# Excel ソルバーではじめるOR

後藤順哉[1]　　　堀田敬介[2]

[1] 中央大学
[2] 文教大学

2017 年10 月7 日（土）

# 本セミナーの構成

1. 数理最適化とソルバー（後藤）
2. Excel ソルバー入門（堀田）

---

3. 0-1 整数計画（堀田）
4. ポートフォリオ選択（後藤）
5. VBA を使って便利にする（後藤）
6. データ包絡分析法（後藤）

- 閉会（閉会後　個別相談・質問コーナー）

# 0-1整数計画
## セッション3

堀田敬介

文教大学

2017 年10 月7 日（土）

# Outline

1. 0-1整数計画
2. ナップサック問題
3. 安定集合
4. 集合分割
5. 巡回セールスマン問題

# 1. 0−1整数計画

※ここでは，目的関数・制約
とも線形の場合のみ考える

- 整数計画(Integer Program)

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & c^t z \\
\text{s.t.}\quad & Az \le b \\
& z \ge 0 \\
& z \in Z
\end{aligned}
$$

0-1整数計画（0-1IP）

$$z \in \{0,1\}$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & c^t z + d^t x \\
\text{s.t.}\quad & Az + Ex \le b \\
& z, x \ge 0 \\
& z \in Z, x \in R
\end{aligned}
$$

