Excel ソルバーではじめるOR

後藤順哉[1]　　　堀田敬介[2]

[1] 中央大学
[2] 文教大学

2017 年10 月7 日（土）

本セミナーの構成

1. 数理最適化とソルバー（後藤）
2. Excel ソルバー入門（堀田）

---

3. 0–1 整数計画（堀田）
4. ポートフォリオ選択（後藤）
5. VBA を使って便利にする（後藤）
6. データ包絡分析法（後藤）

- 閉会（閉会後　個別相談・質問コーナー）

Excel ソルバー入門

セッション2

堀田敬介

文教大学

2017 年10 月7 日（土）

Outline

1. ともかく使ってみよう：LPを解く
2. ダイエット問題の定式化と求解
3. 輸送問題の定式化と求解
4. 割当問題の定式化と求解
5. クラス編成問題の定式化と求解
6. . 非零和ゲームの均衡解と線形計画法
7. 適当な問題を生成して解かせてみる

1. ともかく使ってみよう：LPを解く

- 線形計画問題(Linear Program)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5 \\
& 9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1 \\
& x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3 \\
& x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. ともかく使ってみよう：LPを解く

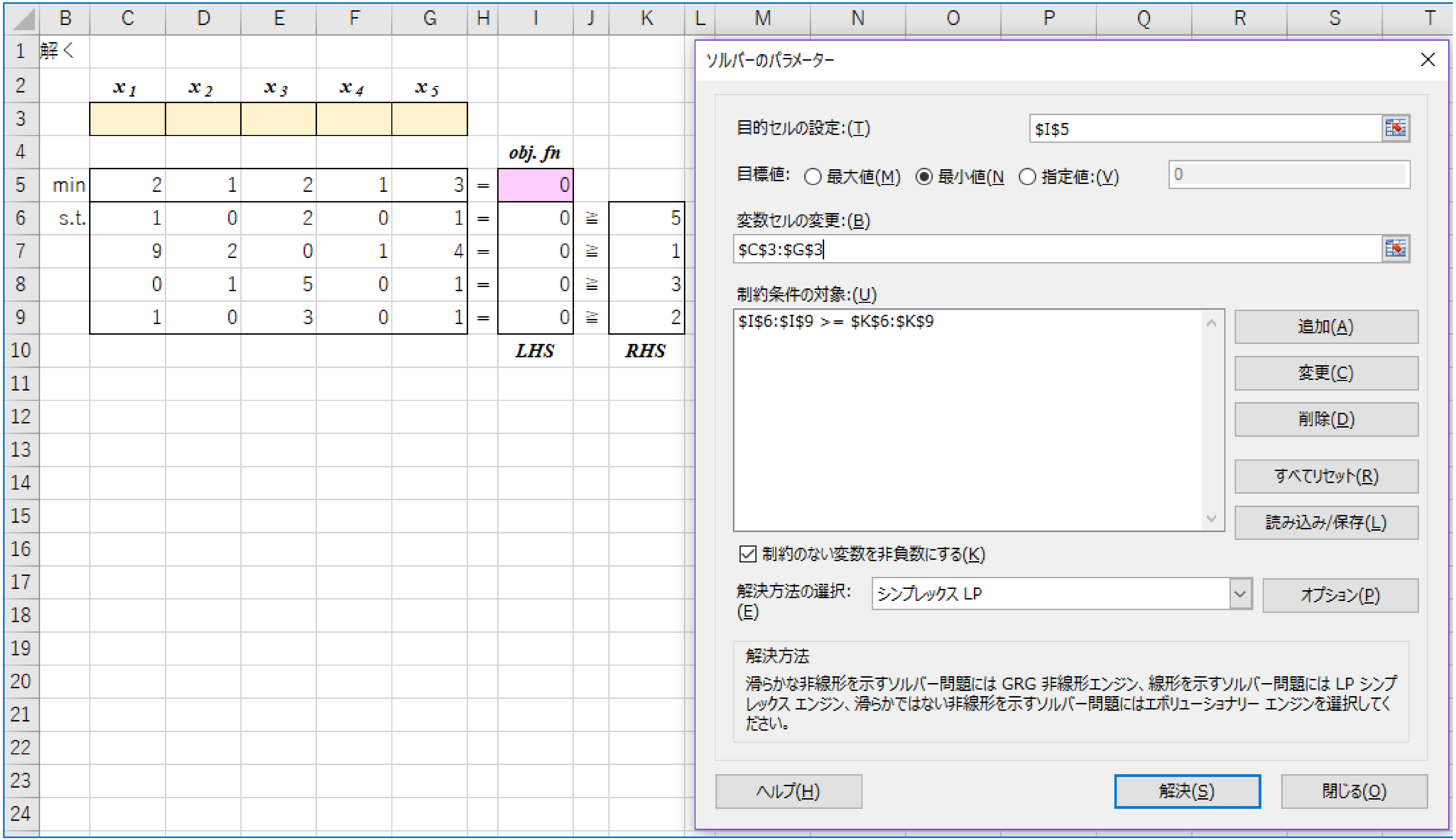
- 線形計画問題(Linear Program)

