

知の探究

5. 整数計画法と組合せ最適化

堀田 敬介

2018年1月16日(火)

整数(線形)計画問題とは？

- 整数計画問題(Integer Programming Problem)
 - 線形(1次)等式・不等式系であらわされる条件のもとで、線形(1次)の目的関数を最大・最小化する形式の最適化問題

min.	$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5$	目的関数 objective function
s.t.	$x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5$	
	$9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1$	
	$x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3$	制約条件 constraints
	$x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 2$	
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	非負条件 nonnegativity
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$	整数条件 integrality

- 整数計画問題を解くための主な手法 algorithm
 - 分子限定法, 切除平面法, 分子カット法, etc.

※ここでは、目的関数・制約とも
線形の場合のみ考える

整数計画問題とは？

- 整数計画問題を Excel Solver で解く

$$\text{min.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5$$

$$9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1$$

$$x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3$$

$$x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1. IP を解く															
2			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5									
3																
4									<i>obj. fn</i>				数式			
5		min	2	1	2	1	3	=	0				[I5] = SUMPRODUCT(C\$3:G\$3, C5:G5)			
6		s.t.	1	0	2	0	1	=	0	≧	5		↓			
7			9	2	0	1	4	=	0	≧	1		[I6]~[I9]へコピー			
8			0	1	5	0	1	=	0	≧	3		↓			
9			1	0	3	0	1	=	0	≧	2		↓			
10									<i>LHS</i>		<i>RHS</i>					

整数計画問題とは？

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	1. IP を解く																			
2			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5													
3																				
4									<i>obj. fn</i>											
5		min	2	1	2	1	3	=												
6		s.t.	1	0	2	0	1	=												
7			9	2	0	1	4	=												
8			0	1	5	0	1	=												
9			1	0	3	0	1	=												
10									<i>LHS</i>											
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				
21																				
22																				
23																				
24																				

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

\$I\$5

目標値: ☐ 最大値(M) ☒ 最小値(N) ☐ 指定値:(V)

0

変数セルの変更:(B)

\$C\$3:\$G\$3

制約条件の対象:(U)

\$C\$3:\$G\$3 = 整数
\$I\$6:\$I\$9 >= \$K\$6:\$K\$9

追加(A)

変更(C)

削除(D)

すべてリセット(R)

読み込み/保存(L)

☒ 制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:
(E)

シンプレックス LP

オプション(P)

解決方法

滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューション エンジンを選択してください。

ヘルプ(H)

解決(S)

閉じる(O)

1. 0-1整数計画を解く

【演習】

- 以下の0-1IPについてExcel solverで最適解を求めよ

$$\min. \quad x_1 + x_2$$

$$\text{s.t. } -4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

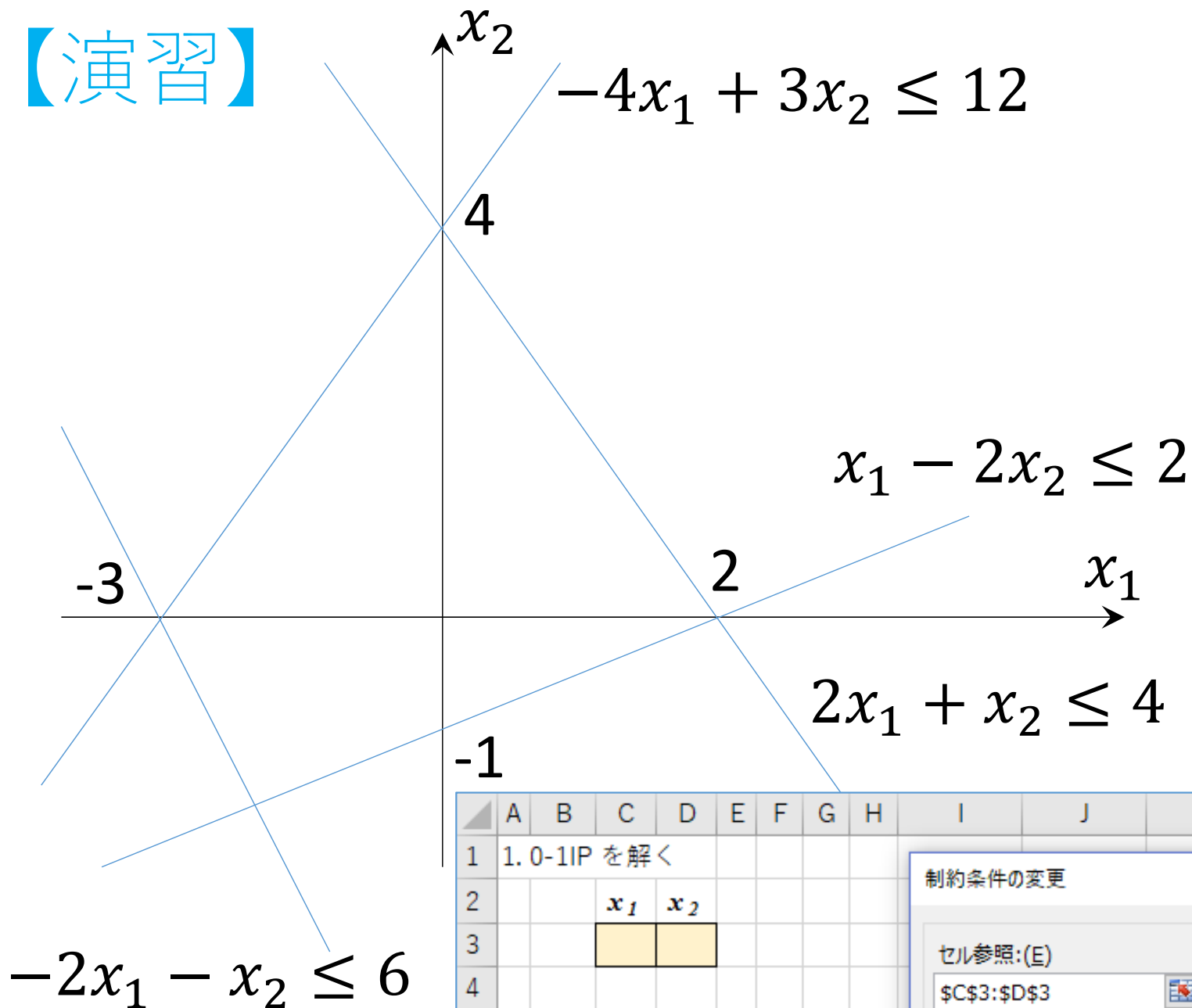
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-2x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