混合整数計画（MIP）

0-1混合整数計画（0-1MIP）

$$z \in \{0,1\}$$

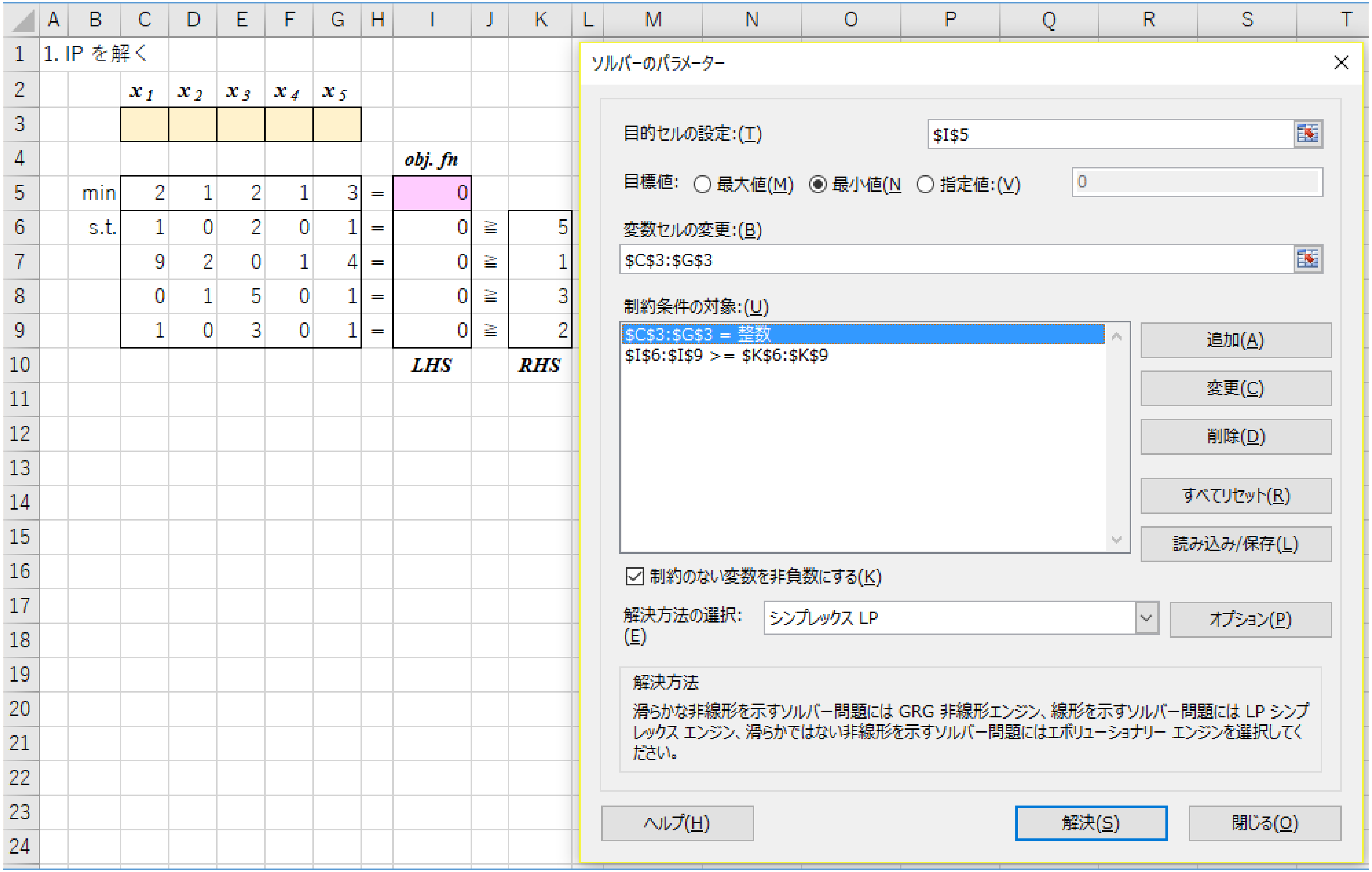
# 1. 0−1整数計画：IPを解く

- 整数計画(Integer Program)

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5 \\
& 9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1 \\
& x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3 \\
& x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, {\color{red} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in Z}
\end{aligned}
$$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1. IP を解く | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | *obj. fn* | | | | 数式 | | | |
| 5 | | min | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | = | 0 | | | | [I5] = SUMPRODUCT( C$3:G$3, C5:G5 ) | | | |
| 6 | | s.t. | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | = | 0 | ≧ | 5 | | ↓ | | | |
| 7 | | | 9 | 2 | 0 | 1 | 4 | = | 0 | ≧ | 1 | | [I6]～[I9]へコピー | | | |
| 8 | | | 0 | 1 | 5 | 0 | 1 | = | 0 | ≧ | 3 | | ↓ | | | |
| 9 | | | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | = | 0 | ≧ | 2 | | ↓ | | | |
| 10 | | | | | | | | | *LHS* | | *RHS* | | | | | |

