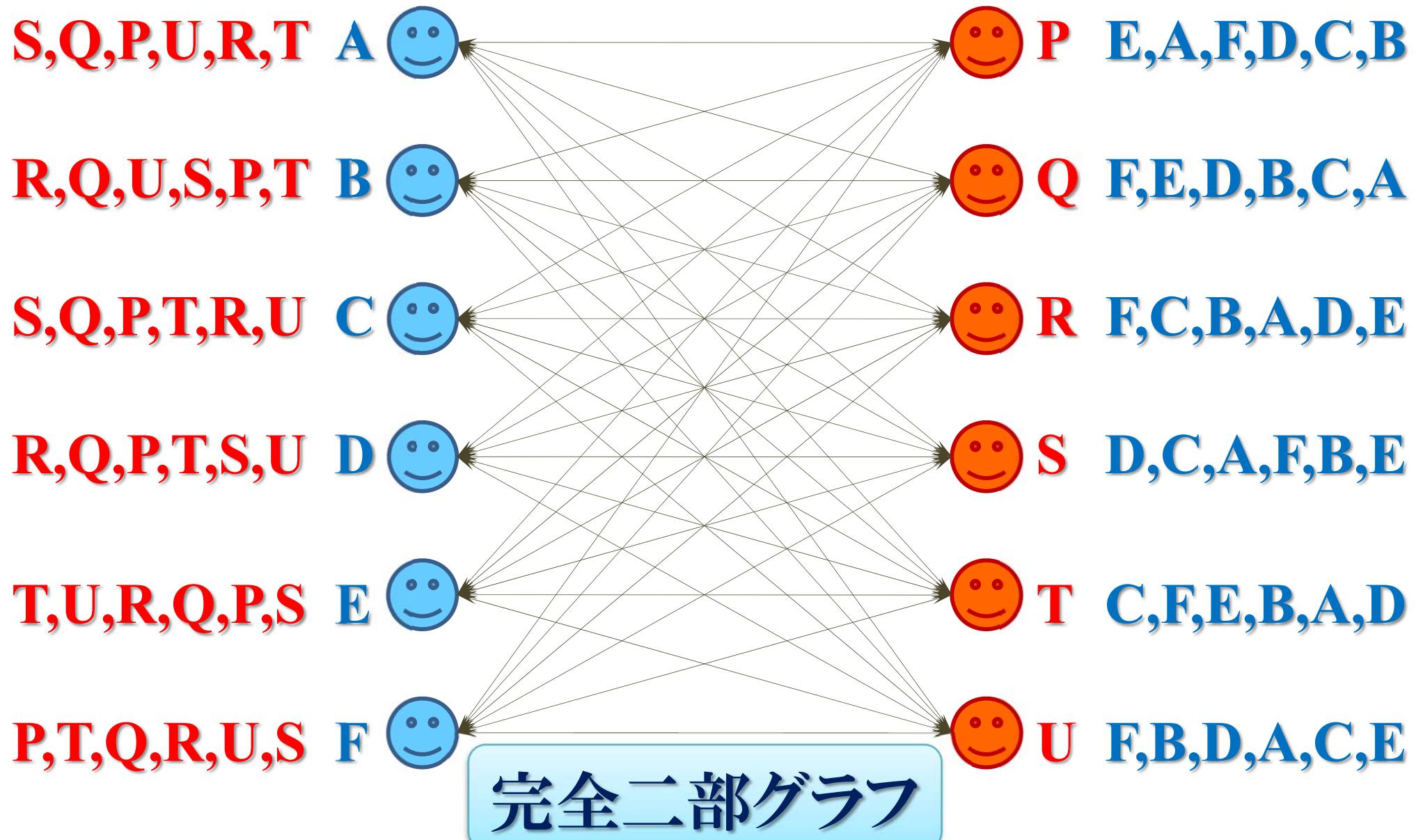
# 安定結婚問題(各自の選好順序)



# 安定結婚問題(各自の選好順序)

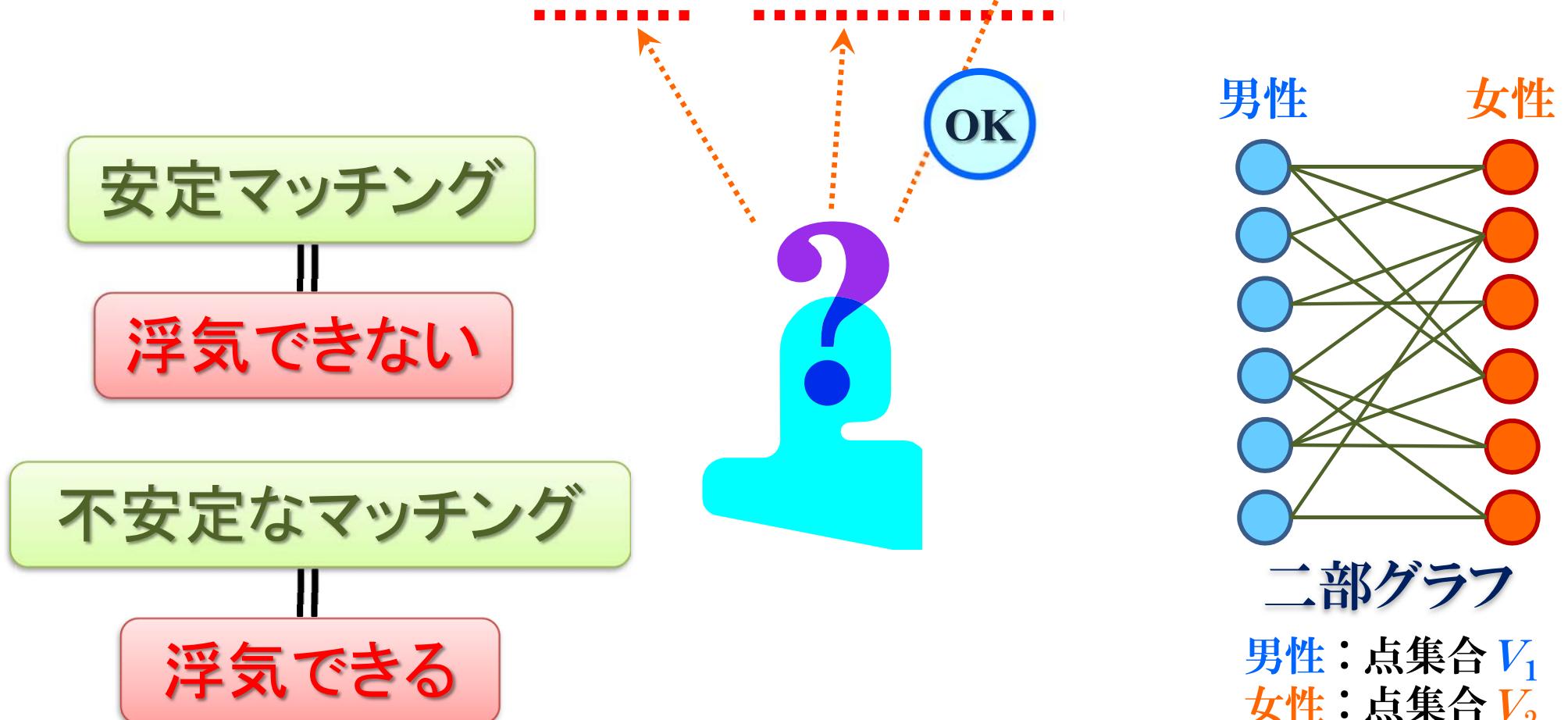


# 安定結婚問題(各自の選好順序)

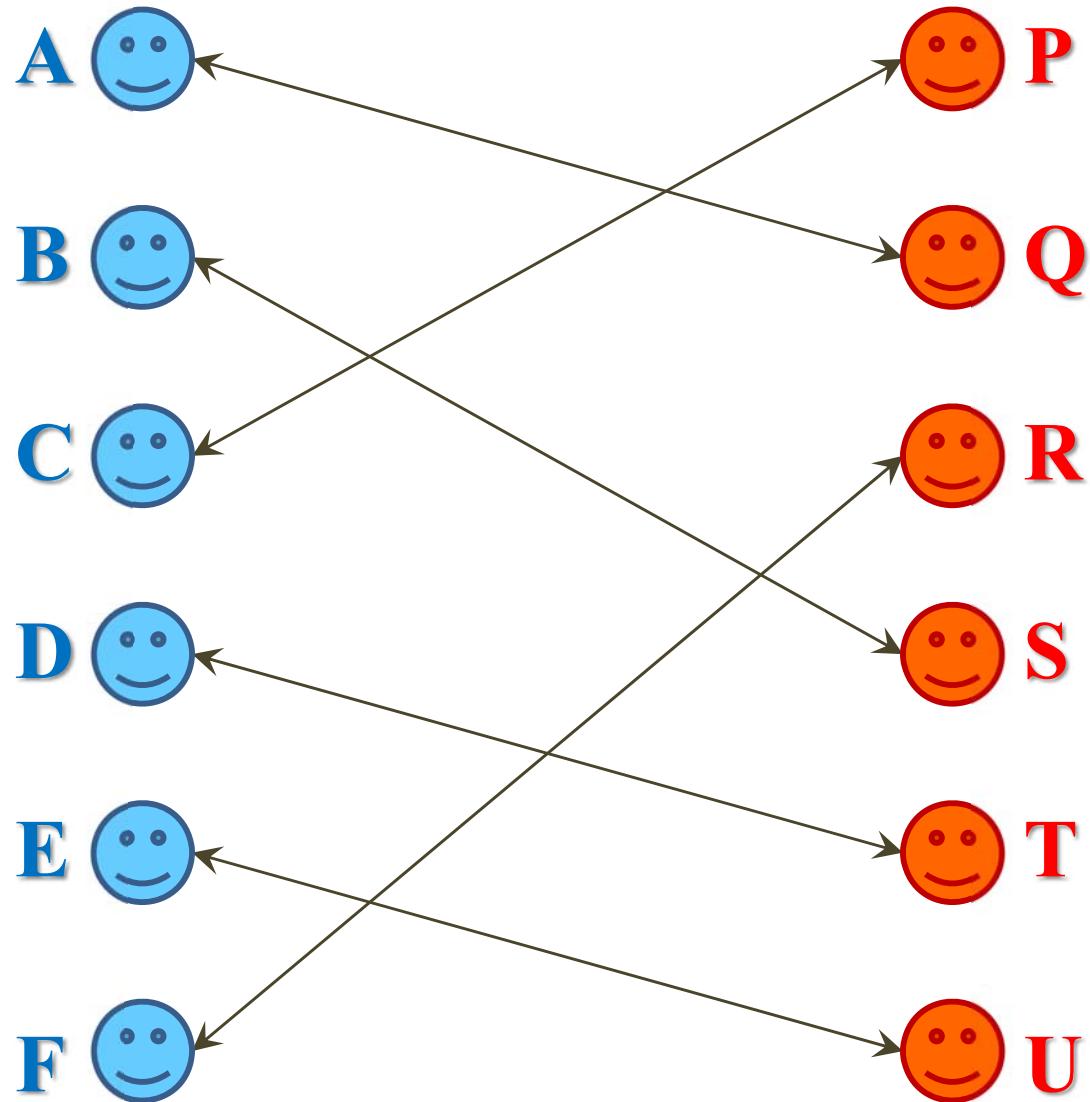


# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と,  $m$ 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけたい.