【演習】



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1. 0-1IP を解く													
2			x_1	x_2										
3														
4														
5	min		1	1	=	0								
6	s.t.		1	-2	=	0	≦	2						
7			-4	3	=	0	≦	12						
8			2	1	=	0	≦	4						
9			-2	-1	=	0	≦	6						

制約条件の変更

セル参照:(E)

制約条件:(N)

OK

追加(A)

キャンセル(C)

2. ナップサック問題

• ナップサック問題 *knapsack problem*

n 個の品物があり，ナップサック（1つ）に入れたい

各品物には重さがあり，価値がある

ナップサックには b kg まで，品物を入れることができる

価値総和が最大になるようにするには，どの品物を持っていけばよいか？

【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 品物 $i = 1, 2, \dots, n$
- 品物 i の価値： w_i
- 品物 i の重さ： c_i
- ナップサック容量 b
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \text{品物 } i \text{ をナップサックに入れる} \\ 0 & \dots \text{otherwise} \end{cases}$

2. ナップサック問題

【定式化：解答例】

- ナップサック問題 *knapsack problem*

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \\ \text{s.t.} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \leq b \\ & x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1, \cdots, n) \end{array}$$

2. ナップサック問題

- 例題：ナップサック問題

100個の品物があり，ナップサック（1つ）に入れたい

各品物には，重さがあり，価値がある

ナップサックには **40kg** まで，品物を入れることができる

価値総和が最大になるようにするには，どの品物を持って行けばよいか？

【演習】 Excel Solver で求解せよ

3. 安定集合

- 最大安定集合問題 *maximum stable set problem*

無向グラフ $G = (V, E)$ ($V = \{1, 2, \dots, n\}$)

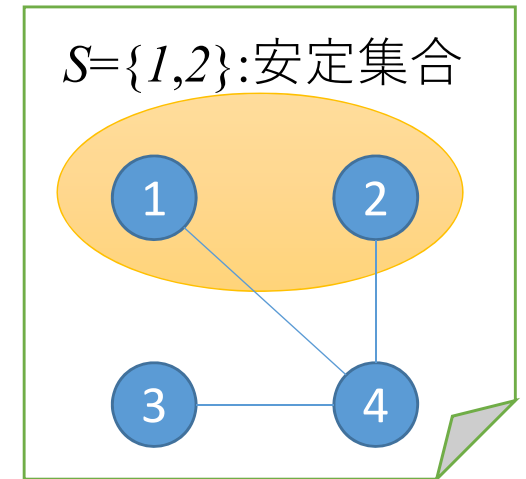
について、要素数が最大となる安定集合 S を求めなさい

※点の部分集合 S ($S \subseteq V$) が安定集合 (stable set) $\Leftrightarrow S$ 内の任意の2点間に枝がない

【演習】 0-1IPに定式化せよ

➤ 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$

➤ 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \text{点 } i \text{ が安定集合 } S \text{ に含まれる} \\ 0 & \dots \text{otherwise} \end{cases}$