# 1. 0–1整数計画：IPを解く



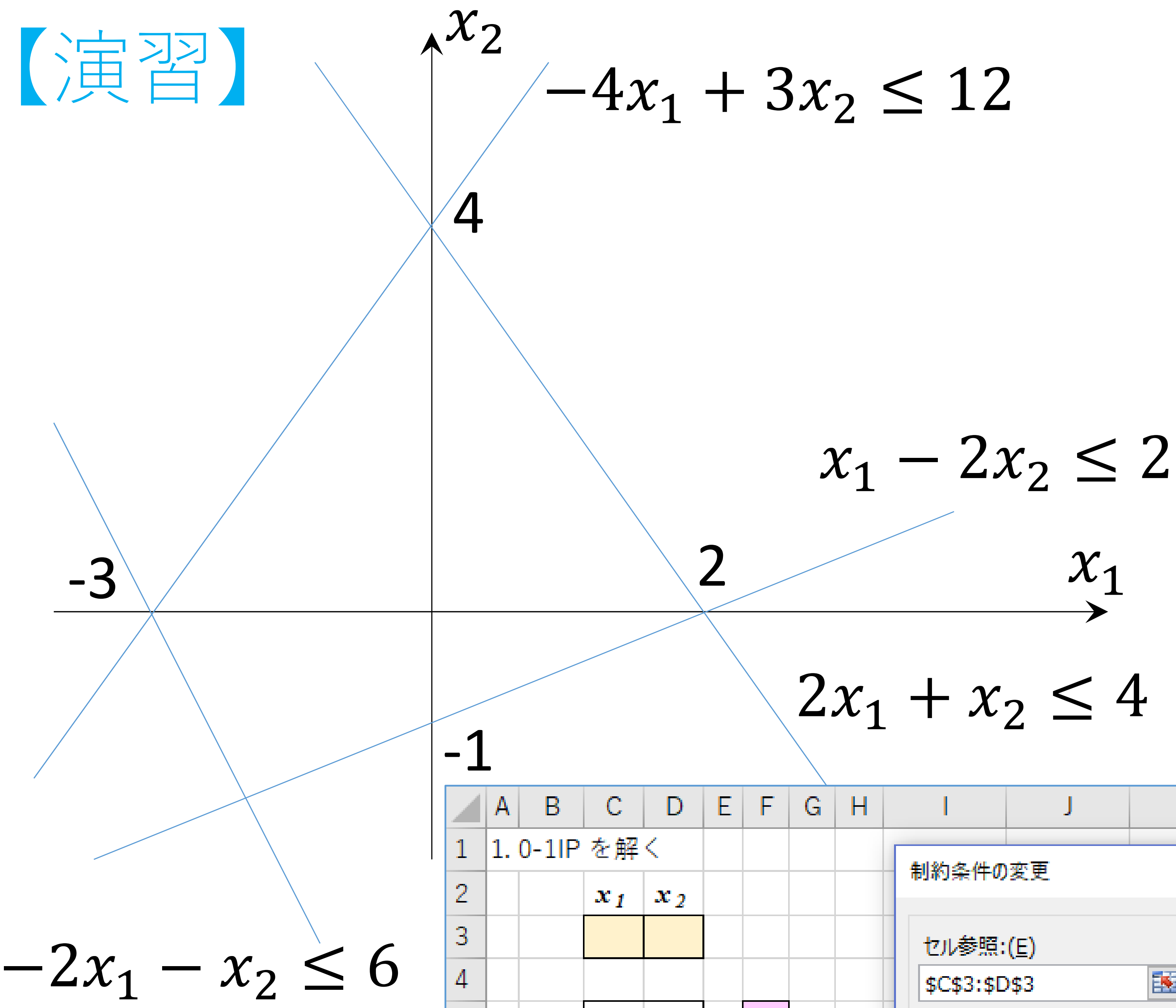
# 1. 0–1整数計画：IPを解く

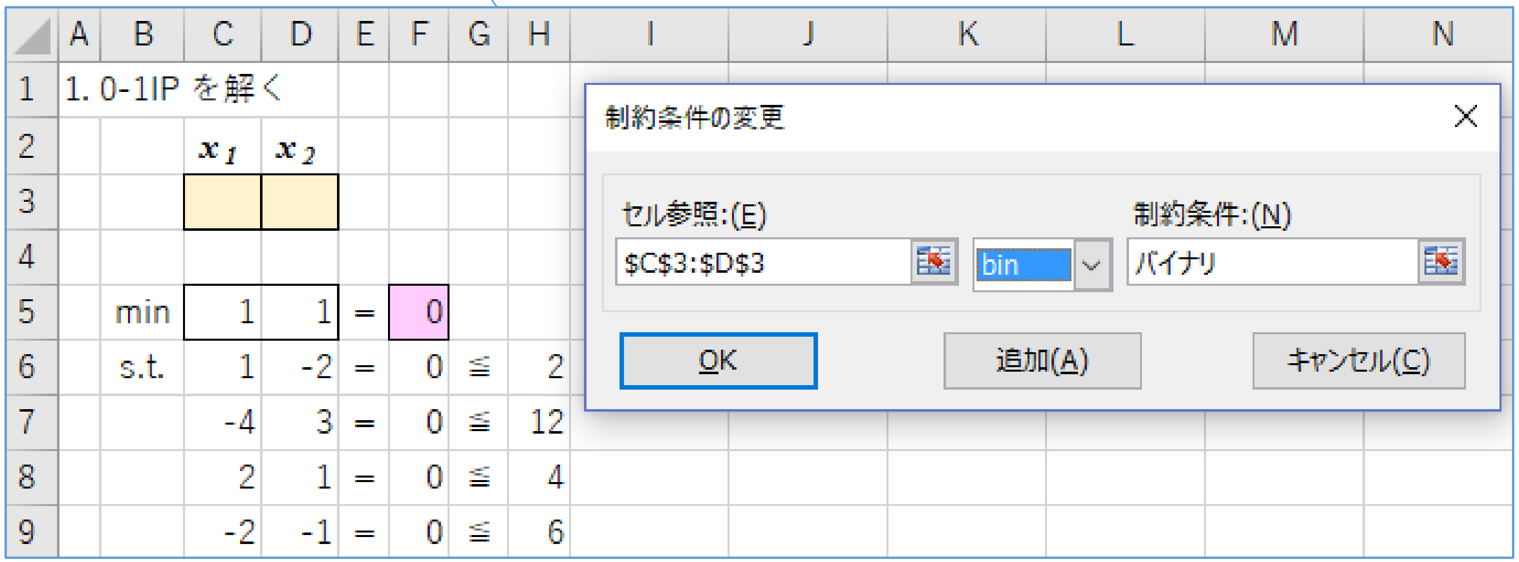
## 【演習】

- 以下の0-1IPについてExcel solverで最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & -4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -2x_1 - x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