# 安定結婚問題(マッチング)



マッチング

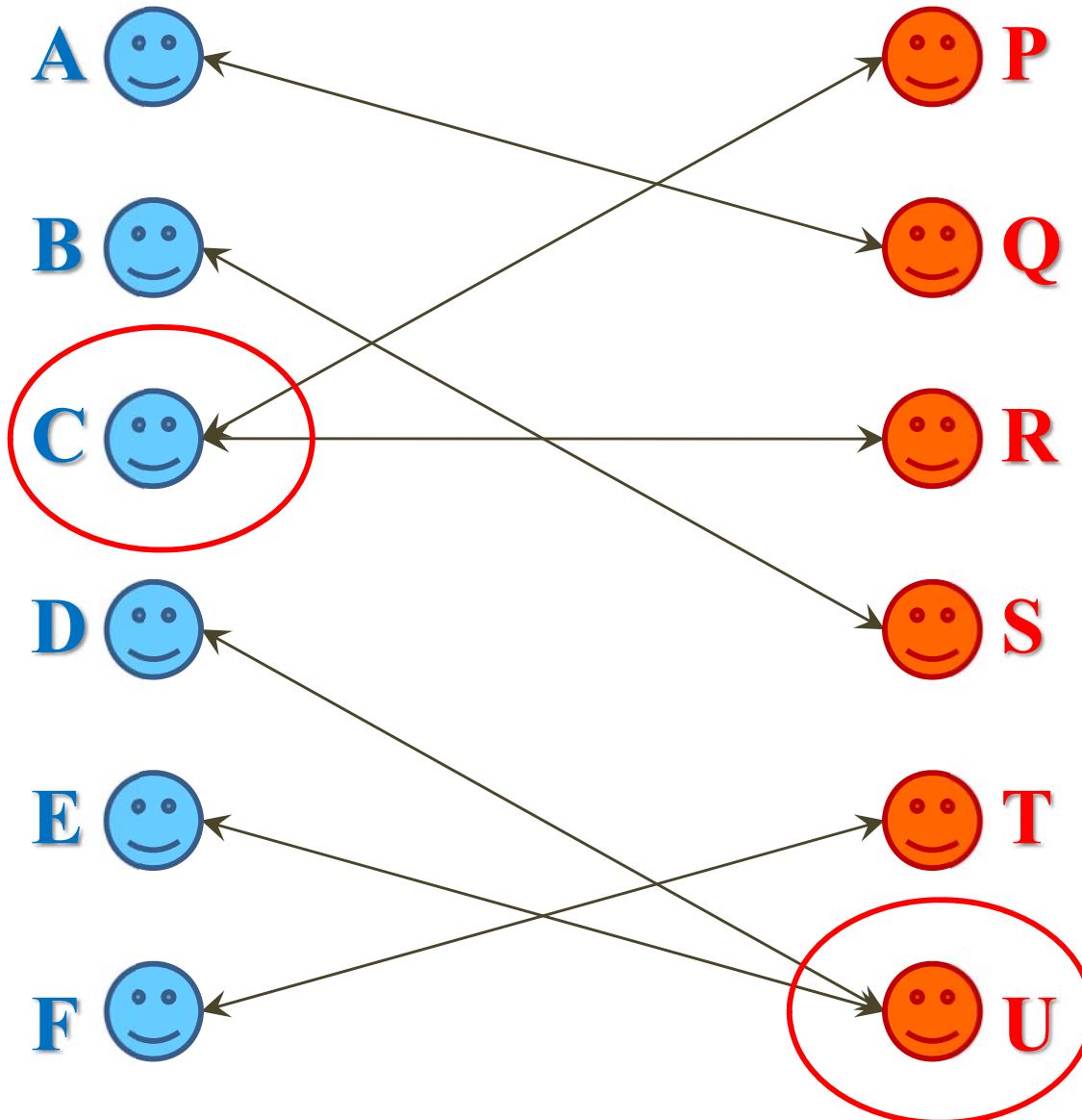
端点を共有しない枝の集合

つまり、どの点(node)も高々1本の枝(edge)にのみ接続(incident to)している

完全マッチング

全ての点(node)が、マッチング(matching)の枝(edge)に接続しているとき、そのマッチングを完全マッチングという

# 安定結婚問題(マッチング)



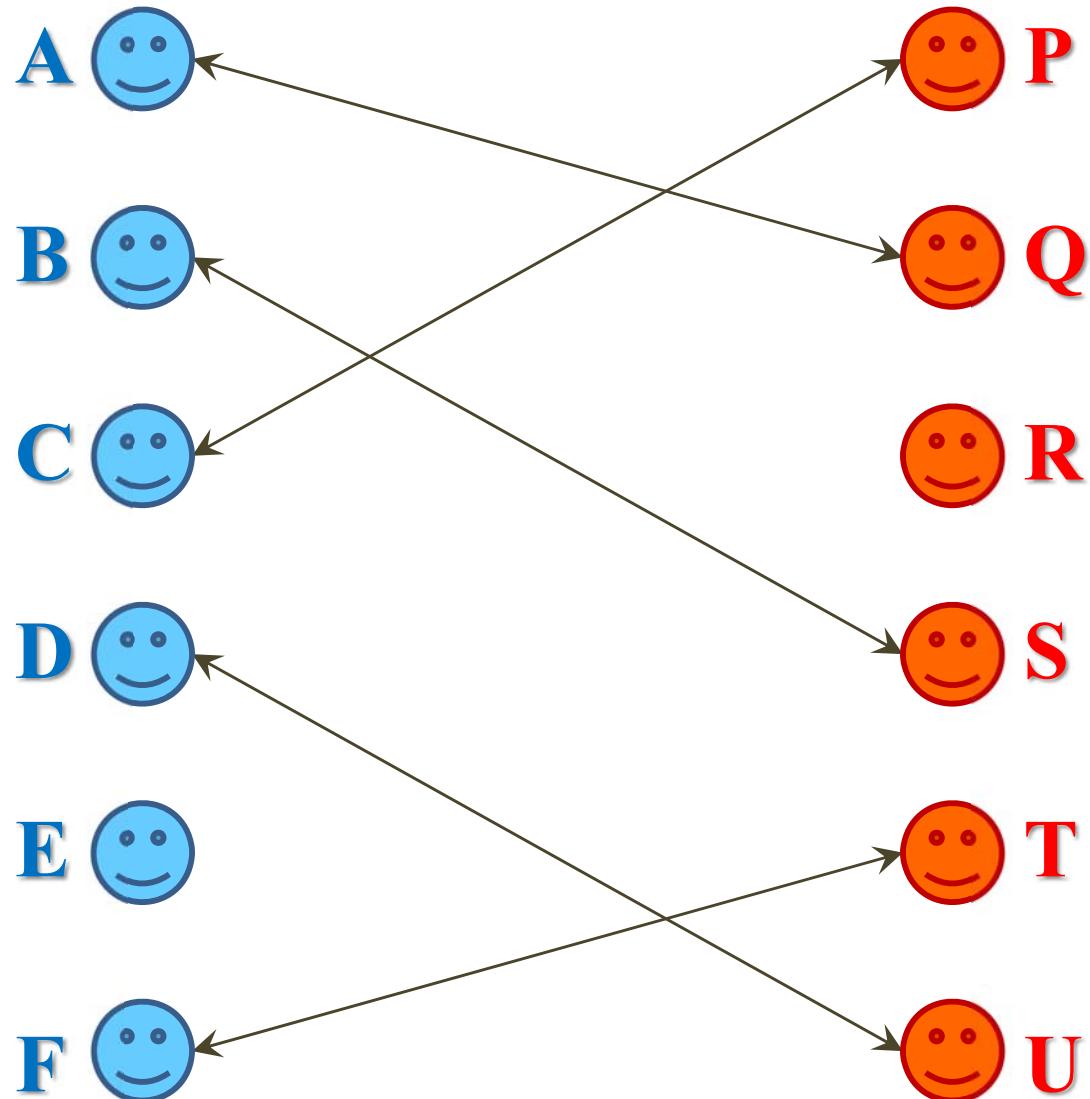
この枝集合は、マッチング  
(matching)ではない

なぜだかわかる？

その通り！ マッチングで  
はありません。

なぜなら、端点を共有する  
枝がある(二股をかけてい  
る人がいる)から

# 安定結婚問題(マッチング)



この枝集合は、マッチング  
(matching)だろうか？

マッチング(matching)です。  
でも、完全マッチング  
(perfect matching)ではない  
ので、ペアを組んでない人  
がいるね。

つまり、我々は完全マッチング  
を求めたいのだよ

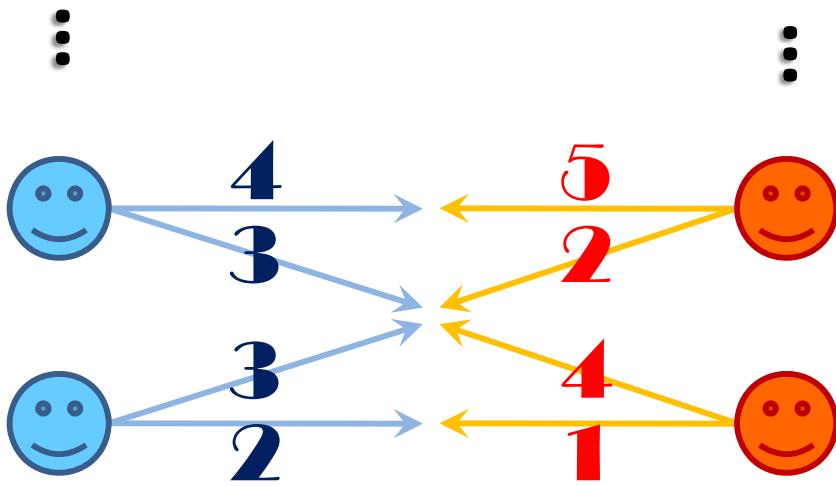
※男女が同数でない場合は、完全マッチング  
(perfect matching)は存在しないので、最大マッチング  
(maximum matching)を求めます。

# 安定結婚問題

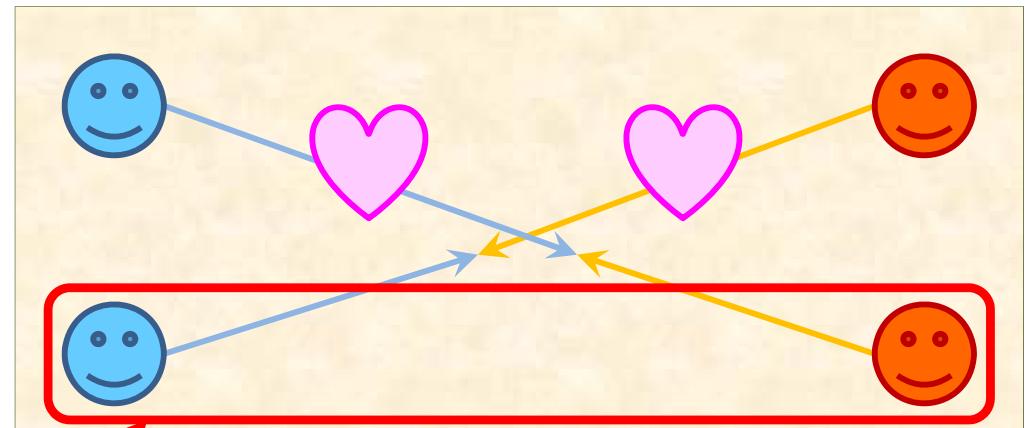
- $n$ 人の男性の集合と,  $m$ 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけたい.