$$
\begin{array}{lr}
\text{min.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5 \\
 & 9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1 \\
 & x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3 \\
 & x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1. LP を解く															
2			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5									
3																
4									*obj. fn*				数式			
5		min	2	1	2	1	3	=	0				[I5] = SUMPRODUCT(C$3:G$3, C5:G5)			
6		s.t.	1	0	2	0	1	=	0	≧	5		↓			
7			9	2	0	1	4	=	0	≧	1		[I6]～[I9]へコピー			
8			0	1	5	0	1	=	0	≧	3		↓			
9			1	0	3	0	1	=	0	≧	2		↓			
10									*LHS*		*RHS*					

1. ともかく使ってみよう：LPを解く

- 線形計画問題(Linear Program)



1. ともかく使ってみよう：LPを解く

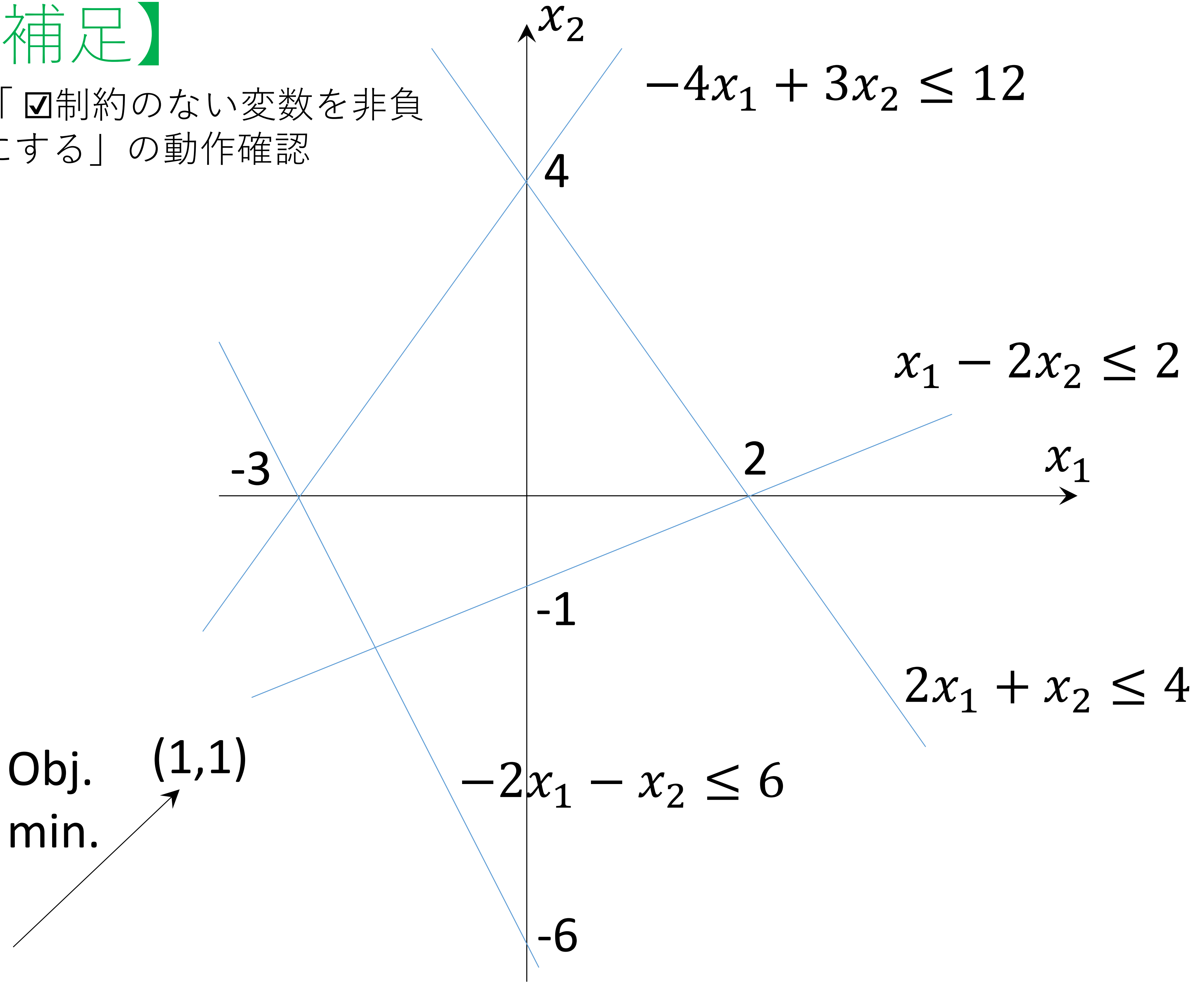
【演習】

- 以下のLPについてExcel solverで最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -2x_1 - x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

【補足】

「☑制約のない変数を非負にする」の動作確認