3.安定集合

【定式化：解答例】

- 最大安定集合問題 *maximum stable set problem*

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \text{s.t.} & x_i + x_j \leq 1 \quad (\forall (i, j) \in E) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in V)\end{array}$$

3.安定集合

- 例題：最大安定集合問題

10人の学生がいる

人数が最大の仲良しグループをつくれ

※学生を点とし，仲が悪い学生間に枝を張ると，最大安定集合問題となる

【演習】 Excel Solver で求解せよ

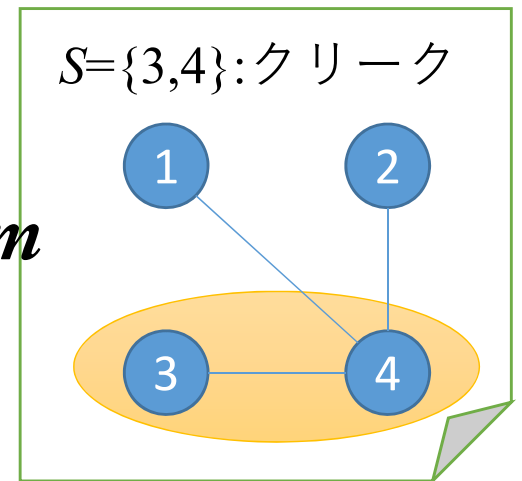
3.安定集合

• 最大クリーク問題 *maximum clique problem*

無向グラフ $G = (V, E)$ ($V = \{1, 2, \dots, n\}$)

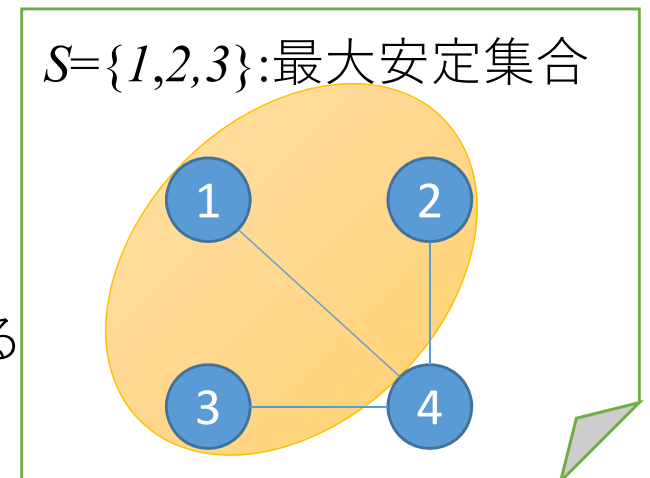
について、要素数が最大となるクリーク C を求めなさい

※点の部分集合 C ($C \subseteq V$) がクリーク $\Leftrightarrow C$ による誘導部分グラフが完全グラフ



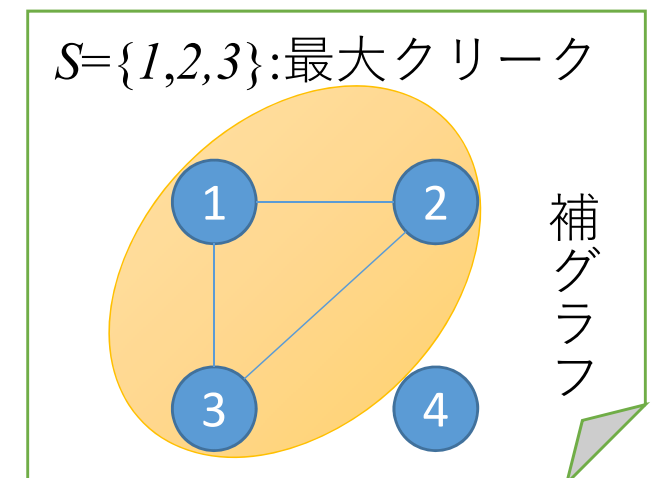
【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \text{点 } i \text{ がクリーク } C \text{ に含まれる} \\ 0 & \dots \text{otherwise} \end{cases}$



【補足】

無向グラフ $G = (V, E)$ 上の最大安定集合問題
= 補グラフ $\bar{G} = (V, \bar{E})$ 上の最大クリーク問題



3.安定集合

【定式化例】

- 最大クリーク問題 *maximum clique problem*

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \text{s.t.} \quad & y_{ij} \leq x_i \quad (\forall (i,j) \in E \text{ with } i < j) \\ & y_{ij} \leq x_j \quad (\forall (i,j) \in E \text{ with } i < j) \\ & \sum_{i < j} y_{ij} \geq k \sum_i x_i - \sum_{i=1}^{k-1} i \quad (k = 2, 3, \dots, n) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in V) \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\forall (i,j) \in E \text{ with } i < j) \end{aligned}$$