# 浮気する(不安定な)カップルとは？

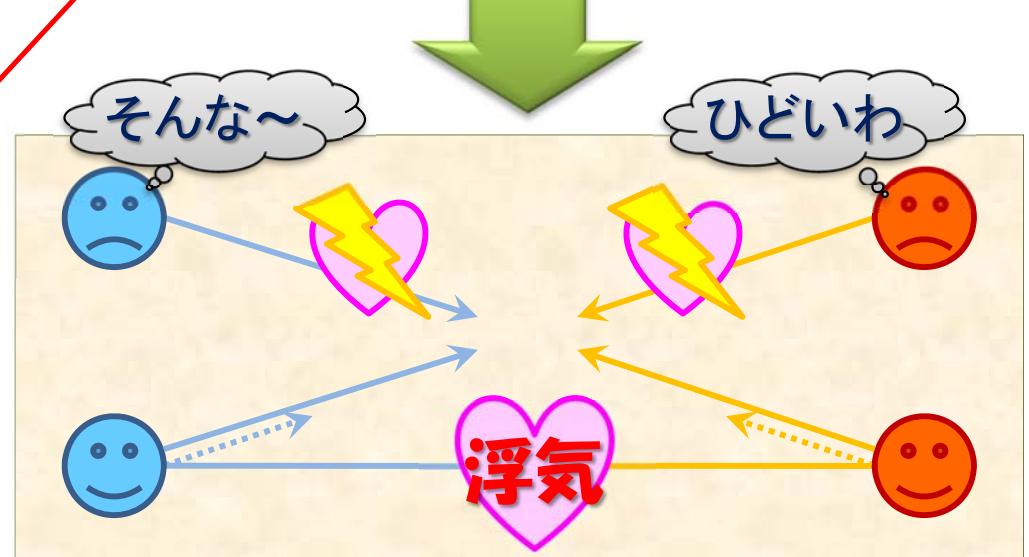


こんな2組のカップル(マッチング)を作ってしまったら…

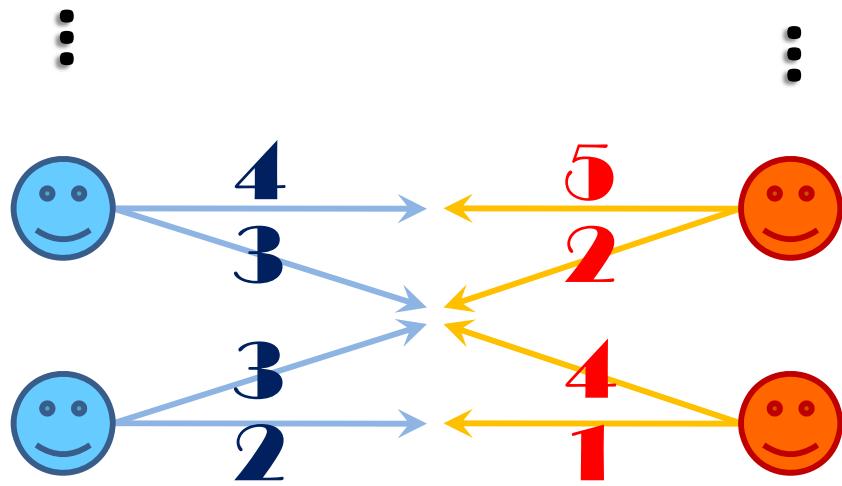


このマッチングは不安定！  
なぜなら

ブロッキング・ペア  
が存在するから！



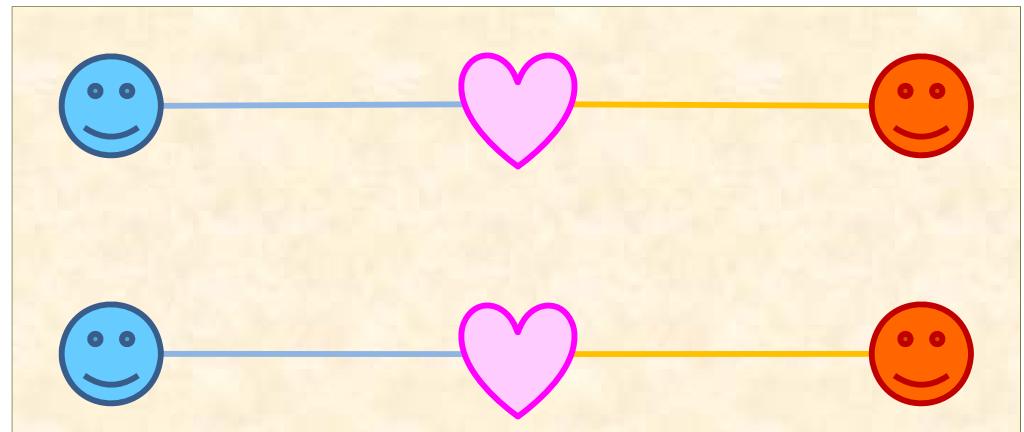
# 浮気しない(安定な)恋人たち



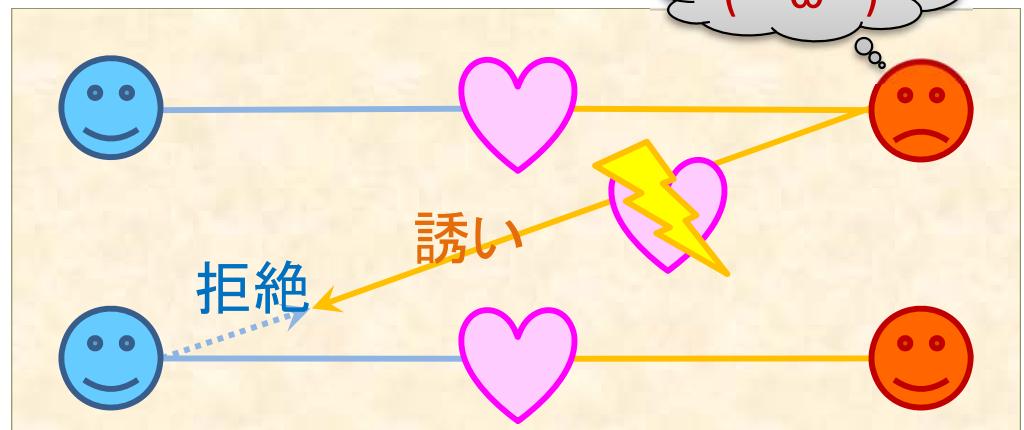
このマッチングは安定！  
なぜなら

ブロッキング・ペア  
が存在しないから

## 浮気しない(できない)恋人たち



浮気を試みるも...

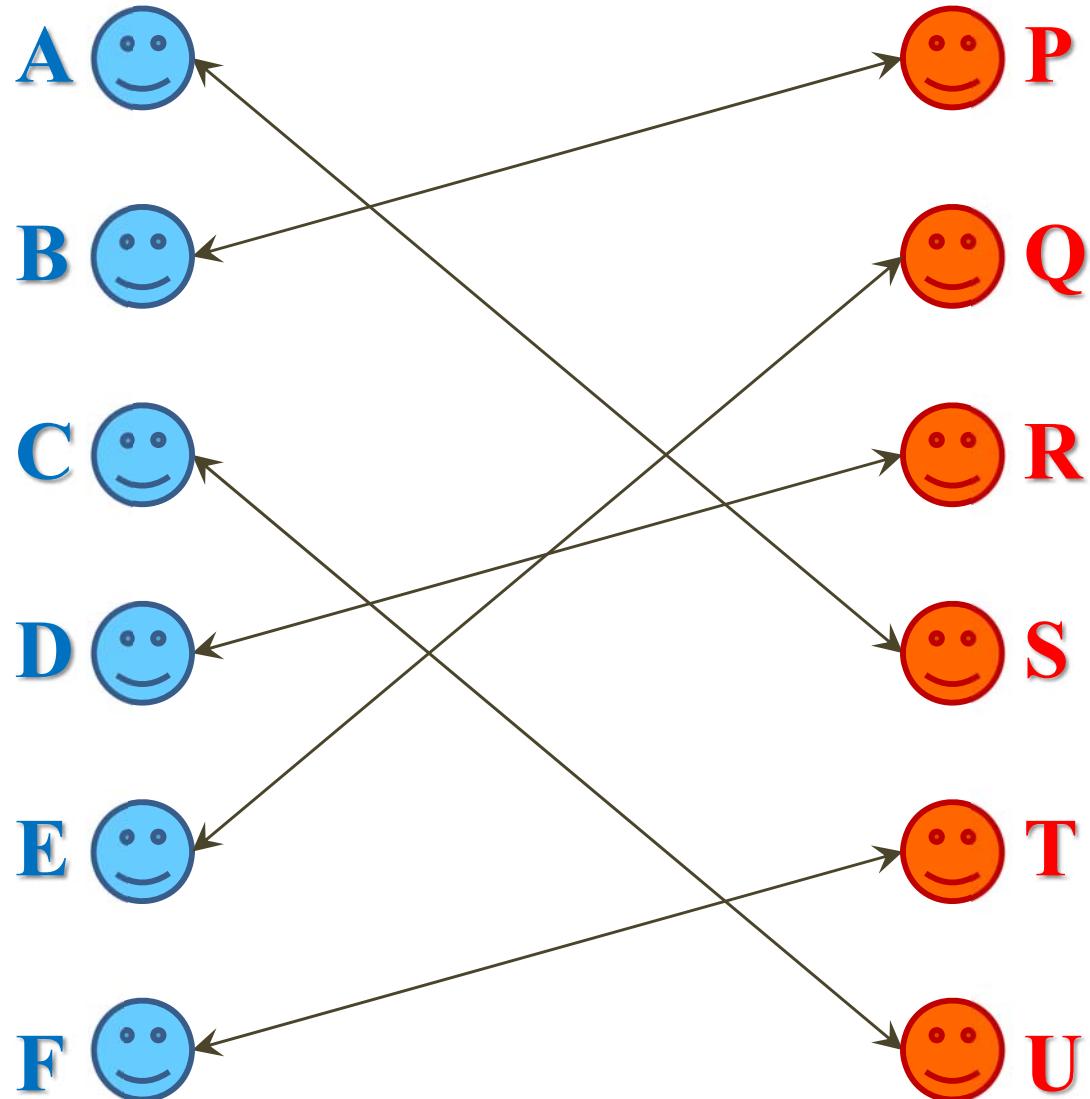


# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と,  $m$ 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけたい.