# 【演習】



| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1. 0-1IP を解く | | | | | | | |
| 2 | | | $x_1$ | $x_2$ | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | min | 1 | 1 | = | 0 | | |
| 6 | | s.t. | 1 | -2 | = | 0 | ≦ | 2 |
| 7 | | | -4 | 3 | = | 0 | ≦ | 12 |
| 8 | | | 2 | 1 | = | 0 | ≦ | 4 |
| 9 | | | -2 | -1 | = | 0 | ≦ | 6 |

# 2.ナップサック問題

- ナップサック問題 ***knapsack problem***

$n$個の品物があり，ナップサック（1つ）に入れたい

各品物には重さがあり，価値がある

ナップサックには $b$ kg まで，品物を入れることができる

価値総和が最大になるようにするには，どの品物を持って行けばよいか？

【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 品物 $i = 1,2,\dots,n$
- 品物 $i$ の価値：$w_i$
- 品物 $i$ の重さ：$c_i$
- ナップサック容量 $b$
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \quad \text{品物 } i \text{ をナップサックに入れる} \\ 0 & \dots \quad otherwise \end{cases}$

# 2.ナップサック問題

# 【定式化：解答例】

- ナップサック問題 ***knapsack problem***

$$
\begin{aligned}
\text{max.} \quad & w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \le b \\
& x_i \in \{0,1\} \quad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n})
\end{aligned}
$$

# 2.ナップサック問題

- 例題：ナップサック問題

100個の品物があり，ナップサック（1つ）に入れたい

各品物には，重さがあり，価値がある

ナップサックには 40kg まで，品物を入れることができる

価値総和が最大になるようにするには，どの品物を持って行けばよいか？

【演習】 Excel Solver で求解せよ

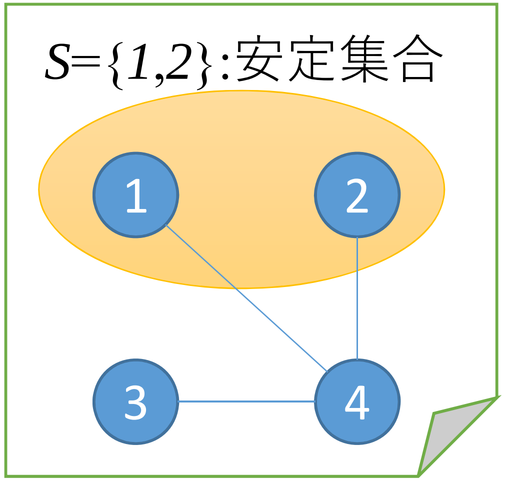
# 3.安定集合

- 最大安定集合問題 ***maximum stable set problem***

無向グラフ $G = (V, E)$　（V={1,2,...,$n$}）

について，要素数が最大となる安定集合 $S$ を求めなさい

※点の部分集合 $S$（$S \subseteq V$）が安定集合（stable set）⇔ $S$内の任意の2点間に枝がない




【演習】0-1IPに定式化せよ

- 点集合 $V= \{1,2,\dots,n\}$

- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \quad \text{点 } i \text{ が安定集合 } S \text{ に含まれる} \\ 0 & \dots \quad \textit{otherwise} \end{cases}$

# 3.安定集合

## 【定式化：解答例】

- 最大安定集合問題 ***maximum stable set problem***

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \text{s.t.} & x_i + x_j \leq 1 \quad (\forall (i,j) \in E) \\ & x_i \in \{0,1\} \quad (\forall \mathrm{i} \in V) \end{array}$$