4.集合分割

• 集合分割問題 *set partition problem*

集合 V を m 個に分割しなさい

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, m = 2$$
$$\rightarrow S_1 = \{1, 2, 4\} : \text{分割1}$$
$$S_2 = \{3\} : \text{分割2}$$

※def) V の部分集合族 $\{V_1, \dots, V_m\}$ が V の分割 $\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^m V_i = V, V_i \cap V_j = \emptyset (\forall i, j; i \neq j)$

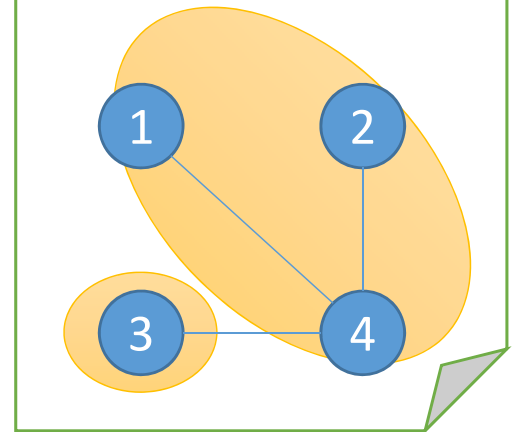
※連結成分分割 (無向グラフ $G = (V, E)$ を m 個の連結成分に分割せよ)

【演習】 0-1IPに定式化せよ

- V の部分集合 $V_i (i = 1, 2, \dots)$
- V_i を表す特性ベクトル $a_i \in \mathbf{R}^{|V|}$

- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \dots V_i \text{ を分割の構成要素として使う} \\ 0 & \dots \text{otherwise} \end{cases}$

$S_1 = \{1, 2, 4\} : \text{連結成分1}$
 $S_2 = \{3\} : \text{連結成分2}$



4.集合分割

【定式化：解答例】

- 集合分割問題 *set partition problem*

min. or max.問題による何らかの目的

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & a_1x_1 + a_1x_1 + \cdots = 1 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1,2,\cdots) \end{aligned}$$

4.集合分割

• 例題：連結成分分割問題（飛び地なし集合分割問題）

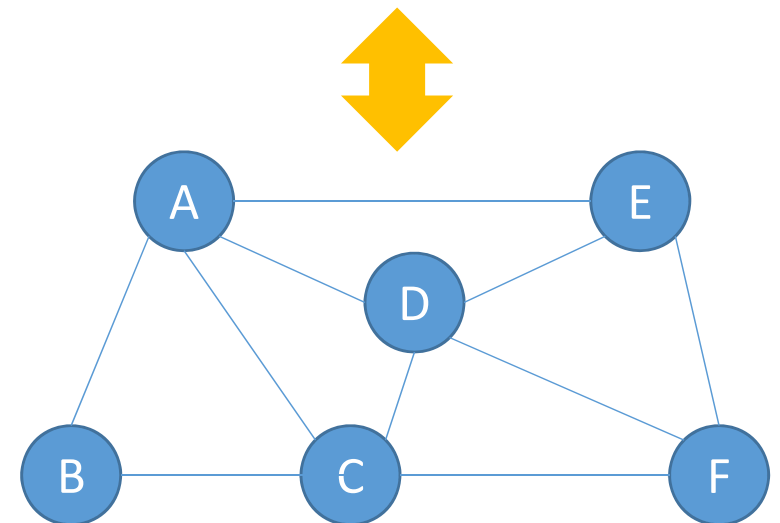
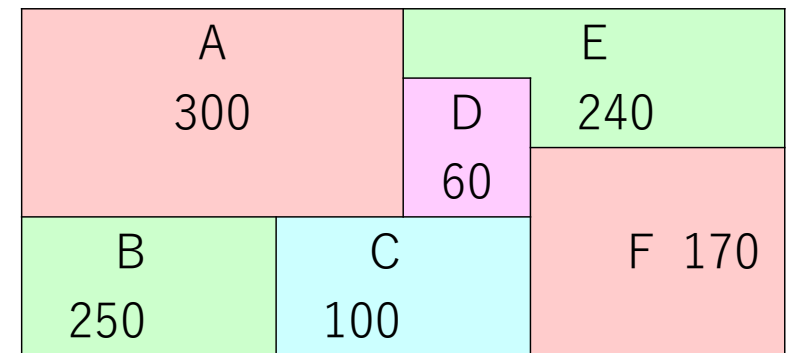
6つの地区（A,B,...,F）があり，各地区の人口が与えられている