【補足】

「☑制約のない変数を非負にする」の動作確認

✓ 4つのケースで最適解がどう変わるか（どの制約が活きるか）確認

① ☑制約のない変数を非負にする
② ☐制約のない変数を非負にする
③ ☑制約のない変数を非負にする & 制約「$x_1 \geqq -1$」を追加
④ ☑制約のない変数を非負にする & 制約「$x_2 \geqq -1$」を追加

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	「制約のない変数を非負にする」へのチェックについて動作確認												opt. sol.			つまり追加される制約は	
2			x_1	x_2									x_1	x_2		x_1	x_2
3			0	-1						☑	制約のない変数を非負にする	→	0	0		$x_1 \geqq 0$	$x_2 \geqq 0$
4																	
5		min	1	1	＝	-1				☐	制約のない変数を非負にする	→	-2	-2		なし	なし
6		s.t.	1	-2	＝	2	≦	2									
7			-4	3	＝	-3	≦	12		☑	制約のない変数を非負にする	→	-1	0		なし	$x_2 \geqq 0$
8			2	1	＝	-1	≦	4			& [$x_1 \geqq -1$]						
9			-2	-1	＝	1	≦	6									
10										☑	制約のない変数を非負にする	→	0	-1		$x_1 \geqq 0$	なし
11											& [$x_2 \geqq -1$]						

2. ダイエット問題の定式化と求解

- 例題：ダイエット問題

『なめがやわーるど』では，「神秘ケーキ」「魅惑菓子」「苦渋野菜」「過酸果物」の4つの食べ物と，「だんはっく」「ガルジウム」「ヒタビン」という3つの栄養素，3つの食品含有物「糖分」「塩分」「ガロリー」が存在する．4つの食べ物は3つの栄養素と3つの食品含有物を，1単位当たり各々下表に示す量だけ含む

