Operations Research
社会を構成する数学

選択・浮気・外交・環境問題

文教大学
堀田 敬介

父母と教職員の会：一日大学 2018(H30). 6.3, Sun.

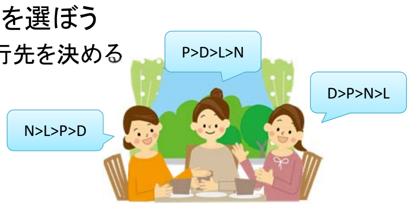
Outline
- 選択の数理
  - 社会的厚生関数
  - 集団による意思決定：社会(集団)が1人(1つ)を選ぶには
  - Arrowの一般不可能性定理
- 浮気の数理
  - グラフ理論
  - 2つの集団のマッチング
  - 安定性，耐戦略性，Pareto最適性
- 外交・環境問題の数理
  - ゲーム理論
  - 囚人のジレンマ
  - Nash均衡解，Pareto最適解

選択の数理

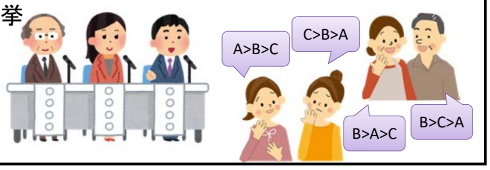
- 社会的厚生関数
- 集団による意思決定：社会(集団)が1人(1つ)を選ぶには
- Arrowの一般不可能性定理

選択の数理

- みんなで一つを選ぼう
  - ✓例：3人で旅行先を決める
    - ✓New York
    - ✓London
    - ✓Paris
    - ✓Dubai



  - ✓例：選挙
    - ✓A氏
    - ✓B氏
    - ✓C氏



選択の数理

「厚生」＝生活を健康で豊かなものにすること
「社会的厚生」＝「社会全体の満足度」「人間の福祉の経済的側面」「経済全体の資源配分の効率性を評価する指標」

- 社会的厚生関数 social welfare function
  - ✓社会(組織)が複数(2人以上)の個人で構成される
  - ✓各個人は対象に対して個々の選好を自由にもつ
  - ✓各個人の効用(選好)が比較可能である
  - ✓社会(組織)で対象から1つを選択する
  - ✓社会的厚生を評価する関数を社会的厚生関数とよぶ
    - ✓ベンサム型：個々の効用(選好)の和
    - ✓ロールズ型：最小効用(選好)最大 maximin
    - ✓ニーチェ型：最大効用(選好)最大 maximax
    - ✓ナッシュ型：個々の効用(選好)の積
    - ✓…

選択の数理

なぜ，こんなにたくさんの「決め方」があるのだろう？

- 代表的な選び方
  - 勝ち抜き方式 … 1対1の対決を繰り返す　※大相撲優勝決定巴戦
  - 総当り決戦方式 … 1対1の総当り戦．勝ち星最多が選ばれる　Jリーグ，プロ野球，
  - 単記方式 … 各個人は最も好む1つを申請，最大支持が選ばれる　衆議院議員小選挙区制
  - 上位2者決戦方式 … 単記方式で過半数獲得がなければ，上位2つの決選投票をする　フランス大統領選挙
  - 勝ち抜き決戦方式 … 単記方式で過半数獲得がなければ，最下位を脱落としてその票を振り分ける，以下これを繰り返し　オリンピック開催地選定
  - 順位評点方式 … 各個人は対象の全順位をつける．順位に応じて得点を与え，総点が最大の1つを選ぶ　オリンピック競技
  - etc.

選択の数理（全体の意思決定の困難性）

- コンドルセのパラドクス（3人の個人A,B,Cが対象X,Y,Zを選好）
  - A : X > Y > Z
  - B : Y > Z > X
  - C : Z > X > Y

勝ち抜き方式
1) X vs Y → X, X vs Z → Z　Z win!
2) Y vs Z → Y, Y vs X → X　X win!
3) Z vs X → Z, Z vs Y → Y　Y win!