# 安定結婚問題(まとめ)



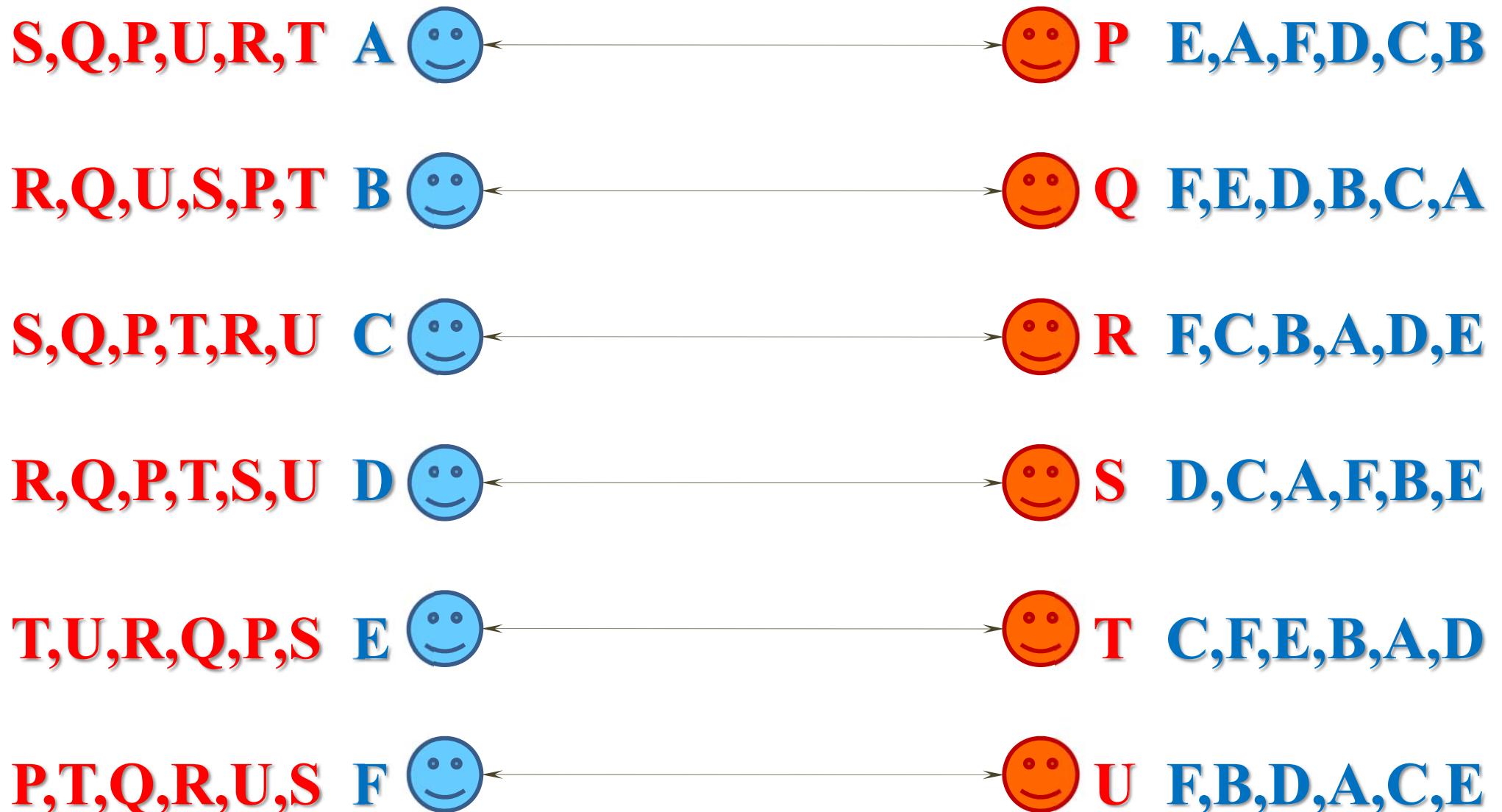
浮気しないカップルをつくる(安定結婚問題を解く)ということは、

(ブロッキング・ペアが存在しない)**安定**な完全マッチングを求める

こと

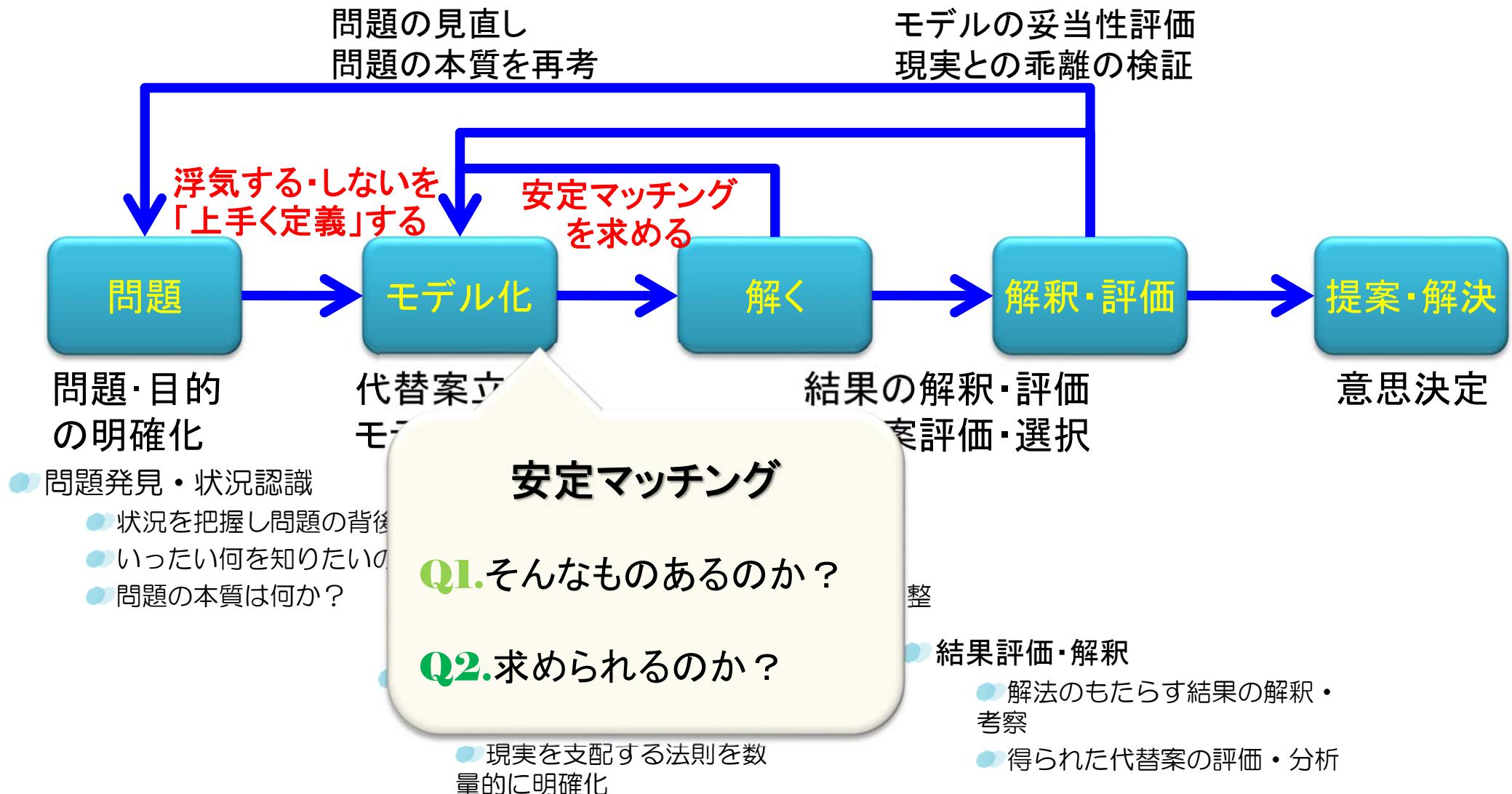
※男女が同数でない場合は、完全マッチング(perfect matching)は存在しないので、最大マッチング(maximum matching)を求めます。

# 問題: このマッチングは安定?

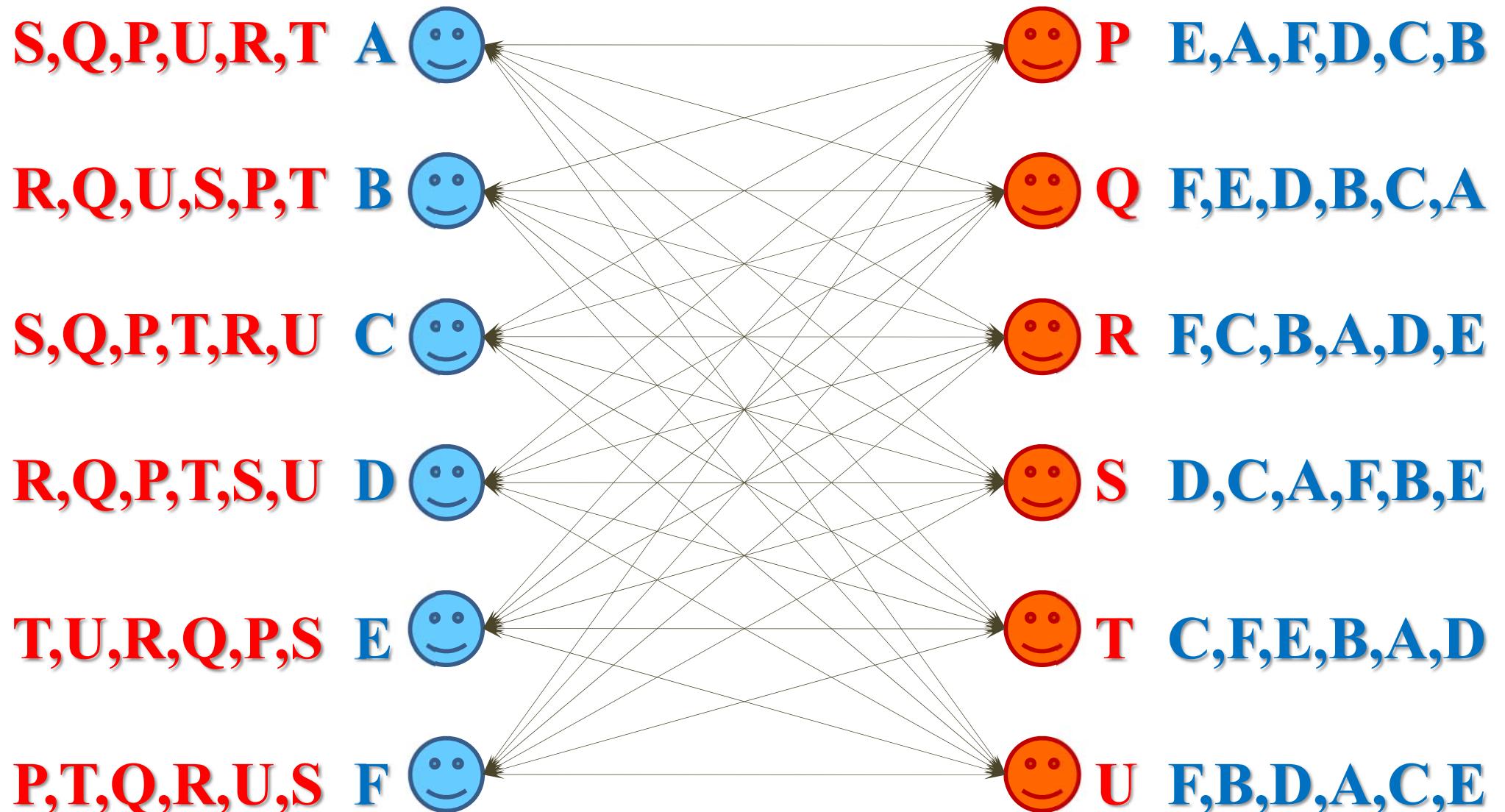


# 問題解決

## ・「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

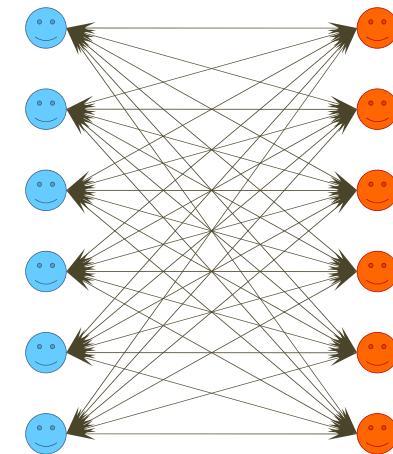


# 演習：やってみよう



# 完全マッチングは全部で幾つ？

男女各人数	完全マッチング数
6	720
10	3,628,800
20	$2.4 \times 10^{18}$
30	$2.7 \times 10^{32}$
40	$8.2 \times 10^{47}$
50	$3.0 \times 10^{64}$
100	$9.3 \times 10^{157}$
200	#NUM!



※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが、最悪、一番最後まで見つからないかもしれません。また、そもそも安定解など存在しないかもしれない。その場合は全部調べなければならない



# 完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても、今のコンピュータは  
かなりの速さで計算できるんでしょ？だから大丈夫だよね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
    - Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2GFLOPS** ... 1秒間に約**512億**回
    - PS3 : **218GFLOPS** ... 1秒間に約**2180億**回
    - PS4 : **1.84TFLOPS** ... 1秒間に約**1兆8400億**回
    - 京 : **10.51PFLOPS** ... 1秒間に約**1京510兆**回  
(※2011年6月, 11月世界最速！ by Top500.org)  
(※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)
- ※FLOPS = *FLoating-point Operations Per Second*

[Wikipedia「FLOPS」より]  
2013/5/1の情報

完全マッチングを一つ見つけるのに、男(女)の人数(完全マッチング数)の浮動小数点演算でできると仮定しよう

例えば、n=6(男6人, 女6人)のときは、6回の演算で計算可と仮定するということ

K(キロ)  $\approx \times 10^3$  = 千倍  
M(メガ)  $\approx \times 10^6$  = 百万倍  
G(ギガ)  $\approx \times 10^9$  = 10億倍  
T(テラ)  $\approx \times 10^{12}$  = 1兆倍  
P(ペタ)  $\approx \times 10^{15}$  = 千兆倍  
E(エクサ)  $\approx \times 10^{18}$  = 百京倍

# 完全マッチングは全部で幾つ？

51.2GFLOPS

1.84TFLOPS

10.51PFLOPS

人数	pm数	Core i7	PS4	京
6	720	0.0000001秒	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0007088秒	0.0000197秒	0.0000000秒
20	$2.4 \times 10^{18}$	30年	306日	1.3時間
30	$2.7 \times 10^{32}$	357,129宙齡	9,938宙齡	1.7宙齡
40	$8.2 \times 10^{47}$	1.5E+21宙齡	4.1E+19宙齡	7.1E+15宙齡
50	$3.0 \times 10^{64}$	6.8E+37宙齡	1.9E+36宙齡	3.3E+32宙齡
100	$9.3 \times 10^{157}$	4.2E+131宙齡	1.2E+130宙齡	2.0E+126宙齡
200	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、全列挙(しらみつぶし)では答えを求めるることは期待出来ない

# 1宙齡 = 138億年



# 補足：スパコンの性能

- Top500 (行列演算:連立一次方程式を解く速度を評価)

- 京: **10.51PFLOPS** ...1秒間に**1京510兆**回

- 2011年6月 1位
    - 2011年11月 1位
    - 2012年6月 2位
    - 2012年11月 3位
    - 2013年6月 4位
    - 2013年11月 4位
    - 2014年6月 4位
    - 2014年11月 4位
    - 2015年6月 4位

他にGreen500なども  
(エネルギー消費効率の良さを競う **FLOPS per Watt**)  
2015年6月上位3機は日本  
1位.菖蒲, 2位.青睡蓮, 3位.睡蓮

※FLOPS = *FLoating-point Operations Per Second*  
※TEPS = *Traversed Edges Per Second*

- Graph500 (大規模グラフ解析の性能を評価)