栄養素	神秘ケーキ	魅惑菓子	苦渋野菜	過酸果物
だんはっく	3	1	4	2
ガルジウム	1	2	2	1
ヒタビン	2	1	2	5
糖分	7	5	3	4
塩分	1	2	4	8
ガロリー	40	50	55	20

『なめがやわーるど』人は，3栄養素を一日に各々最低50, 40, 60は摂取しないと死んでしまう！　また，糖分と塩分は各々一日に150を超えると過剰摂取で死んでしまう！！　ダイエットしたい花子さんのために，ガロリーを最小にする食べ物の量を教えて欲しい

【演習】 LPに定式化して Excel Solver で求解せよ

3. 輸送問題の定式化と求解

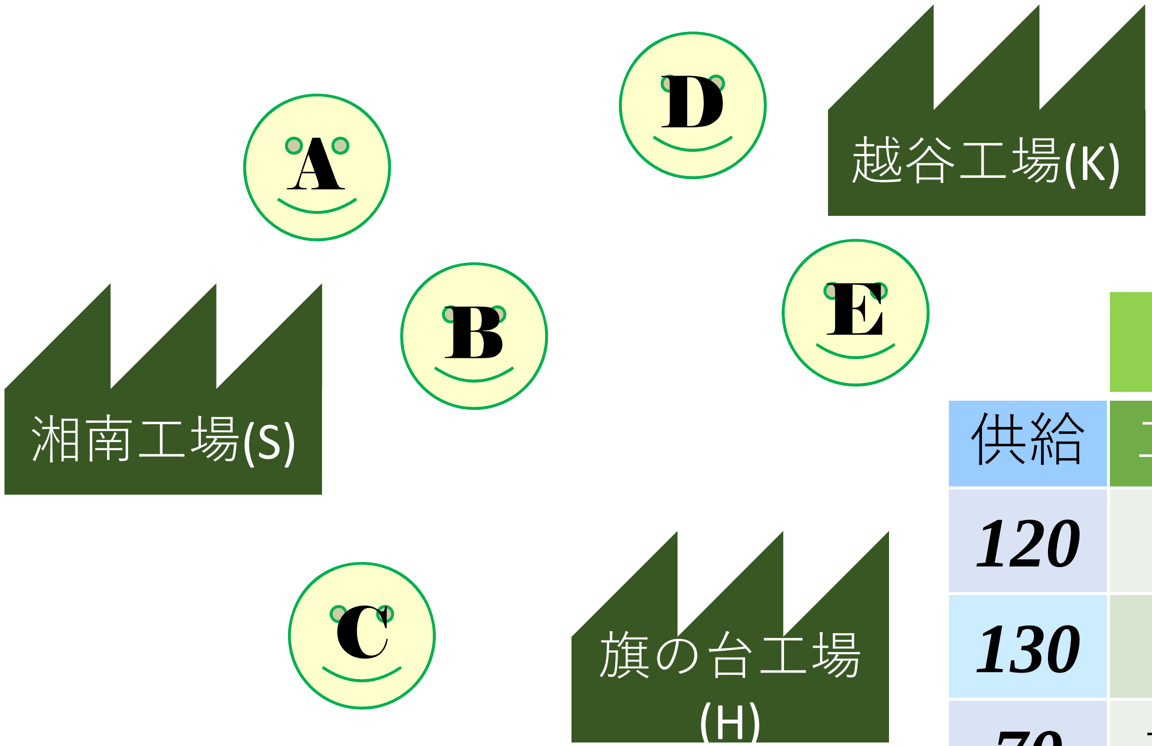
- 例題：ダイエット問題　定式化解答例

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 40x_1 + 50x_2 + 55x_3 + 20x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 50 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 40 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq 60 \\
& 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 150 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 150 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