- ボルダのパラドクス（7人の個人A～Gが対象X,Y,Zを選好）
  - A : X > Y > Z
  - B : X > Y > Z
  - C : X > Y > Z
  - D : Y > Z > X
  - E : Y > Z > X
  - F : Z > Y > X
  - G : Z > Y > X

単記方式
1) 最も好き　[X:3票, Y:2票, Z:2票] → 最も好き=X
2) 最も嫌い　[X:4票, Y:0票, Z:3票] → 最も嫌い=X

  - A : X > Y > Z
  - B : X > Y > Z
  - C : X > Y > Z
  - D : Y > Z > X
  - E : Y > Z > X
  - F : Y > Z > X
  - G : Z > X > Y

上位2者決戦方式
（過半数獲得者がいないなら上位2者決戦投票）
1) 最も好き　[X:3票, Y:3票, Z:1票]
　→ X vs Y → 4 vs 3 → 最も好き=X
2) 最も嫌い　[X:3票, Y:1票, Z:3票]
　→ X vs Z → 4 vs 3 → 最も嫌い=X

選択の数理（全体の意思決定の困難性）

- ボルダ点
  - A : W > X > Y > Z
  - B : W > X > Y > Z
  - C : W > X > Y > Z
  - D : Z > W > X > Y
  - E : Z > W > X > Y
  - F : Y > Z > W > X
  - G : Y > Z > W > X

順位評点方式
（順位をつけ上位から点数をつける．3人なら1位3点，2位2点，3位1点）

ボルダ点：
W(4*3 + 3*2 + 2*2 = 22)
X(3*3 + 2*2 + 1*2 = 15)
Y(2*3 + 1*2 + 4*2 = 16)
Z(1*3 + 4*2 + 3*2 = 17)
→ 1位:W
2位:Z, 3位:Y, 4位:X

ここでWを除いてボルダ点を考えると…

ボルダ点：
X(3*3 + 2*2 + 1*2 = 15)
Y(2*3 + 1*2 + 3*2 = 14)
Z(1*3 + 3*2 + 2*2 = 13)
→ 1位:X, 2位:Y, 3位:Z

「無関係対象からの独立性」を満たさない

※)「無関係対象からの独立性」 ←民主主義の根本原則の一つ
X,Y,Zの選好順位は，Wがいるかいないかに関係ない（独立）

選択の数理（全体の意思決定の困難性）

- 戦略的操作可能性（嘘をつく）
  - A : W > X > Y > Z
  - B : W > X > Y > Z
  - C : X > W > Y > Z

↓Cが嘘をつく

  - A : W > X > Y > Z
  - B : W > X > Y > Z
  - C : X > Y > Z > W

Xを選びたいためにWを4位に

ボルダ点：　**順位評点方式**

W(4*2 + 3*1 = 11)
X(3*2 + 4*1 = 10)
Y(2*3 = 6)
Z(1*3 = 3)
→ 1位:W, 2位:X, 3位:Y, 4位:Z

W(4*2 + 1*1 = 9)
X(3*2 + 4*1 = 10)
Y(2*2 + 3*1 = 7)
Z(1*2 + 2*1 = 4)
→ 1位:X, 2位:W, 3位:Y, 4位:Z

「戦略的操作可能」

選択の数理

- パウロスの全員当選モデル（ジョン・パウロス1991）
  - V > W > X > Y > Z : 18人
  - Z > X > W > Y > V : 12人
  - Y > Z > X > W > V : 10人
  - W > Y > X > Z > V : 9人
  - X > Z > W > Y > V : 4人
  - X > Y > W > Z > V : 2人

（立候補者5人 V, W, X, Y, Z）
（有権者：55人，過半数28人）

単記方式
V(18) , Z(12) , Y(10), W(9), X(6)　→ Vが当選

上位2者決選方式
V(18) vs Z(12+10+9+4+2=37)　→ Zが当選

勝ち抜き決選方式
→ V(18), W(9), Y(10+2), Z(12+4)
→ V(18), Y(10+2+9), Z(12+4)
→ V(18), Y(10+2+9+12+4)　→ Yが当選

順位評点方式
V(5*18+1*37=127)
W(5*9+4*18+3*18+2*10=191)
X(5*6+4*12+3*37=189)
Y(5*10+4*11+2*34=162)
Z(5*12+4*14+2*11+1*18=156)　→ Wが当選

総当り方式
XvsV(37vs18), XvsW(28vs27),
XvsY(36vs19), XvsZ(33vs22)　→ Xが当選

選択の数理

- アロウの一般不可能性定理（ケネス・アロウ1951）
  - 合理的な個人選好が満たすべき2つの条件
    1. 選好の連結律： X>Y or X<Y　が成立（どんな選択肢も選好順位付け可能）
    2. 選好の推移律：X>Y and Y>Z → X>Z
  - 民主主義社会に必要不可欠な4つの条件
    a. 個人選好の無制約性　… 個人はいかなる選好順序ももてる
    b. 市民の主権性（パレート最適性）　… 全ての個人がX>Yなら社会もX>Yなど
    c. 無関係対象からの独立性　…
    d. 非独裁性　… 独裁者は存在しない
  - 完全民主主義モデル
    - 個人が2つの条件を満たし，社会が4つの条件を満たす
  - 社会的選択関数
    - 2人以上の個人が3つ以上の有限個の選択肢に選好順序を持つ場合の全ての社会的決定方式を表す