# 3.安定集合

- 例題：最大安定集合問題

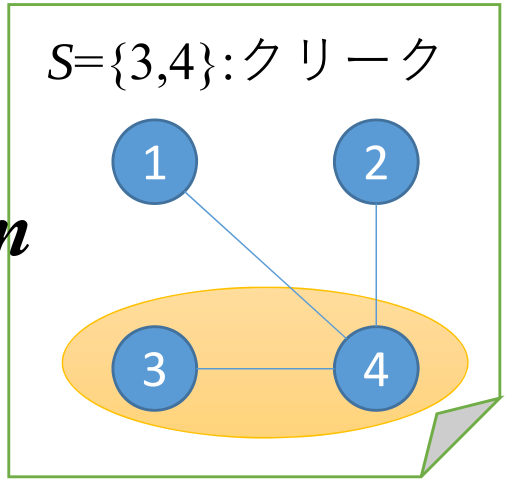
10人の学生がいる

人数が最大の仲良しグループをつくれ

※学生を点とし，仲が悪い学生間に枝を張ると，最大安定集合問題となる

【演習】 Excel Solver で求解せよ

# 3.安定集合

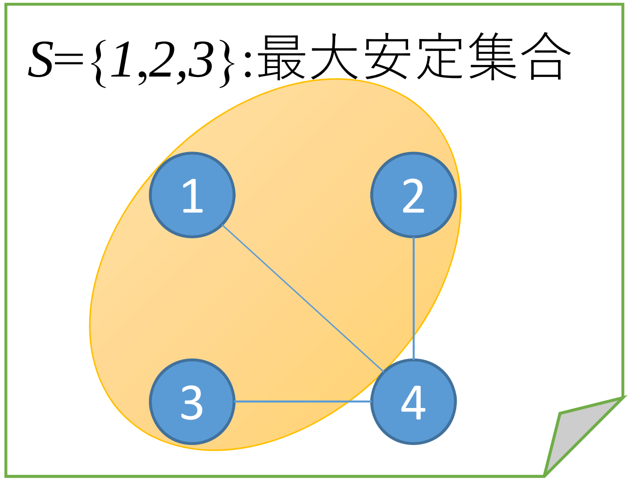



- 最大クリーク問題 ***maximum clique problem***

無向グラフ $G=(V,E)$ （V={1,2,...,$n$}）

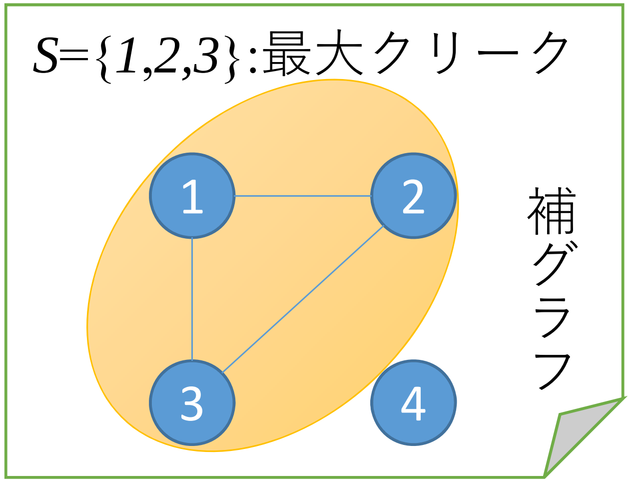
について，要素数が最大となるクリーク $C$ を求めなさい

※点の部分集合 $C$（$C\subseteq V$）がクリーク ⇔ $C$による誘導部分グラフが完全グラフ




## 【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 点集合 $V=\{1,2,\ldots,n\}$
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \ldots \text{点 } i \text{ がクリーク } C \text{ に含まれる} \\ 0 & \ldots \ otherwise \end{cases}$




## 【補足】

無向グラフ $G=(V,E)$ 上の最大安定集合問題
＝補グラフ$\bar{G}=(V,\bar{E})$ 上の最大クリーク問題

# 3.安定集合

## 【定式化例】

- 最大クリーク問題 ***maximum clique problem***

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\text{s.t.} \quad & \left.\begin{aligned} y_{ij} \le x_i \\ y_{ij} \le x_j \end{aligned}\right. (\forall (i,j) \in E \; with \; i < j) \\
& \sum_{i<j} y_{ij} \ge k \sum_{i} x_i - \sum_{i=1}^{k-1} i \;\; (k = 2,3,\ldots,n) \\
& x_i \in \{0,1\} \quad (\forall \mathrm{i} \in V) \\
& y_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall (\mathrm{i},\mathrm{j}) \in E \text{ with } \mathrm{i} < \mathrm{j})
\end{aligned}
$$