3つの地域に分割したい（ただし，分割後の各地域は連結であること）

最大人口の地域と最小人口の地域の差を最小とする分割を求めよ

【演習】 Excel Solver で求解せよ

- V の部分集合 $V_i (i = 1, 2, \dots)$
- V_i を表す特性ベクトル $a_i \in \mathbf{R}^{|V|}$
- V_i の人口 p_i
- 0-1変数 x_i
- 実数変数 $u, l \dots$ 分割人口の上限と下限



4.集合分割

【定式化：例題の解答例】

- 集合分割問題 *set partition problem*

$$\begin{aligned} \min. \quad & u - l \\ \text{s.t.} \quad & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots = 1 \\ & p_i x_i \leq u \quad (i = 1, 2, \dots) \\ & p_i x_i + \bar{p}(1 - x_i) \geq l \quad (i = 1, 2, \dots) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

x_i は第*i*地域を採用するかどうかの0-1変数

1番目の制約式は、各地区は1回のみ使用、つまりたくさんある地域の内3つだけ採用（値が1になる. 他は全部0）

2番目の制約式は、3つの地域の最大人口をu以下とする

3番目の制約式は、3つの地域の最小人口をl以上とする

3番目が2番目と違い、余計な項がついているのは、 x_i の値が0の場合について対処するため. この余分な項がないと、lの値が0以下になって意味をなさないことに注意せよ

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

i は分割のパターン（地域）を表すことに注意

例えば

✓ a_1 は地区Aのみを含む地域

✓ a_2 は地区A,Bからなる地域

...

であり、各地域の人口は

$p_1=300, p_2=550, \dots$

$$\bar{p} = \frac{1120}{3} = 373$$

(1分割あたり平均人口)

5.巡回セールスマン

TSP, Traveling Salesman Problem

• 対称巡回セールスマン問題 *symmetric TSP*

無向グラフ $G = (V, E)$ ($V = \{1, 2, \dots, n\}$)

について、全ての点を丁度1度ずつ経由するコスト最小の巡回路を求めよ

【演習】 0-1IPに定式化せよ

➤ 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 枝 $e \in E$ 上のコスト c_e

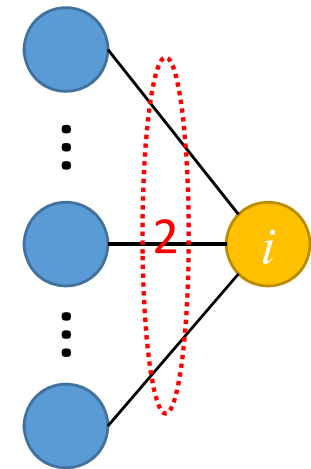
➤ 0-1変数 $x_e = \begin{cases} 1 & \dots \text{巡回路として枝 } e \in E \text{ を通る} \\ 0 & \dots \text{otherwise} \end{cases}$

5.巡回セールスマン

• 定式化

$$\begin{array}{ll}\min. & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.t.} & \sum_{e \in \delta(\{i\})} x_e = 2 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad (\forall e \in E)\end{array}$$

この制約の意図



しかし、この制約だけでは部分巡回路が含まれる

※ $\delta(\{i\})$: 端点の一つが i となる枝集合

部分巡回路をどう回避する？

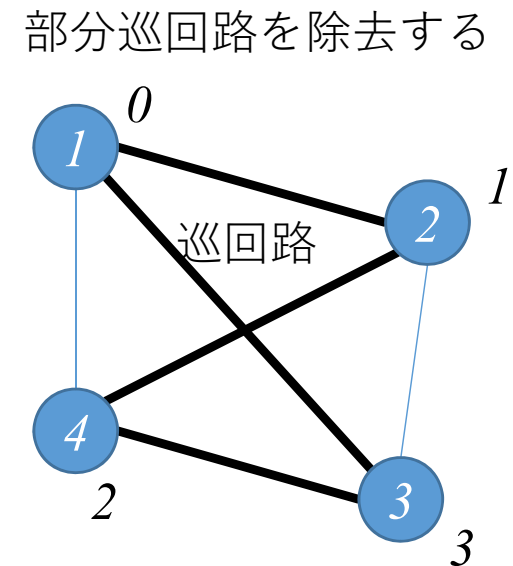
- ✓ 部分巡回路除去定式化
- ✓ ポテンシャル定式化
- ✓ 単一品種流定式化
- ✓ 多品種流定式化
- ✓ etc.