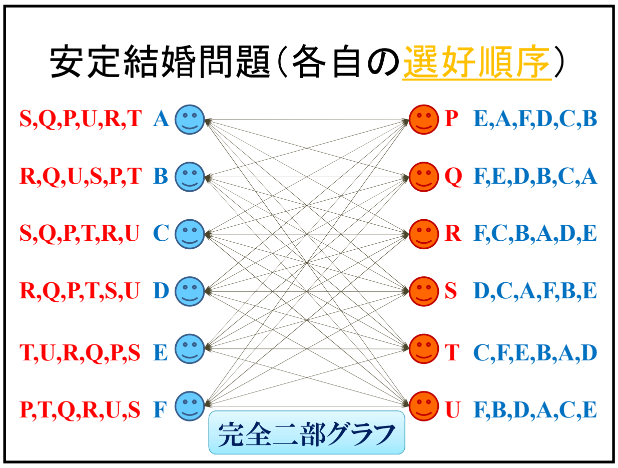
定理『完全民主主義モデルには，社会的選択関数は存在しない』

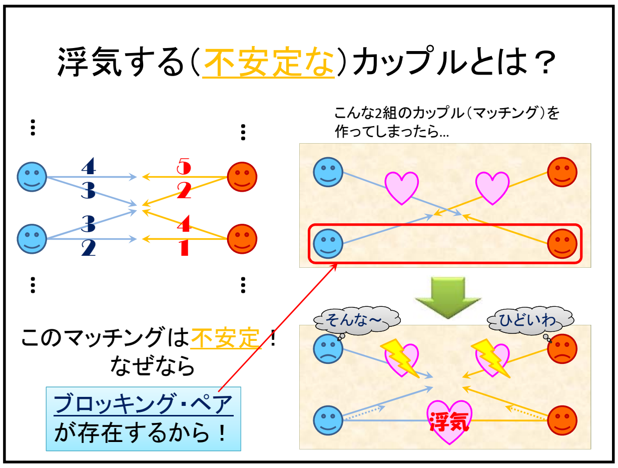
選択の数理

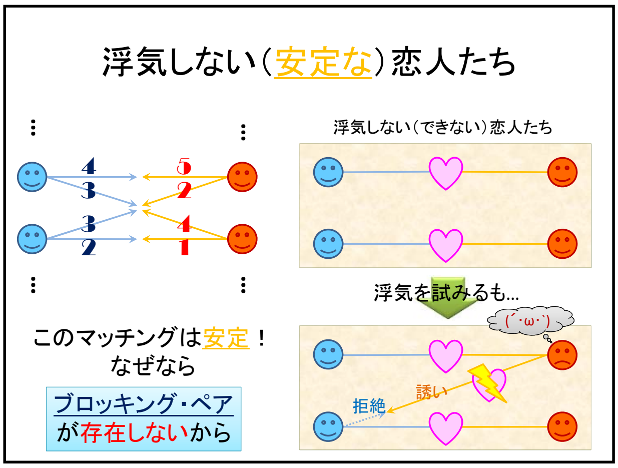
✓ J.R.Hicks & K.J.Arrow　1972年ノーベル経済学賞
「一般的経済均衡理論および厚生理論に対する先駆的貢献」


浮気の数理
グラフ理論
2つの集団のマッチング
安定性，耐戦略性，Pareto最適性


浮気しない？カップル
6人の男女がいます．少子化対策？のため，6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう．でも各自の好き嫌いを考えずに強引にくっつけちゃうと，浮気する人が出るかもしれません．浮気しないように6組のカップルをつくれますか？
どうすれば浮気しないの？
浮気しないってどういうこと？
浮気ってどういう状況で起こる？
浮気する・しないを「上手く定義」する