# 4.集合分割

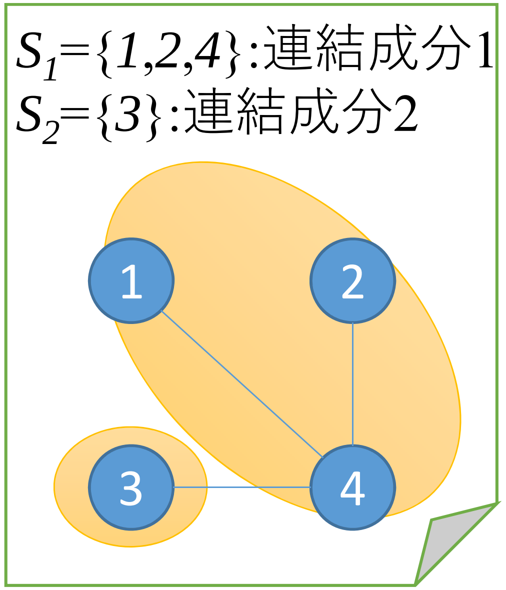
- 集合分割問題 ***set partition problem***

集合 $V$ を $m$ 個に分割しなさい

$V=\{1,2,3,4\}$, $m=2$
→ $S_1=\{1,2,4\}$:分割1
$S_2=\{3\}$:分割2

※def) $V$の部分集合族$\{V_1,\ldots,V_m\}$が$V$の分割 ⇔ $\bigcup_{i=1}^{m} V_i = V,\ V_i \cap V_j = \emptyset (\forall i,j; i \neq j)$

※連結成分分割（無向グラフ $G=(V,E)$ を $m$ 個の連結成分に分割せよ）




【演習】 0-1IPに定式化せよ

- $V$の部分集合 $V_i\ (i=1,2,\ldots)$
- $V_i$ を表す特性ベクトル $a_i \in \boldsymbol{R}^{|V|}$
- 0-1変数 $x_i = \begin{cases} 1 & \ldots\ V_i \text{ を分割の構成要素として使う} \\ 0 & \ldots\ otherwise \end{cases}$

# 4.集合分割

## 【定式化：解答例】

- 集合分割問題 ***set partition problem***

min. or max. 問題による何らかの目的

s.t.

$$a_1 x_1 + a_1 x_1 + \cdots = 1$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1,2,\cdots)$$

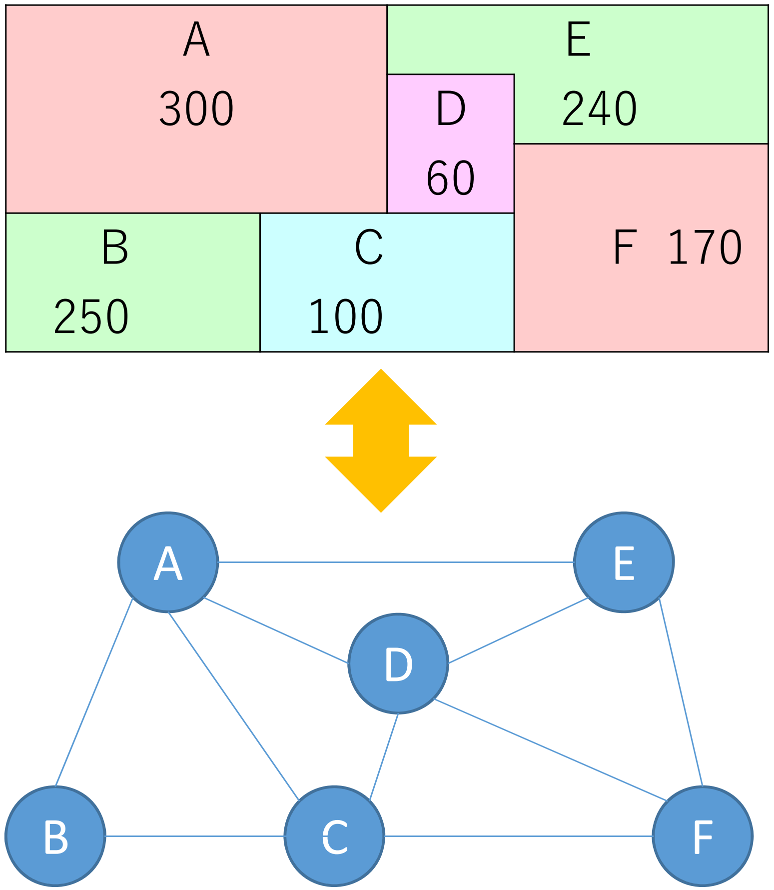
# 4.集合分割

- 例題：連結成分分割問題（飛び地なし集合分割問題）

6つの地区（A,B,...,F）があり，各地区の人口が与えられている

3つの地域に分割したい（ただし，分割後の各地域は連結であること）

最大人口の地域と最小人口の地域の差を最小とする分割を求めよ




【演習】 Excel Solver で求解せよ

- $V$の部分集合 $V_i\ (i = 1,2,\ldots)$
- $V_i$ を表す特性ベクトル $a_i \in \boldsymbol{R}^{|V|}$