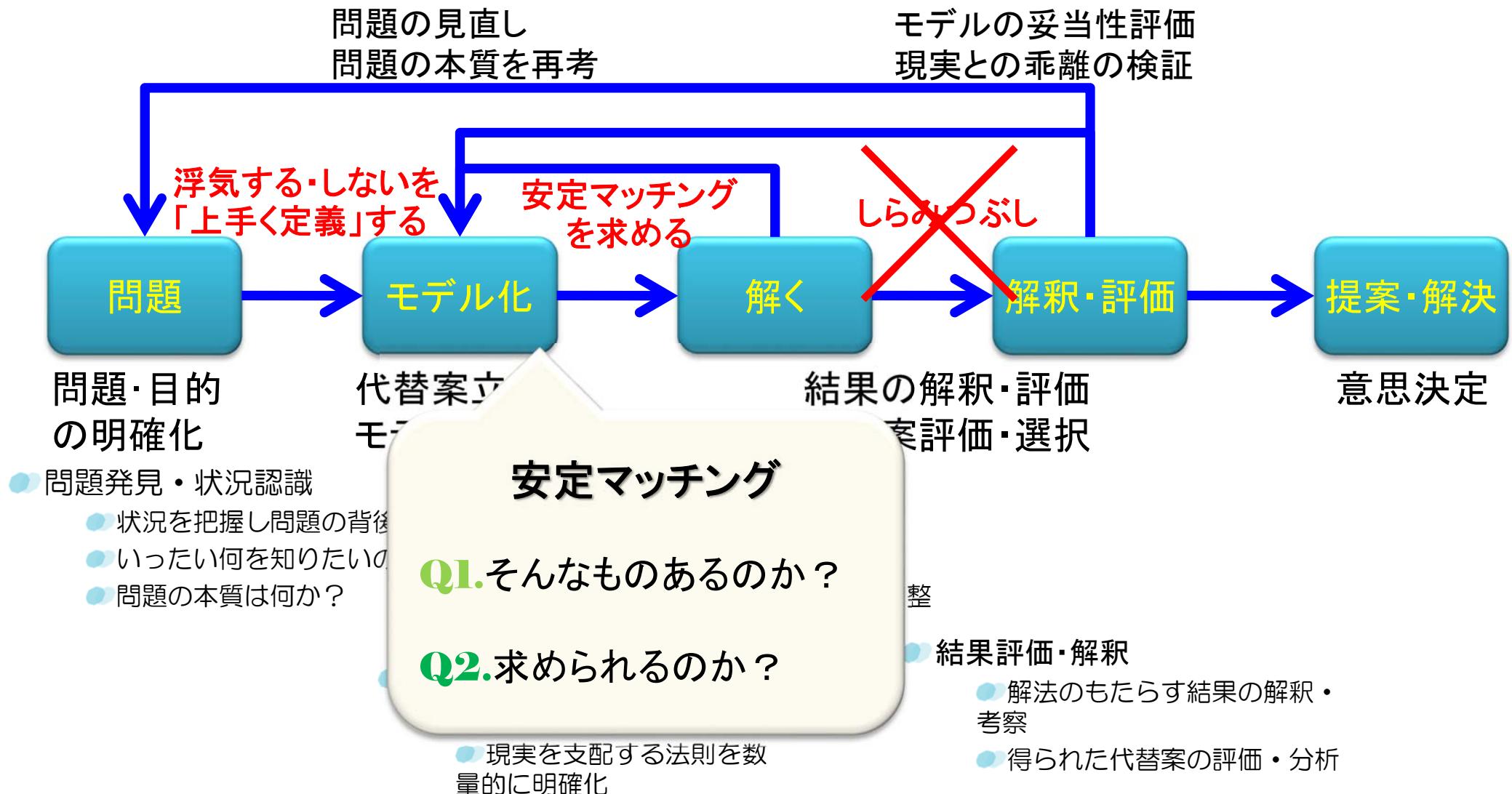
- 京: **38,621GTEPS** ...1秒間に**38兆6210億**個

- 2014年6月 1位
    - 2014年11月 2位
    - 2015年6月 1位(約1兆個の点, 約16兆個の枝からなるグラフの幅優先探索を0.45秒で処理)

✓ 計算速度  
✓ アルゴリズム  
✓ プログラム  
などの総合力の競争

# 問題解決

## ・「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



# ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
  - 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて、安定解を探す