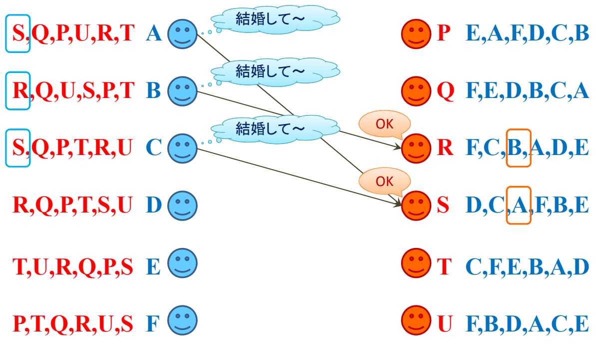

安定結婚問題（各自の選好順序）
S,Q,P,U,R,T A
R,Q,U,S,P,T B
S,Q,P,T,R,U C
R,Q,P,T,S,U D
T,U,R,Q,P,S E
P,T,Q,R,U,S F
P E,A,F,D,C,B
Q F,E,D,B,C,A
R F,C,B,A,D,E
S D,C,A,F,B,E
T C,F,E,B,A,D
U F,B,D,A,C,E
完全二部グラフ


浮気する（不安定な）カップルとは？
4 3 3 2
5 2 4 1
こんな2組のカップル（マッチング）を作ってしまったら…
このマッチングは不安定！
なぜなら
ブロッキング・ペア
が存在するから！
そんな～
ひどいわ
浮気


浮気しない（安定な）恋人たち
4 3 3 2
5 2 4 1
浮気しない（できない）恋人たち
浮気を試みるも…
(´･ω･`)
誘い
拒絶
このマッチングは安定！
なぜなら
ブロッキング・ペア
が存在しないから

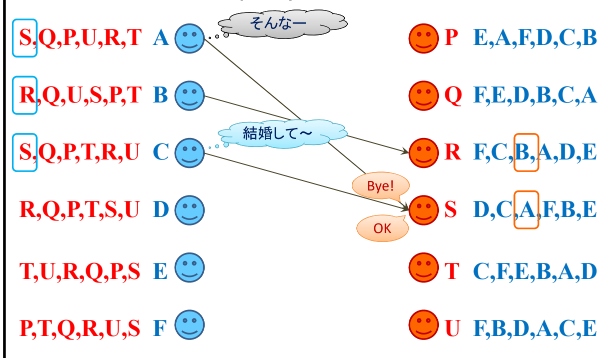

問題：このマッチングは安定？
S,Q,P,U,R,T A
R,Q,U,S,P,T B
S,Q,P,T,R,U C
R,Q,P,T,S,U D
T,U,R,Q,P,S E
P,T,Q,R,U,S F
P E,A,F,D,C,B
Q F,E,D,B,C,A
R F,C,B,A,D,E
S D,C,A,F,B,E
T C,F,E,B,A,D
U F,B,D,A,C,E

Gale-Shapley アルゴリズム



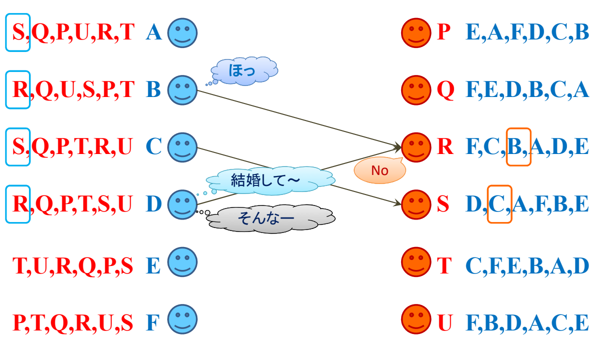
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-15, 1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



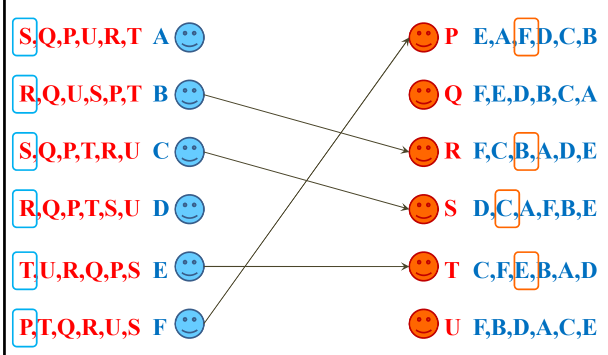
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-15, 1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



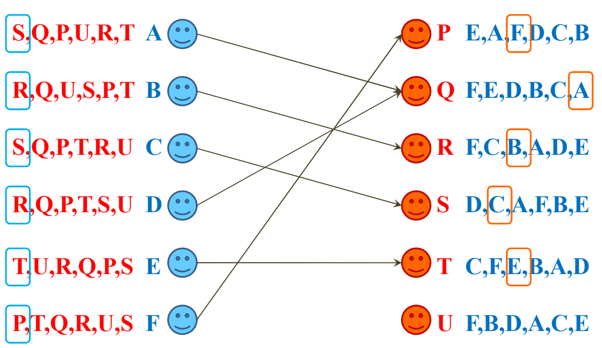
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-15, 1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-15, 1962.