5.巡回セールスマン

- 部分巡回路除去定式化

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(\{i\})} x_e = 2 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad (\forall e \in E) \end{aligned}$$

部分巡回路が
含まれる



$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad (\forall S \subset V, |S| \geq 2)$$

※ S : 点集合 V の任意の真部分集合 (つまり $S \neq V$)

※ $E(S)$: 両端点が S に含まれる枝の集合

5.巡回セールスマン

- 非対称巡回セールスマン問題 *asymmetric TSP*

有向グラフ $G = (V, E)$ ($V = \{1, 2, \dots, n\}$)

について、全ての点を丁度1度ずつ経由するコスト最小の巡回路を求めよ

【演習】 0-1IPに定式化せよ

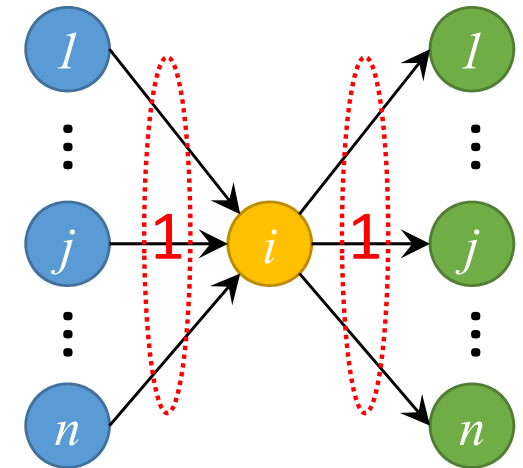
- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 枝 $(i, j) \in E$ 上のコスト c_{ij}
- 0-1変数 $x_{ij} = \begin{cases} 1 \dots & \text{巡回路として枝 } (i, j) \in E \text{ を } i \rightarrow j \text{ の順に通る} \\ 0 \dots & \text{otherwise} \end{cases}$

5.巡回セールスマン

• 定式化

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j: j \neq i} x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \\ & \sum_{j: j \neq i} x_{ji} = 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\forall i \neq j) \end{aligned}$$

この制約の意図



しかし、この制約
だけでは部分巡回
路が含まれる

部分巡回路をどう回避する？

- ✓ 部分巡回路除去定式化
- ✓ ポテンシャル定式化
- ✓ 単一品種流定式化
- ✓ 多品種流定式化
- ✓ etc.

5.巡回セールスマン

- ポテンシャル定式化

$$\min. \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \left. \begin{aligned} \sum_{j:j \neq i} x_{ij} &= 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \\ \sum_{j:j \neq i} x_{ji} &= 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad (\forall i \neq j) \end{aligned} \right\}$$

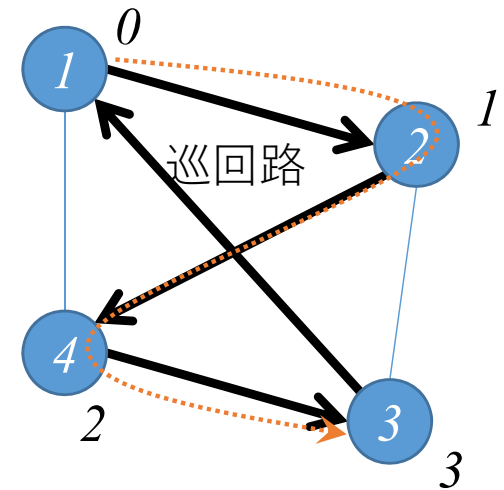
$$\begin{aligned} u_i + 1 - (n - 1)(1 - x_{ij}) &\leq u_j \quad (\forall i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n; i \neq j) \\ 1 \leq u_i &\leq n - 1 \quad (\forall i = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

u_i : 点 i の訪問順序を表す実数変数

□ $u_1 = 0$

□ $i \rightarrow j$ の順に訪問するとき $u_j = u_i + 1$

巡回路に訪問順ラベルがつく



部分巡回路が
含まれる

5.巡回セールスマン

- 単一品種流定式化

$$\min. \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } \sum_{j: j \neq i} x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})$$

$$\sum_{j: j \neq i} x_{ji} = 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\forall i \neq j)$$

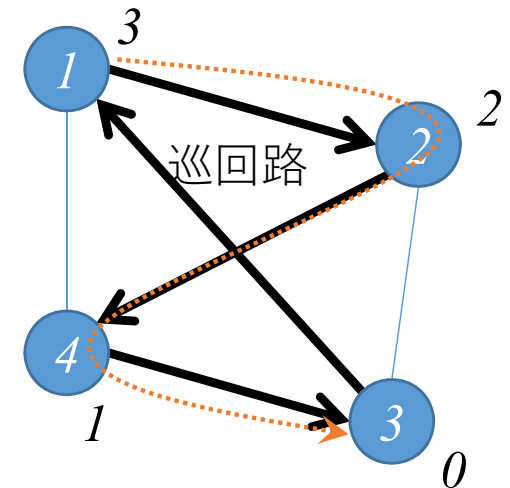
部分巡回路が
含まれる

$$\begin{aligned} \sum_j f_{1j} &= n - 1 \\ \sum_j f_{ji} - \sum_j f_{ij} &= 1 \quad (\forall i = 2, \dots, n) \\ f_{1j} &\leq (n - 1)x_{1j} \quad (\forall j \neq 1) \\ f_{ij} &\leq (n - 2)x_{ij} \quad (\forall i \neq j, i \neq 1, j \neq 1) \\ f_{ij} &\geq 0 \quad (\forall i \neq j) \end{aligned}$$