3. 輸送問題の定式化と求解

- 例題：輸送問題

文教重工には3工場（湘南・越谷・旗の台）あり，製品を供給できる
顧客は5人いて，需要（製品を欲しい量）がある
3工場から5人の顧客それぞれへの単位あたり輸送コストは表の通り
輸送コストが最小となる配送計画をたてよ



✓ 工場の供給量
✓ 顧客の需要量
✓ 工場から顧客へ製品を1単位
配送するのにかかる輸送コスト表

	需要	50	80	60	70	40
供給	工場＼顧客	A	B	C	D	E
120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3

【演習】 LPに定式化して Excel Solver で求解せよ

3. 輸送問題の定式化と求解

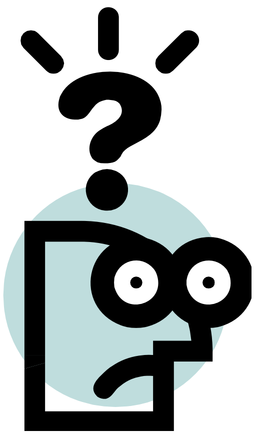
- 例題：輸送問題　定式化解答例

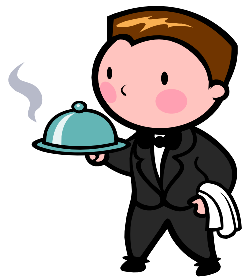
$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 3x_{SA} + 2x_{SB} + 4x_{SC} + 5x_{SD} + 8x_{SE} \\
& +5x_{KA} + 6x_{KB} + 5x_{KC} + 3x_{KD} + 2x_{KE} \\
& +7x_{HA} + 3x_{HB} + x_{HC} + 2x_{HD} + 3x_{HE} \\
\text{s.t.}\quad & x_{SA} + x_{SB} + x_{SC} + x_{SD} + x_{SE} \leq 120 \\
& x_{KA} + x_{KB} + x_{KC} + x_{KD} + x_{KE} \leq 130 \\
& x_{HA} + x_{HB} + x_{HC} + x_{HD} + x_{HE} \leq 70 \\
& x_{SA} + x_{KA} + x_{HA} = 50 \\
& x_{SB} + x_{KB} + x_{HB} = 80 \\
& x_{SC} + x_{KC} + x_{HC} = 60 \\
& x_{SD} + x_{KD} + x_{HD} = 70 \\
& x_{SE} + x_{KE} + x_{HE} = 40 \\
& x_{SA}, \ldots, x_{HE} \geq 0
\end{aligned}
$$

4. 割当問題の定式化と求解

- 例題：割当問題

上司が10人の部下に仕事をまかせようとしている
仕事は全部で15種類ある（A,B,C,...,O）
10人の部下の内，4人は新人で6人はベテランである
各々の仕事をどの部下がやるかにより，上司は事前に5段階評価している（1,...,5）
ベテランは同時に2つまで仕事をまかせられる
新人は同時に1つまでしか仕事をまかせられず，どの仕事の最大評価も3（1,...,3）
評価値総和が最大になるように，各部下に仕事を割り振りたい





【演習】 LPに定式化して Excel Solver で求解せよ

4. 割当問題の定式化と求解

- 演習：割当問題　定式化解答例

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & 3x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + \cdots + 3x_{1N} + 3x_{1O} \\
& + \cdots + \\
& +4x_{10A} + 5x_{10B} + 5x_{10C} + \cdots + 3x_{10N} + 5x_{10O} \\
\text{s.t.}\quad & ①\left\{\begin{aligned} & x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + \cdots + x_{1O} \leq 1 \\ & \cdots \\ & x_{10A} + x_{10B} + x_{10C} + \cdots + x_{10O} \leq 2 \end{aligned}\right. \\
& ②\left\{\begin{aligned} & x_{1A} + x_{2A} + \cdots + x_{10A} = 1 \\ & \cdots \\ & x_{1O} + x_{2O} + \cdots + x_{10O} = 1 \end{aligned}\right. \\
& x_{1A}, \ldots, x_{10O} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