Gale-Shapley アルゴリズム

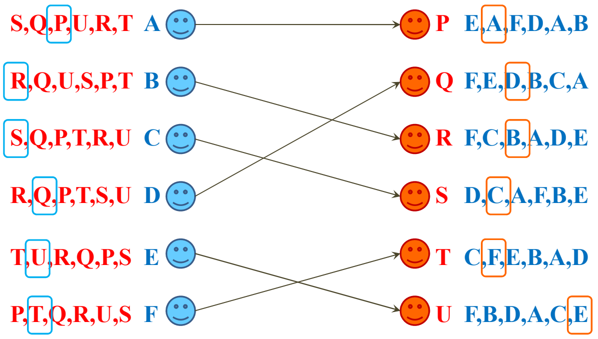


D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-15, 1962.

評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価

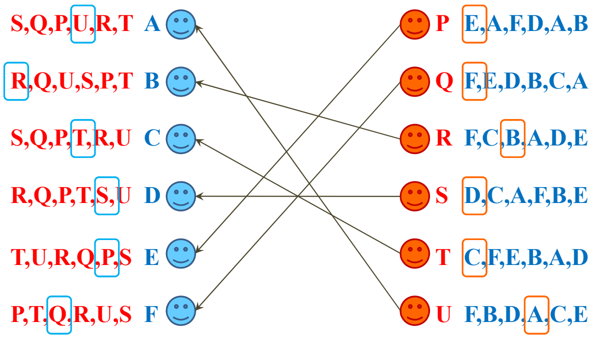
- 定理：与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し，Gale-Shapleyアルゴリズムは<u>安定マッチング</u><u>を導き終了</u>する.
- 系：安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても，<u>少なくとも一つ</u>の安定マッチングが<u>存在する</u>.
- 定理：男性側の<u>プロポーズの順番に関係なく</u>，Gale-Shapleyアルゴリズムは，同一の安定マッチングを導く.
- 系：安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても，Gale-Shapleyアルゴリズムは，男性側からプロポーズすれば<u>男性最良安定マッチング</u>を導く

男性最良安定マッチング



D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-15, 1962.

女性最良安定マッチング



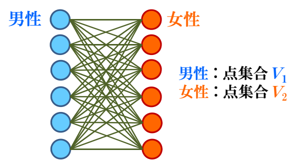
評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価2

- 与えられた安定結婚問題について，いくつかの安定マッチングが存在する場合，男性にとってより好ましい安定マッチング，女性にとってより好ましい安定マッチングなど，安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる．
- 定理：与えられた安定結婚問題について，
  男性最良安定マッチング＝女性最悪安定マッチング
  男性最悪安定マッチング＝女性最良安定マッチング
  である

✓ A.E.Roth & L.S.Shapley 2012年ノーベル経済学賞
「安定配分理論と市場設計の実践に関する功績」

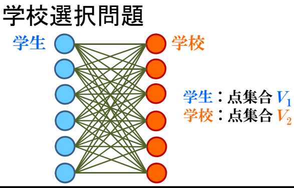
2つの集団のマッチング問題

- 安定結婚問題



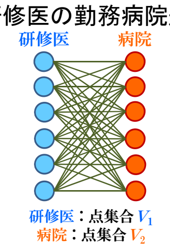
男性：点集合 V_1
女性：点集合 V_2

- 学校選択問題



学生：点集合 V_1
学校：点集合 V_2

- 研修医の勤務病院選択



研修医：点集合 V_1
病院：点集合 V_2

- etc.