f_{ij} : 点 $i \rightarrow j$ のフロー

- 点1から $n-1$ のフローを流す
- 各点では 1 消費する
- フローは巡回路上のみ流れる

点1から3のフローを流す
各点は1ずつ消費



5.巡回セールスマン

• 多品種流定式化

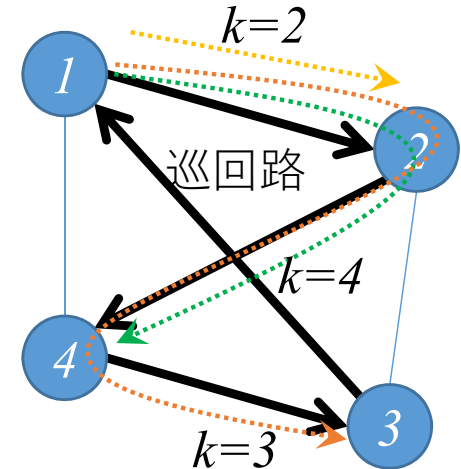
$$\min. \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = 1 \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall i \neq j)$$

点1から3種のフローを流す



部分巡回路が
含まれる

$$\sum_j f_{ji}^k - \sum_j f_{ij}^k = \begin{cases} -1 (i = 1) \\ 0 (i \neq 1, k) \\ 1 (i = k) \end{cases} \quad (\forall k = 2, \dots, n)$$

$$f_{ij}^k \leq x_{ij} \quad (\forall k, i, j)$$

$$f_{ij}^k \geq 0 \quad (\forall i \neq j, j \neq 1, k)$$

f_{ij}^k : 品種 k の点 $i \rightarrow j$ のフロー

- 点1から $n-1$ 種類のフローを流す
- 各品種のフローは全て1単位
- 各品種 $k=2, \dots, n$ は対応点 $2, \dots, n$ が受け取る ($k=2$ は点2, $k=3$ は点3, ..., $k=n$ は点 n が受け取る)
- 各フローは巡回路上のみ流れる

6. 配送計画問題

VRP, vehicle routing problem

• 容量制約付き 配送計画問題 *capacitated VRP*

無向グラフ $G = (V, E)$ ($V = \{1, 2, \dots, n\}$)

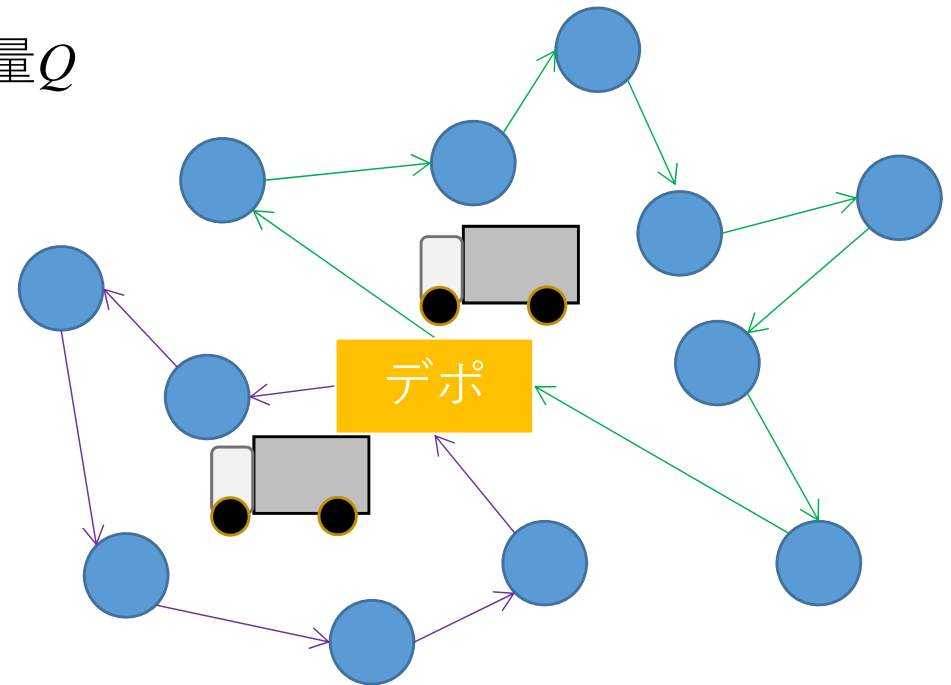
について, デポ (配送センター($i=1$)) から顧客($i=2, 3, \dots, n$) へ物資を輸送