制約式①は，部下達は1ないし2の仕事を担当できる
制約式②は，各仕事は必ず誰かが担当する
0-1制約は $0 \leqq x_{ij} \leqq 1$ にしてよい（補足：完全単模行列）

4. 割当問題の定式化と求解

- 演習：割当問題　定式化解答例

$$\text{max.}\ -999x_{1\alpha}+30x_{1\beta}+100x_{1\gamma}-999x_{1\delta}-999x_{1\varepsilon}+60x_{1\zeta}$$
$$+\cdots+$$
$$+30x_{1\alpha}+100x_{1\beta}+60x_{1\gamma}-999x_{1\delta}-999x_{1\varepsilon}-999x_{1\zeta}$$

s.t.

$$① \left\{\begin{aligned} & x_{1\alpha}+x_{1\beta}+x_{1\gamma}+\cdots+x_{1\zeta}=1 \\ & \cdots \\ & x_{33\alpha}+x_{33\beta}+x_{33\gamma}+\cdots+x_{33\zeta}=1 \end{aligned}\right.$$

$$② \left\{\begin{aligned} & x_{1\alpha}+x_{2\alpha}+\cdots+x_{33\alpha}\leq 6 \\ & \cdots \\ & x_{1\zeta}+x_{2\zeta}+\cdots+x_{33\zeta}\leq 6 \end{aligned}\right.$$

$$x_{1\alpha},\ldots,x_{33\zeta}\in\{0,1\}$$

制約式①は，各学生は6クラスのどこか1か所に所属する
制約式②は，各クラスの定員は6人
0-1制約は $0 \leqq x_{ij} \leqq 1$ にしてよい（補足：完全単模行列）

【補足】

- 単模行列(unimodular matrix)
  - def) 整数正方行列$A\in R^{n\times n}$が単模行列　⇔　$\det A=1$ or -1
  - theorem) 単模行列の逆行列も，整数行列で単模行列

- 完全単模行列(totally unimodular matrix)
  - def) 整数行列$A\in R^{m\times n}$が完全単模行列
    ⇔　任意の小行列式の値が 0 or 1 or -1
  - theorem) 完全単模行列の各要素は 0 or 1 or -1
  - ex) 有向グラフの接続行列は完全単模
  - ex) 無向グラフの接続行列が完全単模となる必要十分条件はグラフが2部であること（cf. 3点奇数サイクルのグラフは$\det A=\pm 2$）
  - theorem) LP(P)が最適解をもち，係数行列Aが完全単模とする．bが整数ベクトルなら，(P)は整数最適解 $x\in Z^n$をもつ

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \max. & c^t x \\
 & s.t. & Ax = b \\
 & & x \geqq 0
\end{array}
$$

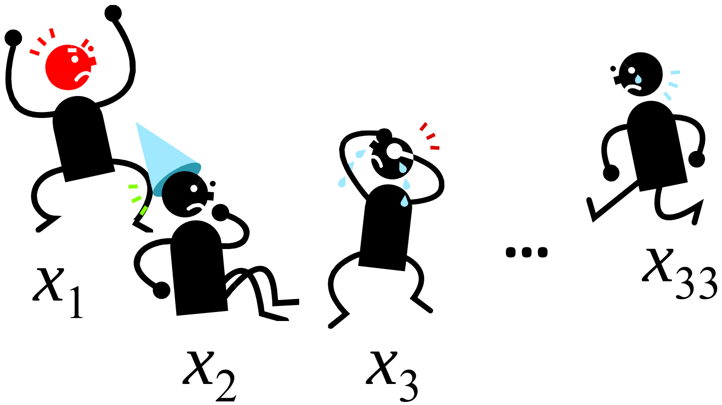
proof) (P)の基底Bに対する基底解は$(B^{-1}b, 0)$
Aが完全単模なので，Bは単模行列
よって，B^{-1}は整数行列．故に$B^{-1}b$は整数ベクトル■