時間が  
掛かり過ぎる！



全ての完全マッチングを  
しらみつぶしに調べずに、  
安定解を、現実的時間で  
見つける方法があるか？

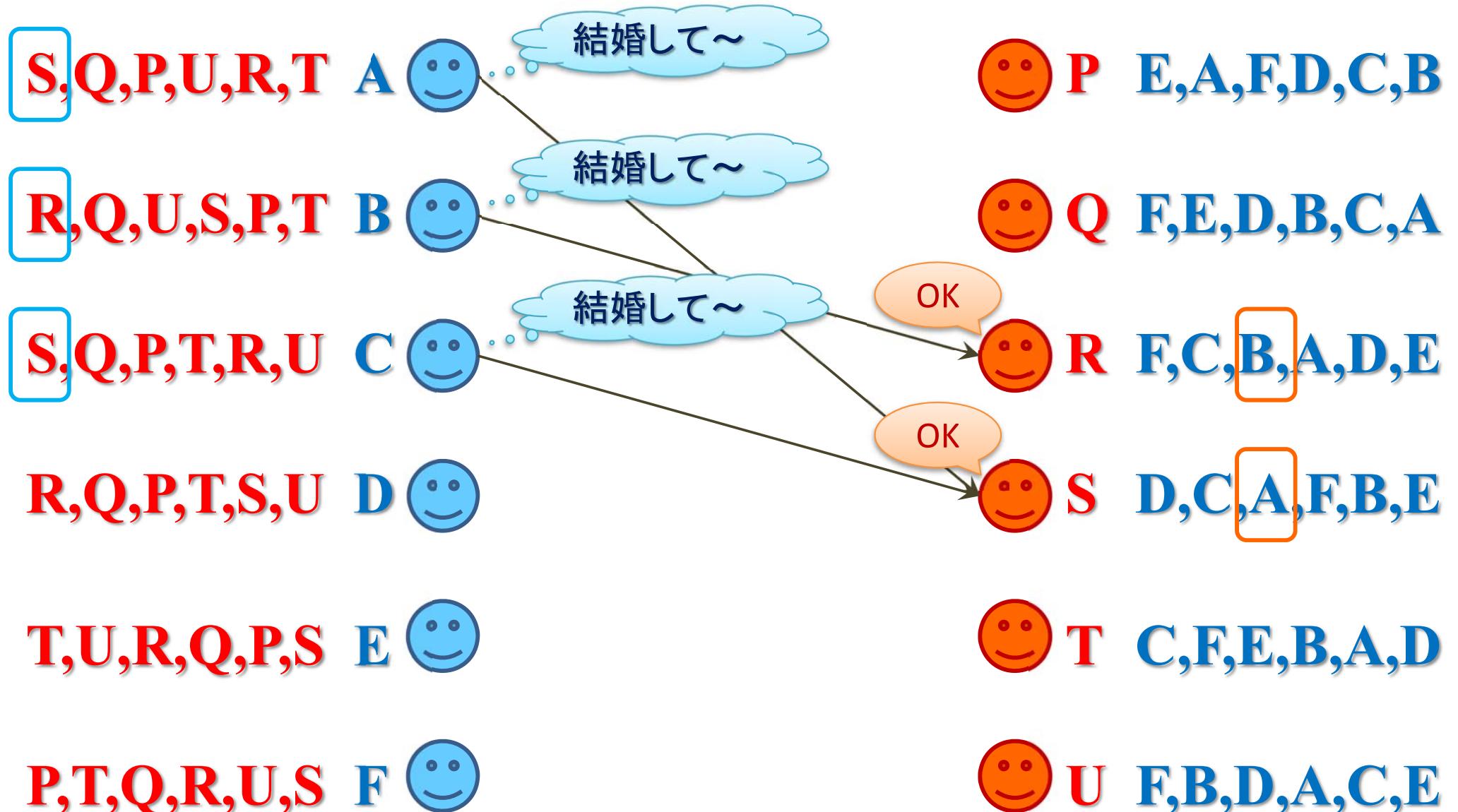
Gale-Shapley  
Algorithm

人間の創造  
的な仕事！

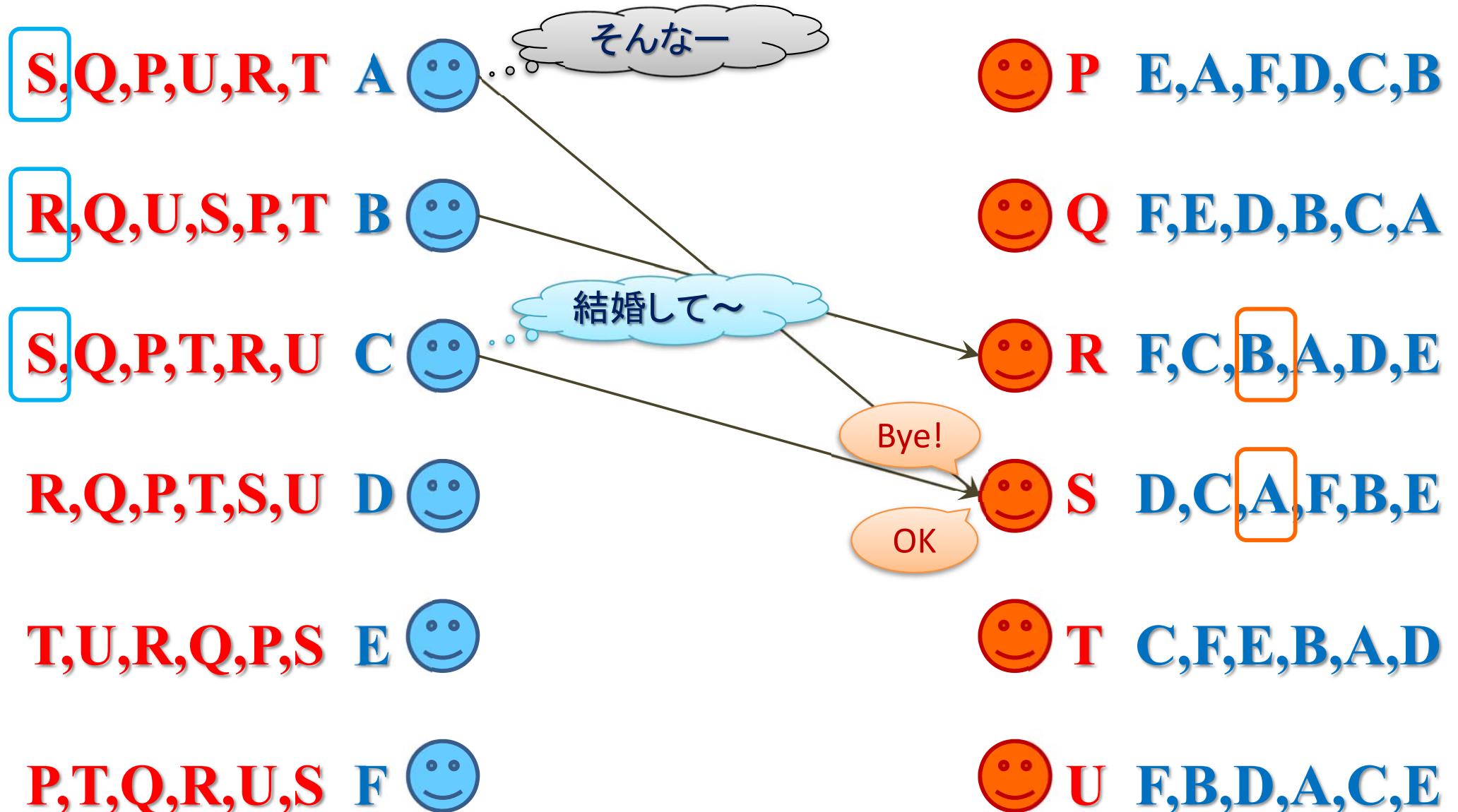
# 安定結婚問題を解く

# Gale-Shapley アルゴリズム

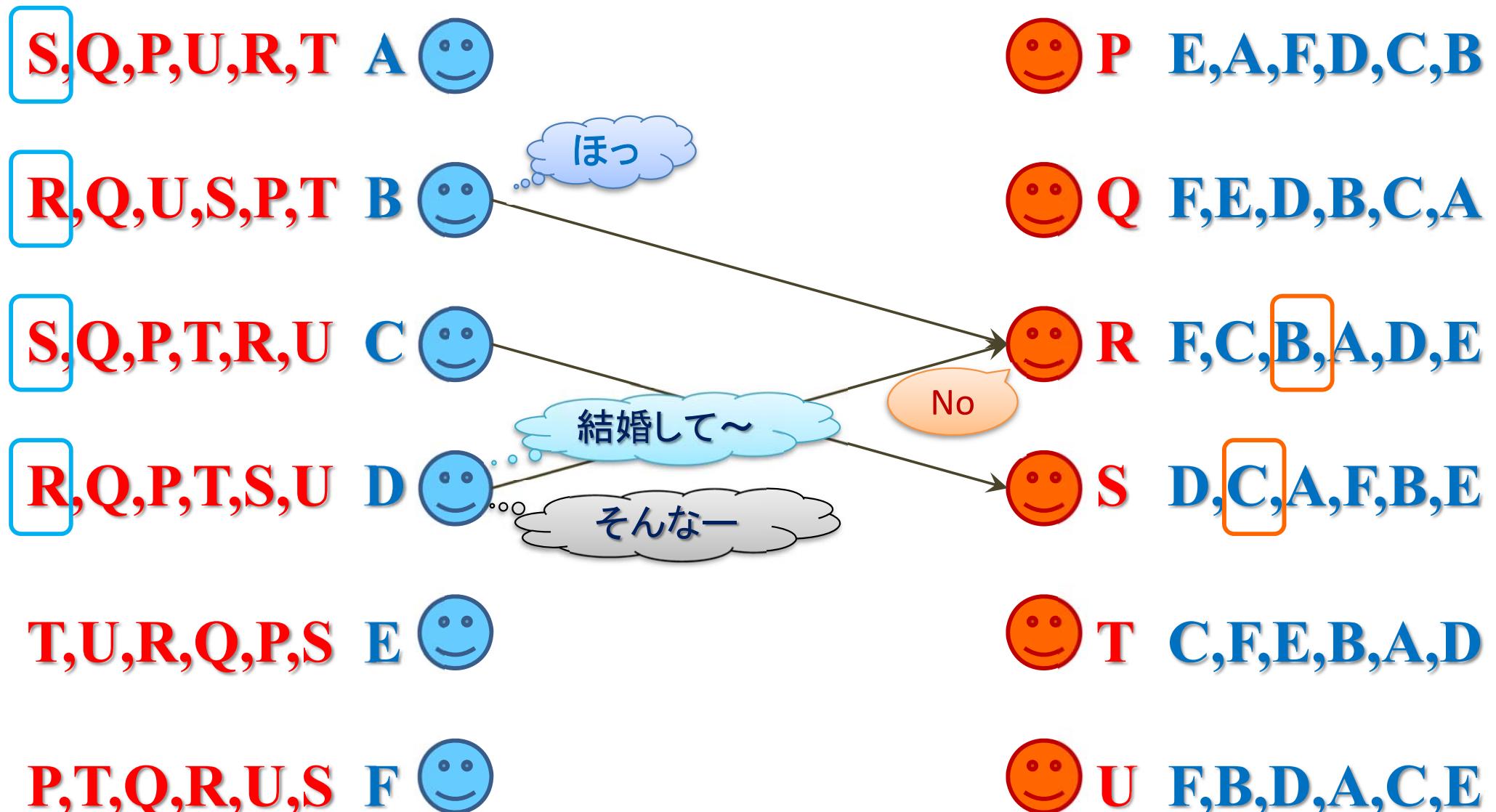
# Gale-Shapley アルゴリズム



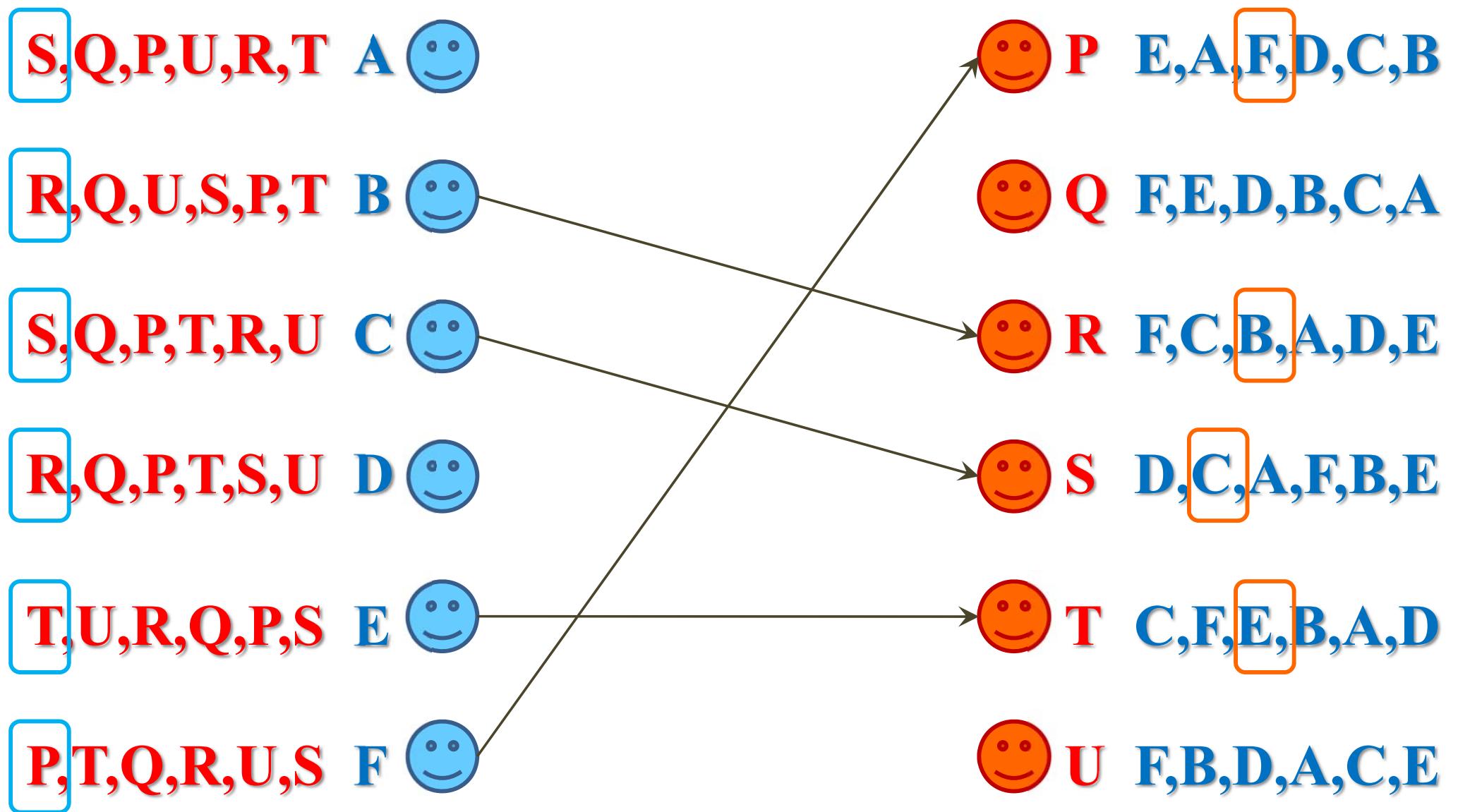
# Gale-Shapley アルゴリズム



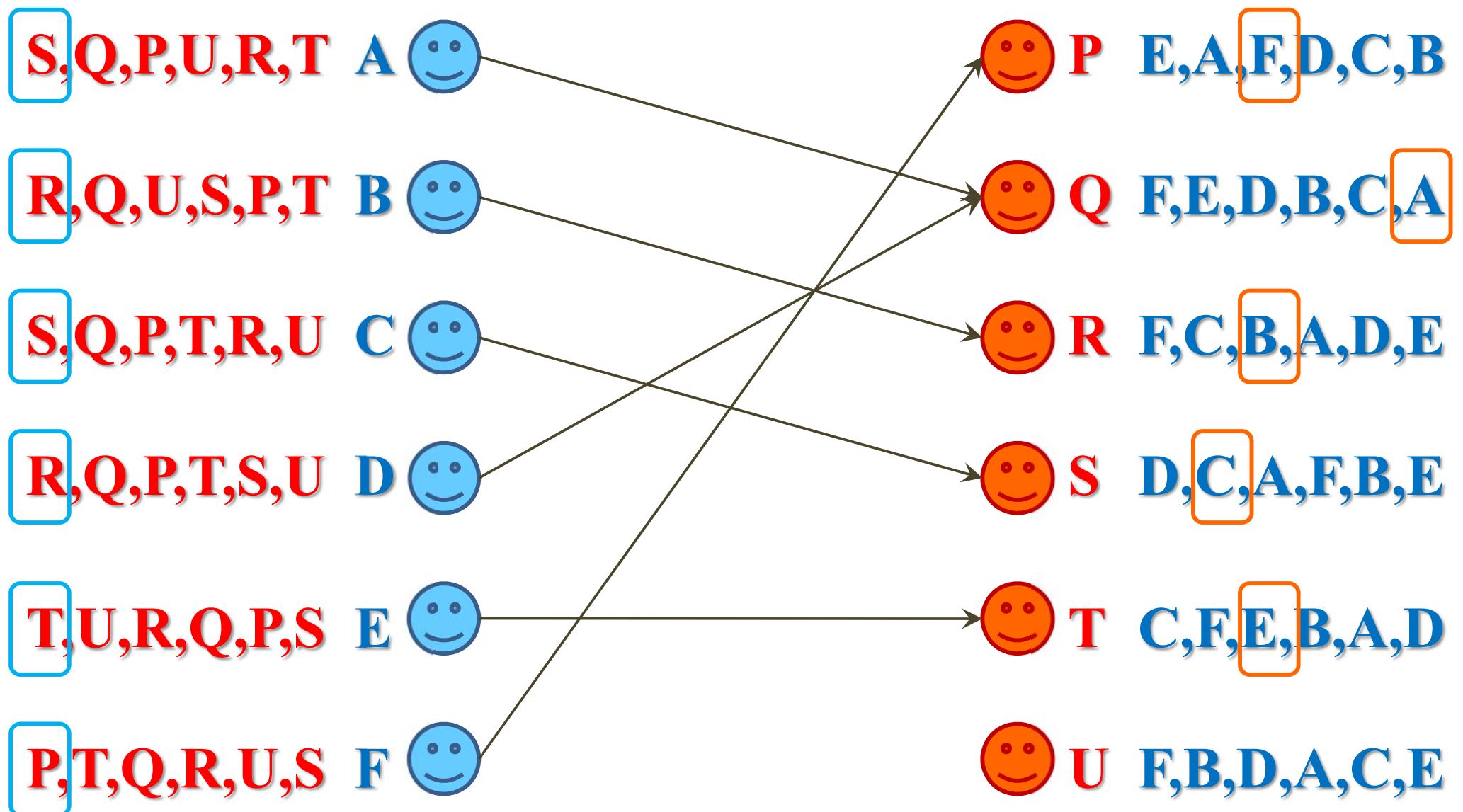
# Gale-Shapley アルゴリズム



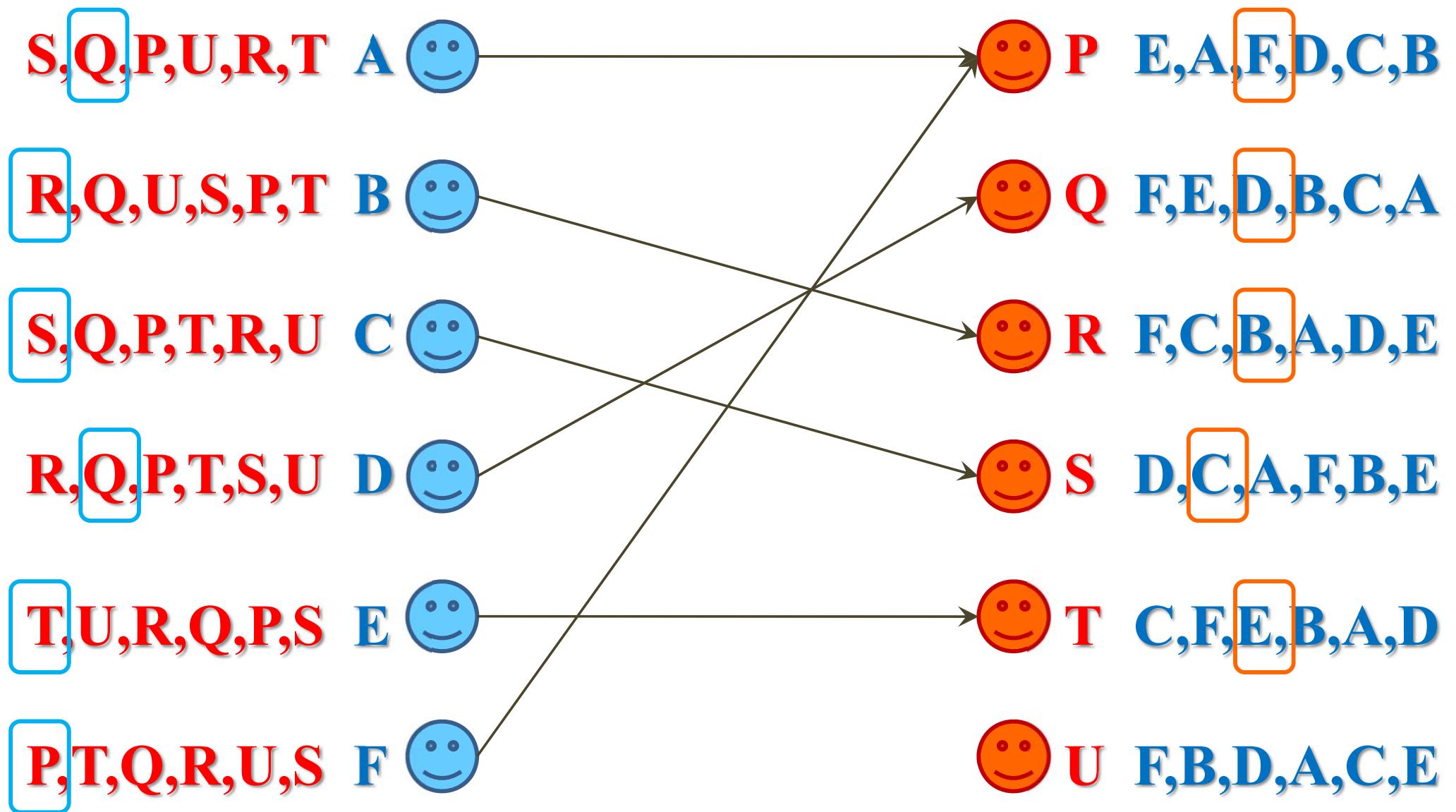
# Gale-Shapley アルゴリズム



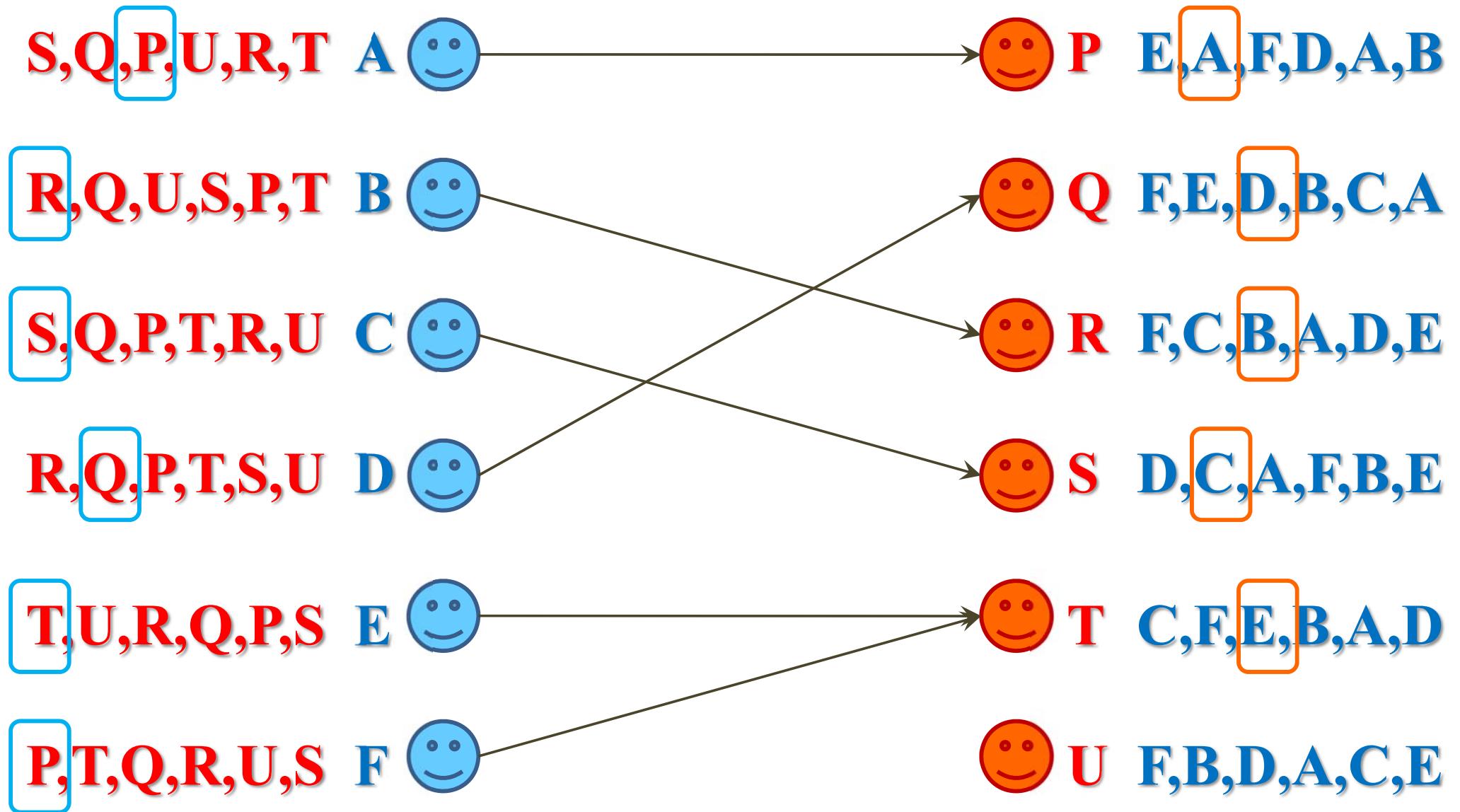
# Gale-Shapley アルゴリズム



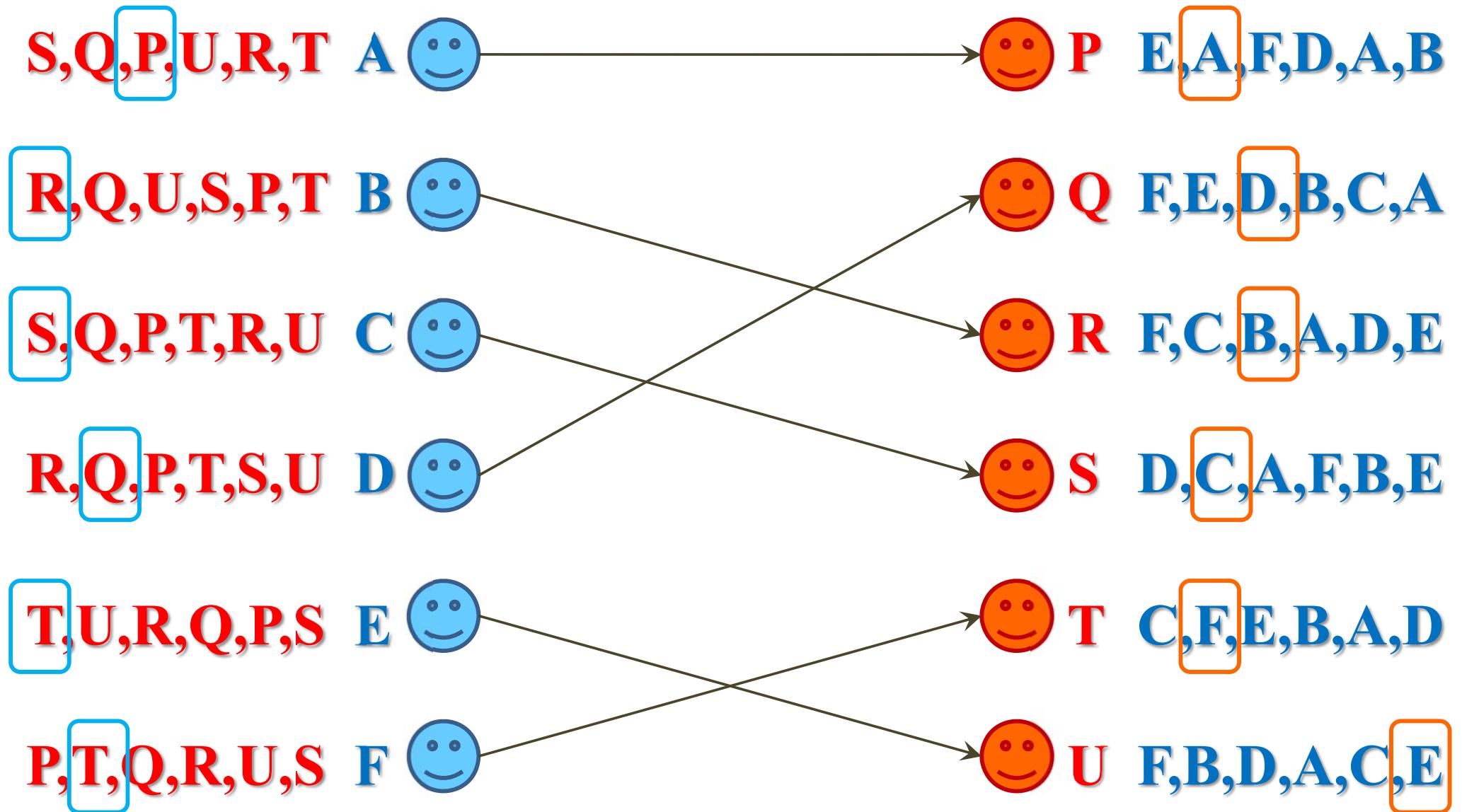
# Gale-Shapley アルゴリズム



# Gale-Shapley アルゴリズム



# Gale-Shapley アルゴリズム



# 問題解決

## ・「問題の把握」から「意思決定」



# 評価 : Gale-ShapleyAlg. の解の評価

- 定理: 与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し, Gale-Shapleyアルゴリズムは安定マッチングを導き終了する.



A1. きちんと終わるよ！

A2. 完全マッチングを求めるよ！

A3. 安定だよ！

- 系: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, 少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

# 評価 : Gale-ShapleyAlg. って速いの?



- 男(女)の数を  $n$  とすると、大雑把な見積もりで、

$$O(n^2)$$

多項式オーダー

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため  $10n^2$  の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

人数	pm数	京 & しらみつぶし	Core i7 & GS Alg
6	720	0.000000秒	0.000000秒
10	3,628,800	0.000000秒	0.000000秒
20	$2.4 \times 10^{18}$	1.3時間	0.000001秒
30	$2.7 \times 10^{32}$	1.7宙齡	0.000002秒
40	$8.2 \times 10^{47}$	7.1E+15宙齡	0.000003秒
50	$3.0 \times 10^{64}$	3.3E+32宙齡	0.000005秒
100	$9.3 \times 10^{157}$	2.0E+126宙齡	0.000020秒
200	#NUM!	#NUM!	0.000078秒
1000	#NUM!	#NUM!	0.0001953秒
10000	#NUM!	#NUM!	0.0195313秒
100000	#NUM!	#NUM!	1.9531250秒
1000000	#NUM!	#NUM!	195.3125000秒

世界最速SuperComp  
+ 力技 (しょぼい方法)