配送車 $k=1, 2, \dots, m$ (m 台) 各配送車の容量 Q

顧客の需要 q_i , 枝 $(i, j) \in E$ 上の輸送コスト c_{ij}

※ $\forall i, q_i \leq Q$ として一般性を失わない
(もし $q_i > Q$ となる顧客がいたら
その顧客 (点) を分割すればよい)

※ $\sum_i q_i \leq mQ$ とする



【演習】 0-1IPに定式化せよ

➤ 0-1変数 $x_{ij} = \begin{cases} 1 \dots & \text{輸送路として枝 } (i, j) \in E \text{ を使う (向きは不問)} \\ 0 \dots & \text{otherwise} \end{cases}$

6. 配送計画問題

• 定式化

$$\min. \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = b_i \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = b_i \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\forall i \neq j)$$

□ 点 $i=1$ はデポ（配送センター）

□ 点 $i=2, \dots, n$ は顧客（顧客数 $n-1$ ）

□ デポから m 台の配送車が往復
→ $b_1 = m$

□ 各顧客へは「届けて / 帰る」
→ $b_i = 1 \quad (i=2, \dots, n)$

部分巡回路が含まれる

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - N(S) \quad (\forall S \subset \{2, \dots, n\}; |S| \geq 3)$$

□ 部分巡回路除去 & 配送車容量制約

□ S : 顧客の部分集合

□ $N(S)$: S 内の顧客の総需要を満たすために必要な配送車の台数

$$N(S) = \left\lceil \sum_{i \in S} q_i / Q \right\rceil$$

7. スポーツ・スケジューリング

• single round-robin tournament

n チームの総当たりリーグ戦

各チームは、他のチームと丁度1回ずつ対戦する．1チームあたり $n-1$ 試合(slot)

全てのチームがどちらかのホームで毎回試合を行う（1方がHome, 他方がAway）

何らかの目的（Break数最小化，巡回路長最小化, etc）のもとでスケジュールを組む

team/slot	1	2	3
A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

チームの集合 $T = \{ 1, 2, \dots, n \}$ ※チーム数 n は偶数のみと思って一般性を失わない

スロットの集合 $S = \{ 1, 2, \dots, n-1 \}$ ※スロット数は「チーム数 - 1」

【演習】 0-1IPに定式化せよ

➤ 0-1変数 $x_{ijs} = \begin{cases} 1 & \dots \text{チーム } i \text{ vs. } j \text{ の対戦を, } i \text{ のHomeで, 第 } s \text{ slotに実施} \\ 0 & \dots \text{otherwise} \end{cases}$

7. スポーツ・スケジューリング

• 定式化

※Break数最小化 = 非Break数最大化

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in T/\{i\}} (x_{ijs} + x_{jis}) = 1 \quad (\forall i \in T, \forall s \in S) \\ & \sum_{s \in S} (x_{ijs} + x_{jis}) = 1 \quad (\forall i, j \in T; i \neq j) \\ & x_{ijs} \in \{0, 1\} \quad (\forall i, j, s; i \neq j) \end{aligned}$$

- 制約1：各チーム*i*はどのスロット*s*でも、Home/Awayのどちらかで1回戦う
- 制約2：任意の2チーム*i, j*の試合 *i* vs. *j* は、どこかのスロット*s*で丁度1回行う

参考文献

1. 今野浩 「線形計画法」 日科技連 (1987)
2. 藤田・今野・田邊 「最適化法」 岩波書店 (1994)
3. 田村明久・村松正和 「最適化法」 共立出版 (2002)
4. 坂和正敏 「線形計画法の基礎と応用」 朝倉書店 (2012)
5. 小島・土谷・水野・矢部 「内点法」 朝倉書店 (2001)
6. *A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley and Sons, 1986.*
7. *L.A. Wolsey: Integer Programming, John Wiley and Sons, 1998.*
8. *M. Conforti, G. Cornuejols and G. Zambelli: Integer Programming, Springer, 2014.*
9. 久保幹雄, J.P.ペドロソ, 村松正和, A.レイス：あたらしい数理最適化, 近代科学社, 2012.
10. 久保幹雄, 小林和博, 斉藤努, 並木誠, 橋本英樹：Python言語によるビジネスアナリティクス, 近代科学社, 2016.
11. 藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎：Excelで学ぶOR, オーム社, 2011.