- $V_i$ の人口 $p_i$
- 0-1変数 $x_i$
- 実数変数 $u, l$ …分割人口の上限と下限

# 4.集合分割

## 【定式化：例題の解答例】

- 集合分割問題 ***set partition problem***

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & u - l \\
\text{s.t.} \quad & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots = 1 \\
& p_i x_i \leq u \ (i = 1,2,\cdots) \\
& p_i x_i + \bar{p}(1 - x_i) \geq l \ (i = 1,2,\cdots) \\
& x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

$i$は分割のパターン（地域）を表すことに注意

例えば

- ✓ $a_1$は地区Aのみを含む地域
- ✓ $a_2$は地区A,Bからなる地域

…

であり，各地域の人口は

$p_1$=300, $p_2$=550, …

$x_i$は第i地域を採用するかどうかの0-1変数

1番目の制約式は，各地区は1回のみ使用，つまりたくさんある地域の内3つだけ採用（値が1になる. 他は全部0）

2番目の制約式は，3つの地域の最大人口を$u$以下とする

3番目の制約式は，3つの地域の最小人口を$l$以上とする

3番目が2番目と違い，余計な項がついているのは，$x_i$の値が0の場合について対処するため．この余分な項がないと，$l$の値が0以下になって意味をなさないことに注意せよ

$$\bar{p} := \frac{1120}{3} = 373$$

(1分割あたり平均人口)

# 5.巡回セールスマン

- 巡回セールスマン問題 ***traveling salesman problem***

無向グラフ $G = (V, E)$　（V={1,2,...,$n$}）

について，全ての点を丁度1度ずつ経由するコスト最小の巡回路を求めよ

【演習】 0-1IPに定式化せよ

- 点集合 $V = \{1,2,...,n\}$, 枝$(i, j)\in E$上のコスト$c_{ij}$
- 0-1変数 $x_{ij} = \begin{cases} 1 \dots & \text{巡回路として枝 } (i, j)\in E \text{ を} i\rightarrow j \text{の順に通る} \\ 0 \dots & \textit{otherwise} \end{cases}$

# 5.巡回セールスマン

- 定式化

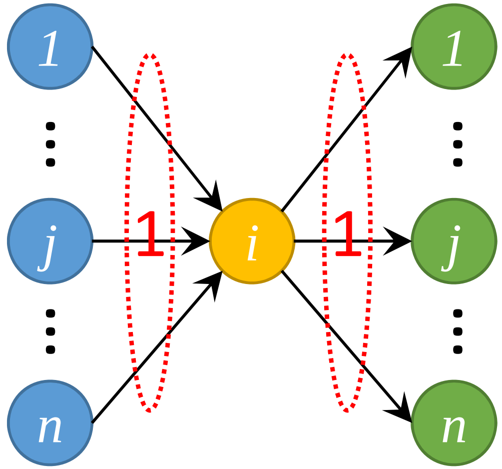
$$\text{min.} \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

この制約の意図



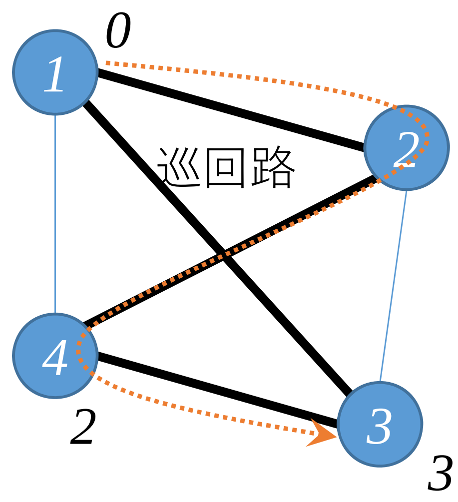

しかし，この制約だけでは部分巡回路が含まれる

部分巡回路をどう回避する？

- ✓ 部分巡回路除去定式化
- ✓ ポテンシャル定式化
- ✓ 単一品種流定式化
- ✓ 多品種流定式化
- ✓ etc.