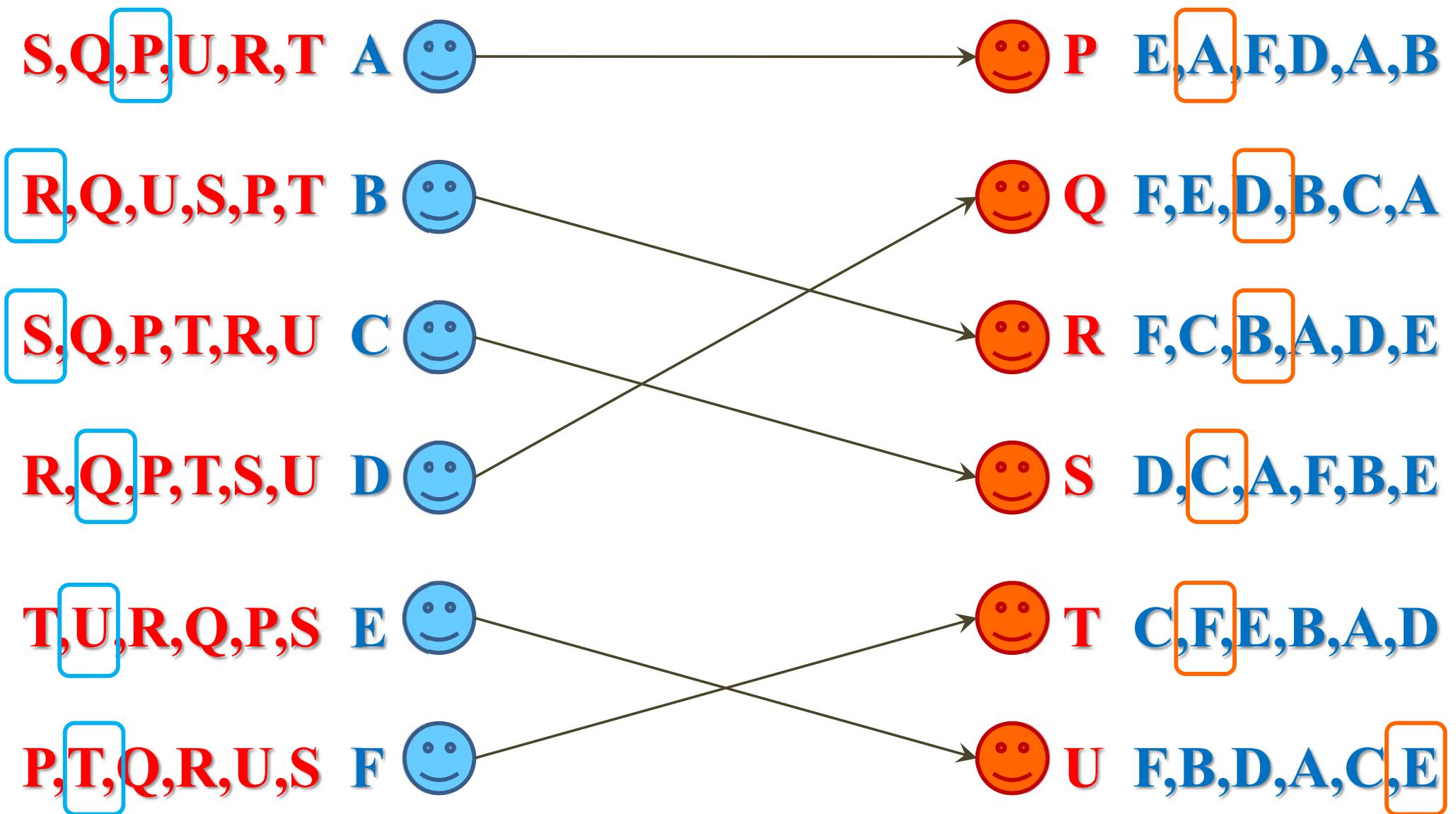


そこらのPC  
+ 人間の知恵

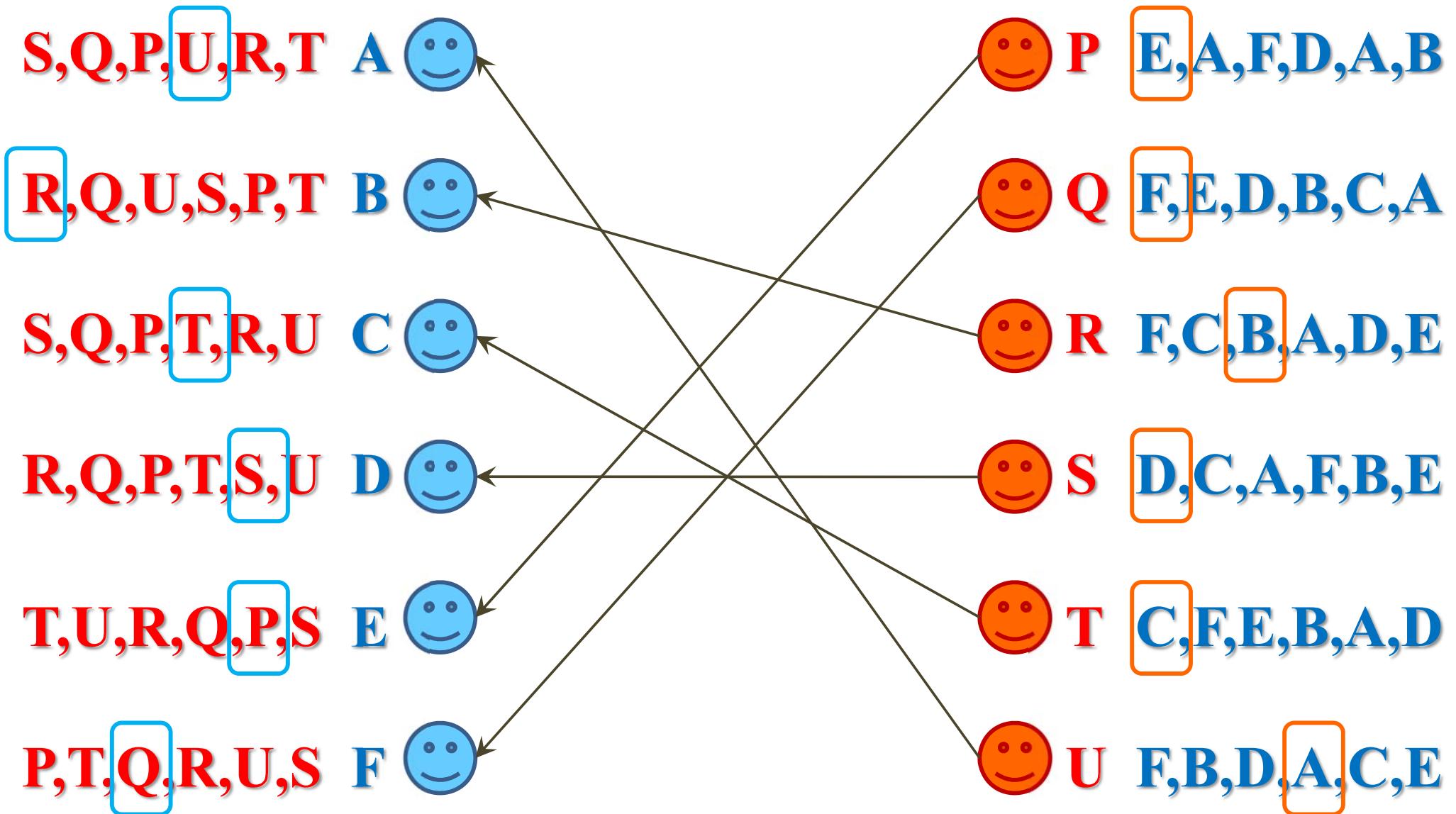
# 評価 : Gale-ShapleyAlg. の解の評価2

- 定理: 男性側のプロポーズの順番に関係なく, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く.
- 系: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば男性最良安定マッチングを導く.

# 男性最良安定マッチング



# 女性最良安定マッチング



# 評価 : Gale-ShapleyAlg. の解の評価 3

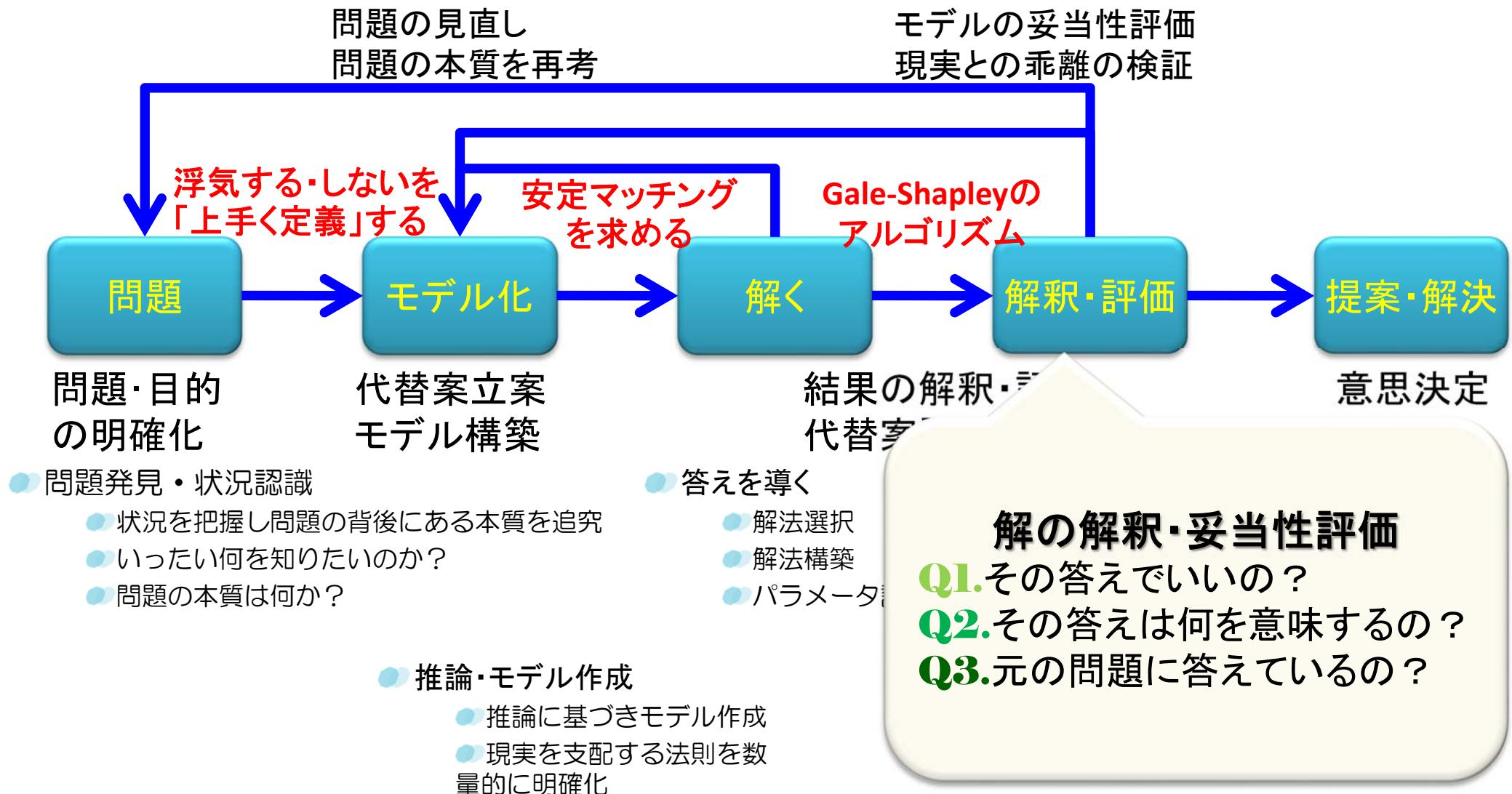
- 与えられた安定結婚問題について、いくつかの安定マッチングが存在する場合、男性にとってより好ましい安定マッチング、女性にとってより好ましい安定マッチングなど、安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる。
- 定理：与えられた安定結婚問題について、  
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング  
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング  
である。



教訓!?『待ってちゃダメ！  
好きになつたら自分から告白しなさい』

# 問題解決

## ・「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



# もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書
  - 久保, 松井「組合せ最適化『短編集』」朝倉書店(1999)
  - 山本, 久保「巡回セールスマン問題への招待」朝倉書店(1997)
  - グリツツマン, ブランデンベルク「最短経路の本」 シュプリンガー(2008)
  - 松井, 根本, 宇野「入門オペレーションズ・リサーチ」東海大出版(2008)
  - W.J.クック「驚きの数学 巡回セールスマン問題」青土社(2013)
- さらに詳しい内容を勉強したい人は
  - 根本「安定結婚問題」(久保,田村,松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)
- 関連する経営学科の授業
  - 「ネットワークモデル分析」(4セメ)
  - 「最適化モデル分析」(5セメ)
  - 「意思決定科学」(6セメ) etc...

# 練習：

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S



選好順

1	2	3	4
B	A	C	D



Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	→
2	→
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

# 練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S



選好順

1	2	3	4
B	A	C	D

P	S	Q	R
---	---	---	---



A	C	B	D
---	---	---	---

Q	S	R	P
---	---	---	---



A	D	C	B
---	---	---	---

R	Q	P	S
---	---	---	---



B	C	D	A
---	---	---	---

Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	A	→	P
2	B	→	P
3		→	
4		→	
5		→	
6		→	
7		→	
8		→	
9		→	
10		→	
11		→	
12		→	
13		→	
14		→	

# 練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S

A



選好順

1	2	3	4
B	A	C	D

P



P	S	Q	R
---	---	---	---

B



A	C	B	D
---	---	---	---

Q



Q	S	R	P
---	---	---	---

C



A	D	C	B
---	---	---	---

R



R	Q	P	S
---	---	---	---

D



B	C	D	A
---	---	---	---

S



Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	A	→	P
2	B	→	P
3	C	→	Q
4	D	→	R
5		→	
6		→	
7		→	
8		→	
9		→	
10		→	
11		→	
12		→	
13		→	
14		→	

# 練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S

P	S	Q	R
---	---	---	---

Q	S	R	P
---	---	---	---

R	Q	P	S
---	---	---	---

A

B

C

D

P

Q

R

S

選好順

1	2	3	4
B	A	C	D

A	C	B	D
---	---	---	---

A	D	C	B
---	---	---	---

B	C	D	A
---	---	---	---

Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	A → Q
6	C → S
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→