5. クラス編成問題の定式化と求解

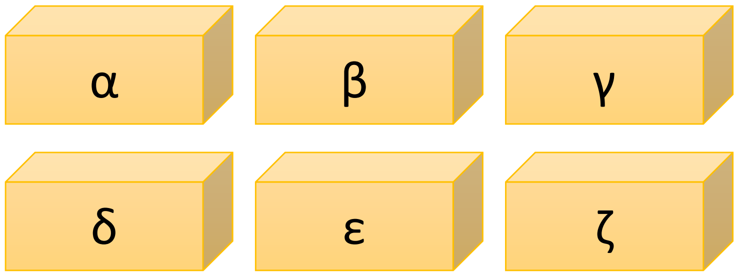
- 例題：クラス編成問題

33人の学生を6つのクラスに配属させたい
各学生は丁度1つのクラスに所属させ，配属しないという選択はないとする
各学生は6つのクラスへの希望を持っている（第1志望～第3志望）のみ
クラスには定員があり，全て6人である（容量6人×6クラス=36人で充分）
全学生の満足度総和が最大になるように学生をクラスへ配属させなさい

学生33人



6クラス（各定員6人）



【演習】 LPに定式化して Excel Solver で求解せよ

6. 零和ゲームの均衡解と線形計画法

- 2人非協力零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）と混合戦略 $\boldsymbol{p}$

$$
\begin{array}{c}
p_1 \\ p_2 \\ \\ p_m
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\
 & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \quad + a_{m1}p_m \\
E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \quad + a_{m2}p_m \\
\\
E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \quad + a_{mn}p_m
\end{cases}
$$

$$
\max_{\boldsymbol{p}} \min \left\{ E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}), E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}), \quad , E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) \right\}
$$

まとめると…

$$
\begin{array}{ll}
\max . \, u & \\
s.t. & a_{11}p_1 + \quad + a_{m1}p_m \geq u \\
 & a_{12}p_1 + \quad + a_{m2}p_m \geq u \\
 & \\
 & a_{1n}p_1 + \quad + a_{mn}p_m \geq u \\
 & p_1 + \quad + p_m = 1 \\
 & p_1, \quad , p_m \geq 0
\end{array}
$$

6. 零和ゲームの均衡解と線形計画法

- 2人非協力零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーBの損失行列(Aの利得行列)と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_m & q_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \quad + a_{1n}q_n \\ E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \quad + a_{2n}q_n \\ \\ E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \quad + a_{mn}q_n \end{cases}$$

$$\min_{\boldsymbol{q}} \max \left\{ E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}), E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}), \quad , E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) \right\}$$

まとめると…

$$\begin{array}{ll} \min . \, w & \\ s.t. & a_{11}q_1 + \quad + a_{1n}q_n \leq w \\ & a_{21}q_1 + \quad + a_{2n}q_n \leq w \\ & \\ & a_{m1}q_1 + \quad + a_{mn}q_n \leq w \\ & q_1 + \quad + q_n = 1 \\ & q_1 , \quad , \; q_n \geq 0 \end{array}$$

6. 零和ゲームの均衡解と線形計画法

◆ 2人非協力零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題
（LPの主問題：**P**）

主・双対

プレイヤーBの最適化問題
（LPの双対問題：**D**）

$$
\begin{array}{|ll}
\max . u & \\
s.t. & a_{11} p_1 + \quad + a_{m1} p_m \geq u \\
 & a_{12} p_1 + \quad + a_{m2} p_m \geq u \\
 & \\
 & a_{1n} p_1 + \quad + a_{mn} p_m \geq u \\
 & \quad p_1 + \quad + p_m = 1 \\
 & \quad p_1 , \quad , \ p_m \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|ll}
\min . w & \\
s.t. & a_{11} q_1 + \quad + a_{1n} q_n \leq w \\
 & a_{21} q_1 + \quad + a_{2n} q_n \leq w \\
 & \\
 & a_{m1} q_1 + \quad + a_{mn} q_n \leq w \\
 & \quad q_1 + \quad + q_n = 1 \\
 & \quad q_1 , \quad , \ q_n \geq 0
\end{array}
$$