# 5.巡回セールスマン

巡回路に訪問順ラベルがつく




- ポテンシャル定式化

min. $$\sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

s.t. $$\sum_{j: j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j: j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

部分巡回路が含まれる

$$\boxed{\begin{array}{c} u_i + 1 \ - (n-1)\left(1 - x_{ij}\right) \leq u_j \ (\forall i = 1, \dots, n; j = 2, \dots n; i \neq j) \\ 1 \leq u_i \leq n - 1 \ (\forall i = 2, \dots, n) \end{array}}$$

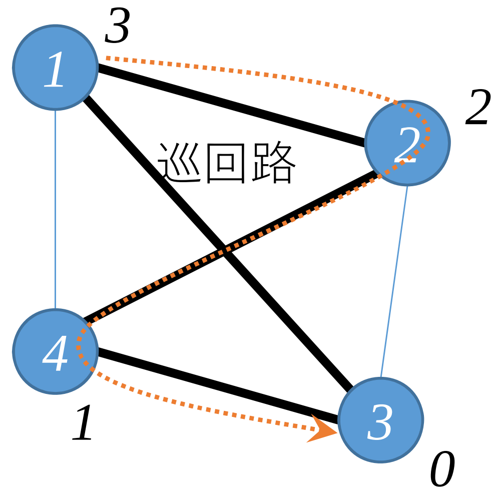
$u_i$：点$i$の訪問順序を表す実数変数

- $u_1 = 0$
- $i \rightarrow j$の順に訪問するとき $u_j = u_i + 1$

# 5.巡回セールスマン

- 単一品種流定式化

点1から3のフローを流す
各点は1ずつ消費




$$\text{min.} \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

部分巡回路が
含まれる

$$\sum_j f_{1j} = n - 1$$

$$\sum_j f_{ji} - \sum_j f_{ij} = 1 \ (\forall i = 2, \dots, n)$$

$$f_{1j} \leq (n-1) x_{1j} \ (\forall j \neq 1)$$

$$f_{ij} \leq (n-2) x_{ij} \ (\forall i \neq j, i \neq 1, j \neq 1)$$

$$f_{ij} \geq 0 \ (\forall i \neq j)$$

$f_{ij}$：点$i \rightarrow j$のフロー

- 点1から $n$-1 のフローを流す
- 各点では 1 消費する
- フローは巡回路上のみ流れる

# 5.巡回セールスマン

- 多品種流定式化

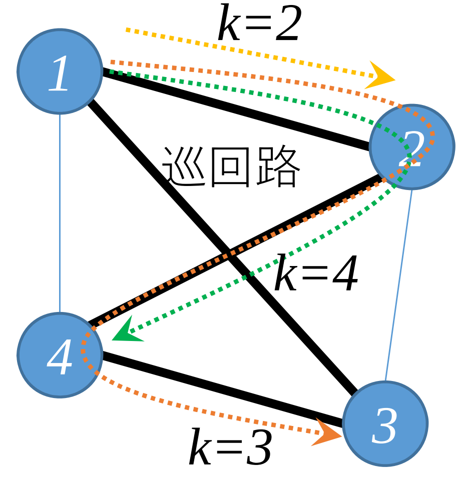
$$\text{min.} \quad \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:j \neq i} x_{ij} = 1 \ (\forall i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j:j \neq i} x_{ji} = 1 \ (\forall i = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \ (\forall i \neq j)$$

部分巡回路が
含まれる




$$\sum_j f_{ji}^k - \sum_j f_{ij}^k = \begin{cases} -1 (i = 1) \\ 0 (i \neq 1, k) \\ 1 (i = k) \end{cases} \ (\forall k = 2, \ldots, n)$$

$$f_{ij}^k \leq x_{ij} \ (\forall k, i, j)$$

$$f_{ij}^k \geq 0 \ (\forall i \neq j, j \neq 1, k)$$

$f_{ij}^k$：品種$k$の点$i$→$j$のフロー

- 点*1*から *n-1*種類のフローを流す
- 各品種のフローは全て1単位
- 各品種$k$=2,...,$n$は対応点2,...,$n$が受け取る（$k$=2は点2, $k$=3は点3,..., $k$=$n$は点$n$が受け取る）
- 各フローは巡回路上のみ流れる

# 参考文献


1. *A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley and Sons, 1986.*
2. *L.A. Wolsey: Integer Programming, John Wiley and Sons, 1998.*
3. *M. Conforti, G. Cornuejols and G.Zambelli: Integer Programming, Springer, 2014.*
4. 久保幹雄, **J.P.**ペドロソ, 村松正和, **A.**レイス：あたらしい数理最適化, 近代科学社,**2012.**
5. 久保幹雄, 小林和博, 斉藤努, 並木誠, 橋本英樹：**Python**言語によるビジネスアナリティクス, 近代科学社, **2016.**
6. 藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎：**Excel**で学ぶ**OR**, オーム社, **2011.**
7. 堀田敬介：えくせるであそぶ, 創成社, **2005.**