外交・環境問題の数理

- ゲーム理論
- 囚人のジレンマ
- Nash均衡解，Pareto最適解

外交・環境問題の数理

- ゲーム理論
  - ゲーム的状況 game situations
    - 複数の意思決定主体（プレイヤー）が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
  - ゲーム理論 game theory
    - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

✓プレイヤー player
✓戦略 strategy …個々のプレイヤーのとりうる戦略
✓利得 payoff …全プレイヤーの戦略で決まる個々の利得

ゲーム理論とは何か？

出展:「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 例）喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中
  - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は，A=600人，B=300人
  - 両店舗が別々の地域に出店すると，見込み客を全て獲得できる
  - 両店舗が同じ地域に出店すると，スタボがダタールの2倍の客を獲得
  - 同時にどちらか1地域に必ず出店（両方出店や出店中止はない）
- 問:ダタールはどちらに出店すべきか？　またそれは何故か？

ダタ＼スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

Nash均衡解

◆ 検討
- マキシミン基準（悲観的意思決定基準） → A地域へ出店せよ
- マキシマックス基準（楽観的意思決定基準） → A地域へ出店せよ
- ラプラス基準（平均値） → A地域へ出店せよ
- ゲーム理論による解答 → B地域へ出店せよ

「1人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用であるゲーム」では解が異なる！

2人非協力非零和ゲーム

- 例：囚人のジレンマ prisoner's dilemma
  - 2人の囚人A, Bが別個に取り調べを受けている
  - 現状では証拠不十分で軽犯罪でしか起訴できないため，2人とも懲役3年
  - 各囚人は司法取引を持ちかけられ，応じた方は1年，応じない方は10年，ただし，2人ともが応じた場合は2人とも8年

✓プレイヤー
- 囚人A
- 囚人B

✓囚人A, Bの戦略
- 協調戦略＝「黙秘」
- 裏切り戦略＝「自白」

A ＼ B	黙秘	自白
黙秘	(-3, -3)	(-10, -1)
自白	(-1, -10)	(-8, -8)

Pareto最適解　Nash均衡解

2人非協力非零和ゲーム

- 例：共有地の悲劇 tragedy of the commons
  - 地球温暖化対策

✓プレイヤー
- A＝ある1つの国
- B＝それ以外の全ての国

✓各国A, Bの戦略
- 協調戦略＝「CO2排出量を削減」
- 裏切り戦略＝「自国経済優先」

A ＼ B	排出量削減	自国優先
排出量削減	(7, 7)	(0, 10)
自国優先	(15, 2)	(3, 3)

Pareto最適解　Nash均衡解

2人非協力非零和ゲーム

- 例：囚人のジレンマ prisoner's dilemma
  - 外交問題

✓プレイヤー
- 国A
- 国B

囚人のジレンマの構造をもつ問題は至る所にある！
例）2人で課題を達成
例）組織の運営
「真面目に取り組む」「サボる」

✓各国A, Bの戦略
- 協調戦略＝「平和的話し合い / 外交努力」
- 裏切り戦略＝「戦争をしかける / 武力に訴える」

A ＼ B	平和路線	武力行使
平和路線	(7, 7)	(0, 10)
武力行使	(10, 0)	(2, 2)

Pareto最適解　Nash均衡解

外交・環境問題の数理

注）1回限りのゲームと繰り返しゲームのプレイヤーの戦略の違い

- 囚人のジレンマを回避するにはどうすれば良いか？
  - 数値（利得）を変える
  - つまり，現在見ている利得表（ゲーム盤）は錯覚で，裏切らない方が得だということを示す

A ＼ B	協調	裏切り
協調	(7, 7)	(0, ~~10~~)
裏切り	(~~10~~, 0)	(2, 2)

✓ R.Selten, J.F.Nash & J.C.Harsanyi
1994年ノーベル経済学賞
「非協力ゲームにおける均衡分析に関する理論の開拓」

もっと知りたい方へ【参考文献】

- 選択の数理
  - 高橋昌一郎「理性の限界 —不可能性・不確定性・不完全性」講談社（2008）
  - 坂井豊貴「多数決を疑う —社会的選択理論とは何か」岩波書店（2015）
  - 盛山和夫編「社会を数理で読み解く —不平等とジレンマの構造」有斐閣（2015）
  - 坂井豊貴「社会的選択理論への招待 —投票と多数決の科学」日本評論社（2013）
- 浮気の数理
  - A.E.Roth「Who Gets What?」日経新聞出版（2016）
  - 川越 敏司「マーケット・デザイン」講談社（2015）
  - 坂井豊貴「メカニズムデザインと意思決定のフロンティア」慶大出版（2014）
- 外交・環境問題の数理
  - 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版（2003）
  - 渡辺隆裕「ゼミナール ゲーム理論入門」日経新聞出版（2008）