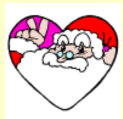
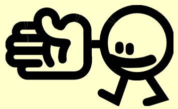
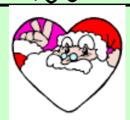
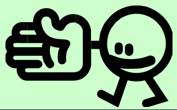
注）（**P**）（**D**）ともに自明解（$\boldsymbol{p}$=(1,0,…,0), $\boldsymbol{q}$=(1,0,…,0)）があるので実行可能.
→双対定理より，最適解が存在し，最適値は一致する

Theorem6

（P），（D）の最適解が（$\boldsymbol{p}^*, u^*$），（$\boldsymbol{q}^*, w^*$）のとき，（$\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*$）がゲームの均衡点であり，$v := u^* = w^*$がゲームの値である

6. 零和ゲームの均衡解と線形計画法

- 例題：じゃんけん

A＼B				min	max
	0	2	-7	-7	-2
	-2	0	4	-2	
	7	-4	0	-4	

max	7	2	4
min	2		

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

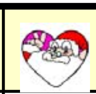
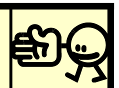
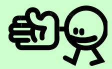
$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

6. 零和ゲームの均衡解と線形計画法

- 例題：じゃんけん

	A＼B (q_1)	(q_2)	(q_3)
				
p_1		0	2	-7
p_2		-2	0	4
p_3		7	-4	0

$$
\left|\begin{array}{lrrrl}
\max . u & & & & \\
s.t. & & -2p_2 & +7p_3 & \geq u \\
 & 2p_1 & & -4p_3 & \geq u \\
 & -7p_1 & +4p_2 & & \geq u \\
 & p_1 & +p_2 & +p_3 & =1 \\
 & p_1, & p_2, & p_3 & \geq 0
\end{array}\right.
\qquad
\left|\begin{array}{lrrrl}
\min . w & & & & \\
s.t. & & 2q_2 & -7q_3 & \leq w \\
 & -2q_1 & & +4q_3 & \leq w \\
 & 7q_1 & -4q_2 & & \leq w \\
 & q_1 & +q_2 & +q_3 & =1 \\
 & q_1, & q_2, & q_3 & \geq 0
\end{array}\right.
$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

【演習】 Excel Solver で最適解を求めよ

7. 適当な問題を生成して解かせてみる

- 例題：乱数によりLPの問題を生成
  - Excelによる乱数の生成方法
    1. 関数を使う RAND()　　[0,1)の一様乱数
    2. 関数を使う RANDBETWEEN(a,b)　　[a,b]の整数一様乱数
    3. 「データ分析」ツールの「乱数発生」を利用
       各種分布に従った乱数を生成できる

【演習】 乱数で適当なLPを生成し Excel Solver で求解せよ

参考文献

1. *A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley and Sons, 1986.*
2. *L.A. Wolsey: Integer Programming, John Wiley and Sons, 1998.*
3. *M. Conforti, G. Cornuejols and G.Zambelli: Integer Programming, Springer, 2014.*
4. 久保幹雄, **J.P.**ペドロソ, 村松正和, **A.**レイス：あたらしい数理最適化, 近代科学社,**2012.**
5. 久保幹雄, 小林和博, 斉藤努, 並木誠, 橋本英樹：**Python**言語によるビジネスアナリティクス, 近代科学社, **2016.**
6. 藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎：**Excel**で学ぶ**OR**, オーム社, **2011.**
7. 堀田敬介：えくせるであそぶ, 創成社, **2005.**